

DOPORUČENÉ ÚLOHY, CVIČENÍ 7

1. Rozhodněte, zda následující matice je monomorfismus, epimorfismus, či isomorfismus.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Rozhodněte, zda následující lineární zobrazení $A : L_1 \rightarrow L_2$ je monomorfismus, epimorfismus, či isomorfismus (například tak, že zobrazení reprezentujete maticí vůči nějaké bázi, mnohdy ale existuje jednodušší řešení).

(a) $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7x - 2y \\ -x \end{pmatrix}$

(c) $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x + 3y \\ 2x - 6y \end{pmatrix}$

(d) $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x - y \\ 2x + y + z \\ x + z \end{pmatrix}$

(e) $A : \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), A(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$

(f) $A : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x], A(ax^2 + bx + c) = cx^2 + a$

(g) $A : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x], A(ax^2 + bx + c) = (c - b)x^2 + 5ax + a + 6b$

(h) $A : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), A(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & b \\ a & c - b \end{pmatrix}$

(i) $A : \mathbb{R}^{\leq 5}[x] \rightarrow \mathbb{R}^3, A(ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f) = \begin{pmatrix} a + b + c \\ d + e + f \\ 0 \end{pmatrix}.$

3. Nalezněte nějaký isomorfismus následujících prostorů L_1 a L_2 .

(a) $L_1 = \mathbb{R}^3, L_2 = \mathbb{R}^{\leq 2}[x],$

(b) $L_1 = \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3), L_2 = \mathbb{R}^6,$

(c) $L_1 = \mathbb{R}^{\leq 3}[x], L_2 = \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$

4. Necht' L_1, L_2, L_3 jsou lineární prostory a $A : L_1 \rightarrow L_2, B : L_2 \rightarrow L_3$ jsou lineární zobrazení. Rozhodněte o platnosti implikací:

- (a) $B \circ A$ je monomorfismus $\Rightarrow A$ je monomorfismus,
 - (b) A je monomorfismus $\Rightarrow B \circ A$ je monomorfismus.
5. Dokažte, že pro libovolnou matici $A : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ a libovolnou regulární matici $M : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$ platí $\ker(M \cdot A) = \ker(A)$, $\operatorname{def}(M \cdot A) = \operatorname{def}(A)$ a $\operatorname{rank}(M \cdot A) = \operatorname{rank}(A)$.
6. Rozhodněte o platnosti výroku.
- Pro libovolnou matici $A : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ a libovolnou regulární matici $M : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$ platí $\operatorname{im}(A) = \operatorname{im}(M \cdot A)$.