Maticový počet, cvičení 2

1. Spočtěte $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, a $\|\cdot\|_\infty$ pro vektory
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 1 \\ 4i \end{pmatrix}.$$

2. Veškerou informaci o normě na lineárním prostoru V lze zjistit z její *jednotkové sféry*, což je množina
$$S_{\|\cdot\|} = \{\vec{x} \in V : \|\vec{x}\| = 1\}.$$
Nalezněte jednotkovou sféru pro normy ℓ_1, ℓ_2, a ℓ_∞ na $\mathbb{R}^2$. Jaká bude situace pro normy ℓ_p v případech, kdy $p \in (1,2)$ nebo $p \in (2,\infty)$?

3. Rozhodněte, zda následující zobrazení $\|\cdot\|$ jsou normy na příslušných prostorech:
   (a) $\|\vec{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|^2, |x_3|^3\}$ na $\mathbb{R}^3$,
   (b) $\|\vec{x}\| = |2x_1 + x_2| + |x_1 + x_2|$ na $\mathbb{R}^2$,
   (c) $\|A\| = \|A \cdot B\|_F$ na $\mathbb{F}^{n\times n}$, kde $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ je nějaká regulární matice,
   (d) $\|A\| = |det(A)|^{\frac{1}{n}}$ na $\mathbb{F}^{n\times n}$,
   (e) $\|A\| = |tr(A)|$ na $\mathbb{F}^{n\times n}$,
   (f) $\|A\| = \max_{i=1,\dots,n} \|A_{i*}\|_1$,
   (g) $\|A\| = \max_{j=1,\dots,n} \|A_{*j}\|_1$,
   (h) $\|f\| = \left|\int_0^1 f(x)dx\right|$ na prostoru spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$,
   (i) $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ na prostoru spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$.

4. Dokažte, že pro každé $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$ platí $\lim_{p\to\infty} \|\vec{x}\|_p = \|\vec{x}\|_\infty$.

5. Dokažte, že pro každé $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$ platí $\|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_2 \le \|\vec{x}\|_1$.

6. Dokažte, že:
   (a) Pokud $\|\cdot\|_a \simeq \|\cdot\|_b$, potom $\|\cdot\|_b \simeq \|\cdot\|_a$.
   (b) Pokud $\|\cdot\|_a \simeq \|\cdot\|_b$ a $\|\cdot\|_b \simeq \|\cdot\|_c$, potom $\|\cdot\|_a \simeq \|\cdot\|_c$.

7. Dokončete důkaz Věty 2.10 z přednášky: Dokažte, že na lineárním prostoru V dimenze n jsou všechny normy ekvivalentní, pokud víte, že to platí pro $\mathbb{F}^n$, a že V je isomorfní $\mathbb{F}^n$.

8. Nalezněte číslo podmíněnosti κ_F pro matice:
   (a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ -1+i & -i \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$
   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Pro následující matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2+10^{-6} \end{pmatrix}$ a vektory $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+10^{-6} \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3-499 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$ vyřešte soustavy $(A|\vec{b}_1)$ a $(A|\vec{b}_2)$.
   Spočtěte číslo podmíněnosti $\kappa_F(A)$.