Maticový počet, cvičení 3

1. Dokažte, že zobrazení $\langle A, B\rangle = tr(A^* \cdot B)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{F}^{n\times n}$, nazývá se *standardní skalární součin pro matice*.
   Hint: Nejprve si uvědomte, že pro každou matici $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ platí $tr(A^*) = \overline{tr(A)}$. Může se Vám také hodit připomenout si Tvrzení 2.18(i) z přednášky.

2. Rozhodněte, zda následující zobrazení $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jsou skalární součiny na příslušných prostorech:

   (i) $\langle x, y\rangle = |x \cdot y|$ na $\mathbb{C}$,

   (ii) $\langle x, y\rangle = x \cdot \overline{y}$ na $\mathbb{C}$,

   (iii) $\langle x, y\rangle = e^{x\cdot y}$ na $\mathbb{R}$,

   (iv) $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \, |y_i|^2}$ na $\mathbb{F}^n$,

   (v) $\langle A, B\rangle = det(A \cdot B)$ na $\mathbb{R}^{n\times n}$,

   (vi) $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j} \cdot [B]_{i,j}$ na $\mathbb{R}^{n\times n}$

   (vii) $\langle f, g\rangle = \max_{x\in[0,1]} \overline{f(x)} \cdot g(x)$ na prostoru všech komplexních spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$,

   (viii) $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} \cdot g(x)dx$ na prostoru všech komplexních spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$,

   (ix) $\langle (a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ na prostoru všech reálných posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňujících $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

3. Pomocí rovnoběžníkového pravidla rozhodněte, zda jsou následující normy indukovány nějakými skalárními součiny:

   (i) l_1 norma na $\mathbb{F}^n$,

   (ii) l_∞ norma na $\mathbb{F}^n$,

   (iii) $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}$ na prostoru všech spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, 1]$.

4. Nalezněte QR-rozklady následujících matic:

   (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 4+3i \\ 0 & -12 \\ 4 & -1+12i \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

   (5) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i \\ 1+i & 3 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$

5. Pomocí QR-rozkladu řešte následující soustavy metodou nejmenších čtverců. Spočtěte velikost chyby v ℓ_2 normě.

   (1) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$ (3) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ (3) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ i & 0 & 0 \end{array}\right)$