Maticový počet, cvičení 4

1. Nalezněte matice projekcí P_U^V, P_V^U.

   (a)
   $$U = span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad V = span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

   (b)
   $$U = span\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad V = span\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

2. Dokažte, že následující matice P jsou projekce. Nalezněze nějakou bázi prostorů U, V, kde $P = P_U^V$.

   $$(a) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (b) \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, (c) \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. V následujících případech rozhodněte, zda příslušná matice A existuje, a pokud ano, nalezněte nějaký příklad takové matice.

   (a) A je Hermitovská i antihermitovská,

   (b) A je involuce, unitární, ale není Hermitovská,

   (c) A je projekce, ale není regulární,

   (d) A je unitární, ale není projekce,

   (e) A je součinem dvou projekcí, ale není projekce,

   (f) A je involuce, ale není unitární,

   (g) A je unitární, ale není involuce.

   Hint: Připomeňte si:

   - Hermitovská: $A = A^*$.
   - Projekce: $A^2 = A$, tj. když aplikuji podruhé, nestane se už nic.
   - Involuce: $A^2 = I_n$, tj. po dvou aplikacích se vrátí vektor do původního stavu.
   - Unitární: $A^{-1} = A^* \Leftrightarrow A$ je isometrie pro ℓ_2 normu, tj. nemění velikosti vektorů.

4. Pomocí Householderovy metody nalezněte pro danou matici A horní trojúhelníkovou matici T a unitární matici U tak, že $U \cdot A = T$.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}$$