Maticový počet, cvičení 5

1. Rozhodněte, zda je matice A diagonalizovatelná. Pokud ano, a chce se Vám, matici A diagonalizujte.

$$(a)\quad A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad (b)\quad A=\begin{pmatrix}4&2\\-1&7\end{pmatrix}\quad (c)\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\quad (d)\quad A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$$

$$(e)\quad A=\begin{pmatrix}0&6&3\\-1&5&1\\-1&2&4\end{pmatrix}\quad (f)\quad A=\begin{pmatrix}4&-5&7\\1&-4&9\\-4&0&5\end{pmatrix}\quad (g)\quad A=\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&3\\2&0&6&0\\0&2&0&6\end{pmatrix}$$

2. Spočtěte:

$$(a)\quad A^{57}\text{ pro }A=\begin{pmatrix}3&4\\0&2\end{pmatrix},\quad (b)\quad A^{94}\text{ pro }A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

3. Nechť $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná matice. Dokažte, že A je projekce právě tehdy, když každé vlastní číslo A je buď 0 nebo 1.

4. Dokažte, že neexistuje žádná nenulová diagonalizovatelná nilpotentní matice (čtvercová matice A se nazývá nilpotentní, pokud existuje $k\in\mathbb{N}$ takové, že matice A^k je nulová).

5. Pomocí Geršgorinovy věty odhadněte pozici vlastních čísel matice

$$A=\begin{pmatrix}2&0&3i\\0&3&\frac{1}{2}\\1&0&4\end{pmatrix}.$$

   Lze z tohoto odhadu usoudit, že A je regulární?

6. Pomocí Geršgorinovy věty ukažte, že matice $A=\begin{pmatrix}5+4i&2&4i\\1-i&4&2\\2+i&3&-6\end{pmatrix}$ je regulární.