Maticový počet, cvičení 7

1. Rozhodněte, zda jsou následující matice pozitivně definitní, nebo alespoň pozitivně semidefinitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 20 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 4 & i \\ 4 & 5 & 2 \\ i & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 5 & 1+i & 2-i \\ 1-i & 4 & 1+2i \\ 2+i & 1-2i & 6 \end{pmatrix}$$

2. Nalezněte Choleského rozklad (pokud existuje) pro následující matice.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5 \cdot I_n \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 4 & 2+2i & 2 \\ 2-2i & 11 & 1-4i \\ 2 & 1+4i & 11 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 9 & 3-3i & 3+6i \\ 3+3i & 6 & -1+i \\ 3-6i & -1-i & 22 \end{pmatrix}.$$

3. Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $(A|\vec{b})$, kde

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & 27 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

4. Dokažte:

   (1) Matice $A = (a) \in \mathbb{F}^{1\times 1}$ je pozitivně definitní (resp. pozitivně semidefinitní) právě tehdy, když $a > 0$ (resp. $a \geq 0$).

   (2) Pokud matice $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ je pozitivně semidefinitní a $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ je libovolná matice, potom matice $C = B^* \cdot A \cdot B$ je pozitivně semidefinitní. Pokud A je pozitivně definitní a B je regulární, potom C je pozitivně definitní.

   (3) Pokud $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ je blokově diagonální a každá z podmatic na její diagonále je pozitivně definitní, potom A je pozitivně definitní.

5. Rozhodněte o platnosti výroků:

   (1) Součet pozitivně definitních matic je pozitivně definitní.

   (2) Součet pozitivně definitní matice a pozitivně semidefinitní matice je pozitivně definitní.

   (3) Součin pozitivně definitních matic je pozitivně definitní.

   (4) Pokud je matice pozitivně definitní, potom má kladná čísla na diagonále.

   (5) Pokud existuje matice B taková, že $A \cdot B$ je pozitivně definitní, potom A je regulární.

   (6) Pokud A je antihermitovská, potom $I + A$ je regulární.

   (7) Pokud U je unitární, potom $|\det(U)| = 1$.

   (8) Pokud $|\det(U)| = 1$, potom U je unitární.