Maticový počet, cvičení 11

1. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$:
   - Ověřte, že A je nilpotentní, a nalezněte stupeň nilpotence A.
   - Pro každou z funkcí $f(x) \in \{e^x, \sin(x), \cos(x), tg(x), cotg(x), \sqrt{x}\}$:
     (a) Rozhodněte, zda je $f(A)$ definována,
     (b) pokud ano, nalezněte Hermiteův interpolační polynom H takový, že $H(A) = f(A)$, a pomocí něj spočtěte $f(A)$.
     (c) Pokud znáte rozvoj funkce f do mocninné řady, ověřte, že váš výsledek souhlasí s vyjádřením $f(A)$ pomocí mocninné řady.

2. Spočtěte e^A pro $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$, kde $a + b \neq 0$.

3. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ spočtěte $f(A)$ a $g(A)$, kde $f(z) = \sqrt{z}$, $g(z) = \frac{1}{z}$.
   Ověřte přímým výpočtem, že $A = f(A)^2$ a $A \cdot g(A) = I_4$.

4. Pro následující matice A ověřte, zda je definována $\sqrt{A}$ (odmocninu chápeme jako reálnou funkci, tedy definovanou na intervalu $[0, \infty)$). Hint: není vždy třeba počítat vlastní čísla.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ (b) A je libovolná pozitivně definitní matice, (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 7 \\ -5 & 9 & 5 \\ -2 & 1 & -8 \end{pmatrix}$, $(e)^*$ A je libovolná nenulová nilpotentní matice

5. Ověřte, že pro diagonalizovatelnou matici A platí $\cos^2(A) + \sin^2(A) = I_n$.

6. Ukažte, že komplexní funkce je definována v A právě tehdy, když je definována v A^T. Platí to i pro A^*?

7. Dokažte, že $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.