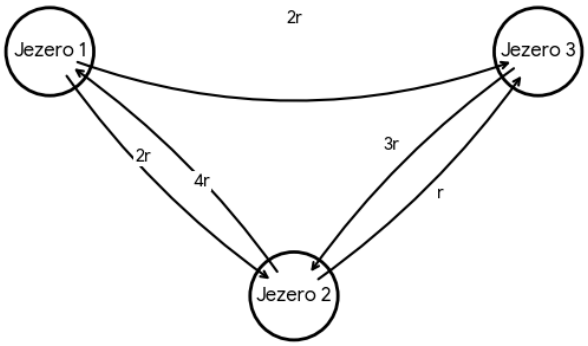
Maticový počet, cvičení 12

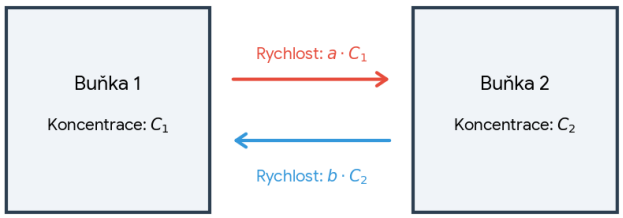
1. **Tři jezera.** Jezero č. i v uzavřeném systému tří jezer o stejném objemu V zpočátku obsahuje c_i m^3 rovnoměrně rozprostřené znečišťující látky. Určete množství znečišťující látky v každém jezeře v čase $t > 0$ a poté určete vývoj znečištění v každém jezeře z dlouhodobého hlediska. Voda v systému jezer cirkuluje dle obrázku níže (tedy, například z jezera 2 do jezera 1 teče $4r$ m^3/s vody).



Obrázek 1: Tři jezera

2. **Problém difúze.** Důležité otázky v medicíně a biologii zahrnují otázku, jak se léky nebo chemické sloučeniny pohybují z jedné buňky do druhé pomocí difuze přes buněčné stěny. Uvažujme dvě buňky, které obě obsahují určitou sloučeninu. Jednotkové množství sloučeniny je vstříknuto do první buňky v čase $t = 0$ a s postupem času sloučenina difunduje podle následujícího předpokladu:

   V každém časovém bodě je rychlost (množství za sekundu) difuze z jedné buňky do druhé úměrná množství sloučeniny v buňce, která sloučeninu uvolňuje – řekněme, že rychlost difuze z buňky 1 do buňky 2 je a krát množství v buňce 1 a rychlost difuze z buňky 2 do buňky 1 je b krát množství v buňce 2. Předpokládejme, že $a, b > 0$.



Obrázek 2: Problém difúze

Problém: Určete množství sloučeniny v každé buňce v libovolném daném čase t a, pokud se proces v dlouhodobém horizontu ústálí, popište tento ustálený stav.

3. **Model Predátor-Kořist**. Uvažujme dva druhy, z nichž jeden je predátor a druhý je kořist, a předpokládejme, že v každé populaci je zpočátku 100 jedinců. Nechť $u_1(t)$ a $u_2(t)$ označují množství jedinců v příslušné populaci predátora (resp. kořisti) v čase t a předpokládejme, že jejich tempo růstu je dáno vztahem

$$u_1' = u_1 + u_2,$$
$$u_2' = -u_1 + u_2.$$

Problém: Určete velikost každé populace ve všech budoucích časech a rozhodněte, zda (a kdy) kterákoli z populací nakonec vyhyne.

4. **Soutěžící druhy.** Uvažujme dva druhy, které koexistují ve stejném prostředí, ale soutěží o stejné zdroje. Předpokládejme, že populace každého druhu roste úměrně k počtu jedinců jeho druhu, ale klesá úměrně k počtu jedinců v konkurenčním druhu – řekněme, že populace každého druhu roste rychlostí rovnou dvojnásobku jeho stávajícího počtu, ale klesá rychlostí rovnou počtu jedinců v druhé populaci. Předpokládejme, že zpočátku existuje 100 druhů I a 200 druhů II.

   (a) Určete počet jedinců každého druhu ve všech budoucích časech.

   (b) Určete, který (pokud nějaký) druh je předurčen k vyhynutí, a vypočítejte dobu do vyhynutí.

5. **Spolupracující druhy.** Uvažujme dva druhy, které přežívají v symbiotickém vztahu v tom smyslu, že populace každého druhu klesá rychlostí rovnou jeho stávajícímu počtu, ale roste rychlostí rovnající se stávajícímu počtu v druhé populaci.

   (a) Pokud je zpočátku 200 druhů I a 400 druhů II, určete počet každého druhu ve všech budoucích časech.

   (b) Diskutujte dlouhodobý vývoj populace každého druhu.

6. Pouze s použitím vlastních čísel rozhodněte o dlouhodobém chování řešení soustav $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$, $\vec{u}(0) = \vec{c}$, pro každou z následujících matic.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (d) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Nalezněte řešení soustavy $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$, $\vec{u}(0) = \vec{c}$ a rozhodněte, zda je řešení stabililní, semistabilní, nebo nestabilní, pokud

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$