Maticový počet, cvičení 8

1. Pro následující matice A a vektory $\vec{b}$:
   - nalezněte SVD rozklad matice A,
   - zapiště matici A v dyadickém rozvoji,
   - aproximujte matici A maticemi nižších hodností, a spočtěte relativní změnu matice,
   - nalezněte pseudoinverzi A,
   - naleněte (přibližné, pokud přesné neexistuje) řešení $\vec{x}$ soustavy $(A|\vec{b})$ s minimální ℓ_2 normou,
   - spočtěte spektrální a Frobeniovu normu A, a, pokud A je regulární matice, čísla podmíněnosti $\kappa_2(A)$ a $\kappa_F(A)$.

$$(a)\quad A=\begin{pmatrix}-4 & -6\\ 3 & -8\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-42\\ -31\end{pmatrix},\quad (b)\quad A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-6\\ 4\end{pmatrix}$$

$$(c)\quad A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & -6\\ 4 & -8\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad (d)\quad A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 10 & 2\\ 10 & -4\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}15\\ 5\\ 10\end{pmatrix}$$

$$(e)\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 2\end{pmatrix}.$$

2. Dokažte: Singulární hodnoty normální matice jsou rovny absolutním hodnotám jejích vlastních čísel.
   Hint: Použijte unitární diagonalizaci.

3. Ukažte, že pro každou matici $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ platí $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} |\sigma_i|^2}$, kde $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ jsou singulární hodnoty matice A.
   Hint: Použijte vztah $\|A\|_F = \sqrt{tr(A^* \cdot A)}$.

4. Ukažte, že pro matici $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ platí

$$A^+ = \begin{cases} \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}, & \text{pokud } rank(A)=2,\\ \frac{1}{|a|^+|b|^2+|c|^2+|d|^2}\begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{c}\\ \overline{b} & \overline{d}\end{pmatrix}, & \text{pokud } rank(A)=1,\\ O_{2\times 2}, & \text{pokud } rank(A)=0. \end{cases}$$

   .

5. Ukažte, že pro matici $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ hodnosti 1 platí $A^+ = \frac{A^*}{Tr(A^*\cdot A)} = \frac{A^*}{\|A\|_F^2} = \frac{A^*}{\|A\|_2^2}$.

6. Ukažte, že pro matici $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ hodnosti n platí $A^+ = (A^* \cdot A)^{-1} \cdot A^*$.

7. Dokažte následující tvrzení, které ukazuje na nestabilitu pojmu pseudoinverze.

   Ukažte, že pokud pro $t \geq 0, A(t) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}$, potom $\lim_{t\to 0^+} A(t) = A(0)$ (konvergence se myslí po souřadnicích), ale $\lim_{t\to 0^+} A(t)^+ \neq A(0)^+$.