Maticový počet, výsledky 2

1. $\|\vec{u}\|_1 = 9$, $\|\vec{u}\|_2 = 5$, $\|\vec{u}\|_\infty = 4$, $\|\vec{v}\|_1 = 5 + 2\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{21}$, $\|\vec{v}\|_\infty = 4$.

2. ℓ_1 norma: čtverec s vrcholy $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

   ℓ_2 norma: jednotková kružnice

   ℓ_∞ norma: čtverec s vrcholy $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

   Pro vizualizaci jednotkových sfér těchto i jiných ℓ_p norem (v $\mathbb{R}^3$) lze využít například tento odkaz.

3. (a) ne,
   (b) ano,
   (c) ano,
   (d) ne,
   (e) ne,
   (f) ano,
   (g) ano,
   (h) ne,
   (i) ano.

4. Nechť $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ je množina všech indexů i takových, že $\|\vec{x}\|_\infty = |x_i|$, a $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$. Nechť $|I|$ značí počet prvků množiny I. Množina I je neprázdná, zvolme tedy libovolné $i_0 \in I$. Potom platí

$$\|\vec{x}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = |x_{i_0}| \cdot \left(\sum_{i\in I}\left|\frac{x_i}{x_{i_0}}\right|^p + \sum_{j\in J}\left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |x_{i_0}| \cdot \Big(|I| + \sum_{j\in J}\left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \to |x_{i_0}| = \|\vec{x}\|_\infty .$$

5. Požadované nerovnosti plynou z toho, že pro každé $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$ platí

$$(\max_{i=1,\dots,n} |x_i|)^2 = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \le (\sum_{i=1}^{n} |x_i|)^2.$$

6. (a) Pokud pro každé $\vec{v} \in V$ platí

$$C_1 \|\vec{v}\|_a \le \|\vec{v}\|_b \le C_2 \|\vec{v}\|_a ,$$

   potom také platí

$$\frac{1}{C_2} \|\vec{v}\|_b \le \|\vec{v}\|_a \le \frac{1}{C_1} \|\vec{v}\|_b .$$

   (b) Pokud pro každé $\vec{v} \in V$ platí

$$C_1 \|\vec{v}\|_a \le \|\vec{v}\|_b \le C_2 \|\vec{v}\|_a \text{ a } D_1 \|\vec{v}\|_b \le \|\vec{v}\|_c \le D_2 \|\vec{v}\|_b ,$$

   potom také

$$C_1 D_1 \|\vec{v}\|_a \le \|\vec{v}\|_c \le C_2 D_2 \|\vec{v}\|_a .$$

7. Myšlenka je tato: Zvolme libovolný isomorfismus $T\colon V \to \mathbb{F}^n$. Nejprve, lze snadno ukázat, že pokud $\|\cdot\|$ je libovolná norma na V, potom zobrazení $\|\cdot\|^T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \big\|T^{-1}\vec{x}\big\|$, je norma na $\mathbb{F}^n$. Potom už není těžké si uvědomit, že pokud máme dvě normy $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ na V takové, že $\|\cdot\|_a^T, \|\cdot\|_b^T$ jsou ekvivalentní, potom jsou ekvivalentní i normy $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$.

8. (a) $\frac{51}{7}$
   (b) ∞
   (c) $\frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2}{|ad-bc|}$, pokud $ad-bc \neq 0$, jinak ∞
   (d) $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{6}$.

9. Řešení soustavy $(A|\vec{b}_1)$ je evidentně $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Řešení soustavy $(A|\vec{b}_2)$ je

   $$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}_2 = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 2+10^{-6} & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3-499 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} = 10^6 \begin{pmatrix} 6+3 \cdot 10^{-6} - 6 + 988 \cdot 10^{-6} \\ -3+3-499 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1001 \\ -499 \end{pmatrix}.$$

   Číslo podmíněnosti je $\kappa_F(A) = \left(1+4+1+(2+10^{-6})^2\right) \cdot 10^6 \approx 10^7$.