Maticový počet, výsledky 3

1. Vlastnost $(S1)$: platí $\overline{\langle B, A\rangle} = \overline{tr(B^* \cdot A)} = tr((B^* \cdot A)^*) = tr(A^* \cdot B) = \langle A, B\rangle$.
   Vlastnost $(S2)$ plyne z vlastností maticového násobení a linearity zobrazení $A \mapsto tr(A)$.
   Vlastnost $(S3)$: Pokud $A \neq O_{n\times n}$, potom má A alespoň jeden nenulový řádek, a ten má tedy kladnou ℓ_2 normu. Platí tedy také $\langle A, A\rangle = tr(A^* \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} \|A_{i*}\|_2^2 > 0$.

2. (i) ne
   (ii) ne
   (iii) ne
   (iv) ne
   (v) ne
   (vi) ano
   (vii) ne
   (viii) ano
   (ix) ano

3. (i) ne, rovnoběžníkové pravidlo neplatí například pro kanonické vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}$,
   (ii) ne, rovnoběžníkové pravidlo neplatí například pro kanonické vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}$,
   (iii) ano.

4. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

   (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (3) $\begin{pmatrix} 3 & 4+3i \\ 0 & -12 \\ 4 & -1+12i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{5}{13} \\ 0 & \frac{-12}{13} \\ \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5+15i \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$

   (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (5) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

   (6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i \\ 1+i & 3 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{2} & i \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}(1-i) & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (7) $\begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{12}{25} & \frac{-32}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-9}{25} & \frac{24}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

5. (1) Přibližné řešení je $\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$. Chyba je

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Velikost chyby je v ℓ_2 normě je 2.

(2) Přibližné řešení je $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Chyba je

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Velikost chyby je v ℓ_2 normě je $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) Přibližné řešení je $\begin{pmatrix} \frac{2-i}{3} \\ \frac{2-2i}{3} \end{pmatrix}$. Chyba je

$$\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} + \frac{i}{3} \\ \frac{-1}{3} + \frac{-2i}{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{2i}{3} \end{pmatrix}.$$

Velikost chyby je v ℓ_2 normě je $\frac{\sqrt{15}}{3}$.