Maticový počet, výsledky 5

1. (a) Jediné vlastní číslo je 1, má algebraickou násobnost 2. $eigen(1,A) = span\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, tedy $gn_A(1) = 1$, a A není diagonalizovatelná.

   (b) $\sigma(A) = \{5,6\}$, A je tedy diagonalizovatelná. Dále $eigen(5,A) = span\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $eigen(6,A) = span\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, a tedy
   $$A = \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0\\0&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}.$$

   (c) $\sigma(A) = \{i,-i\}$, A je tedy diagonalizovatelná. Dále $eigen(i,A) = span\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, $eigen(-i,A) = span\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$, a tedy
   $$A = \begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}^{-1}.$$

   (d) Nejprve spočteme charakteristický polynom. Platí
   $$p_A(x) = det(A - x\cdot E_3) = \begin{vmatrix}-x&1&0\\-4&4-x&0\\-2&1&2-x\end{vmatrix} = -x(8-6x+x^2)+4(2-x) = -x^3+6x^2-12x+8 = (x-2)^3.$$
   Máme tedy jediné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$, má algebraickou násobnost 3.
   Nalezneme příslušný vlastní podprostor. Máme
   $$eigen(2,A) = ker(A-2\cdot E_3) = ker\left(\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\right) = ker\left(\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right) = span\Big(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Big).$$
   Geometrická násobnost vlastního čísla 2 je tedy 2, a je tedy jiná, než algebraická násobnost, což znamená, že A není diagonalizovatelná.

   (e) Jediné vlastní číslo je $\lambda = 3$, $an_A(\lambda) = 3$, $eigen(\lambda,A) = span\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, tedy $gn_A(\lambda) = 2$, a A tedy není diagonalizovatelná.

   (f) $\sigma(A) = \{1, 2+3i, 2-3i\}$, A je tedy diagonalizovatelná.

   (g) Nejprve spočteme charakteristický polynom. Platí
   $$p_B(x) = det(B - x\cdot E_4) = \begin{vmatrix}1-x&0&3&0\\0&1-x&0&3\\2&0&6-x&0\\0&2&0&6-x\end{vmatrix}.$$
   Tento determinant nejsnáze spočteme asi rozvojem podle některého řádku nebo sloupce. Proveďme tedy například rozvoj podle prvního sloupce:
   $$\begin{vmatrix}1-x&0&3&0\\0&1-x&0&3\\2&0&6-x&0\\0&2&0&6-x\end{vmatrix} = (1-x)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1-x&0&3\\0&6-x&0\\2&0&6-x\end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0&3&0\\1-x&0&3\\2&0&6-x\end{vmatrix} =$$
   $$= (1-x)^2(6-x)^2 - 6(1-x)(6-x) + 2\cdot 18 - 6(1-x)(6-x) = ((1-x)(6-x)-6)^2 =$$
   $$= (x^2-7x+6-6)^2 = x^2(x-7)^2$$

Dostaneme tedy vlastní čísla $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 7$, obě mají algebraickou násobnost 2.
Nyní nalezneme příslušné vlastní podprostory. Nejprve pro vlastní číslo 0 dostaneme

$$eigen(0, B) = ker(B) = ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right) = ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = span\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pro vlastní číslo 7 dostaneme

$$eigen(7, B) = ker(B - 7 \cdot E_4) = ker\left(\begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = ker\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Geometrické násobnosti obou vlastních čísel jsou tedy 2, a tedy jsou rovné násobnostem algebraickým. Matice B tedy je diagonalizovatelná. Označme

$$X = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

uspořádanou bázi $\mathbb{R}^4$ tvořenou vlastními vektory matice B. Potom platí

$$B = T_{X \to E_4} \cdot [B]_{X \to X} \cdot T_{E_4 \to X} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

2. (a) Opět nejprve spočteme charakteristický polynom. Platí

$$p_A(x) = det(A - x \cdot E_2) = \begin{vmatrix} 3 - x & 4 \\ 0 & 2 - x \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Dostaneme tedy vlastní čísla $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$, obě mají algebraickou násobnost 1.
Nyní nalezneme příslušné vlastní podprostory. Nejprve pro vlastní číslo 2 dostaneme

$$eigen(2, A) = ker(A - 2 \cdot E_2) = ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = span\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pro vlastní číslo 3 platí

$$eigen(3, A) = ker(A - 3 \cdot E_2) = ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Tedy, $X = \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^2$ tvořena vlastními vektory matice A, a platí

$$A = T_{X \to E_2} \cdot [A]_{X \to X} \cdot T_{E_2 \to X} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tedy,

$$A^{57} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{57} & 0 \\ 0 & 3^{57} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 2^{57} & 3^{57} \\ 2^{57} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{57} & -4 \cdot 2^{57} + 4 \cdot 3^{57} \\ 0 & 2^{57} \end{pmatrix}.$$

(b) $A^{94} = \begin{pmatrix} 0 & -2^{47} \\ 2^{47} & 0 \end{pmatrix}$.

3. Jelikož A je diagonalizovatelná, můžeme nalézt diagonální matici $B = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A, a regulární matici $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že platí $A = T^{-1} \cdot B \cdot T$. Potom, rovnost $A^2 = A$ je ekvivalentní rovnosti
$$T^{-1} \cdot B^2 \cdot T = T^{-1} \cdot B \cdot T,$$
což, přenásobením maticí T zleva a maticí T^{-1} zprava je ekvivalentní rovnosti $B^2 = B$. Jelikož $B^2 = diag(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$, toto je ekvivalentní rovnostem $\lambda_i^2 = \lambda_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, což znamená to samé, jako že všechna vlastní čísla A jsou buď 0 nebo 1.

4. Důkaz provedeme tak, že budeme předpokládat, že $A \in \mathbb{F}^n$ je diagonalizovatelná nilpotentní matice, a dokážeme, že A je nutně nulová. Jelikož A je diagonalizovatelná, exituje diagonální matice $B = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ a regulární matice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že platí $A = T^{-1} \cdot B \cdot T$. Jelikož A je nilpotentní, existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že platí
$$A^k = T^{-1} \cdot B^k \cdot T = O_{n \times n}.$$
Přenásobením maticí T zleva a maticí T^{-1} zprava dostaneme, že $B^k = O_{n \times n}$. Jelikož $B^k = diag(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_n^n)$, dostaneme, že $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, a tedy, také matice B je nulová. Tedy, platí také
$$A = T^{-1} \cdot B \cdot T = T^{-1} \cdot O_{n \times n} \cdot T = O_{n \times n},$$
což jsme chtěli ukázat.

5. Ano.

6. $|5 + 4i| = \sqrt{41} > 6 = |2| + |4i|$, $|4| = 4 > 2 + \sqrt{2} = |2| + |1 - i|$, $|-6| = 6 > 3 + \sqrt{5} = |3| + |2 + i|$.