Maticový počet, výsledky 7

1. A je PD, B je PSD, C je PD, D je PSD, E nic, není Hermitovská, F nic, G je PD, zde se dají dobře použít Geršgorinovy kruhy k odhadu, že $\sigma(G) \subseteq (0, \infty)$, což spolu s Hermitovskostí dává, že G je PD

2.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5 \cdot I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O_{n\times n} \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ O_{n\times n} & 2I_n \end{pmatrix}$$

Choleského rozklad D neexistuje, D není PD

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 2+2i & 2 \\ 2-2i & 11 & 1-4i \\ 2 & 1+4i & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1-i & 3 & 0 \\ 1 & i & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 1 \\ 0 & 3 & -i \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$F = \begin{pmatrix} 9 & 3-3i & 3+6i \\ 3+3i & 6 & -1+i \\ 3-6i & -1-i & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1+i & 2 & 0 \\ 1-2i & i & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1-i & 1+2i \\ 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. (a)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R^* \cdot R,$$
řešení $(R^*|\vec{b})$ je $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, řešení $(R|\vec{y})$ je $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = R^* \cdot R,$$
řešení $(R^*|\vec{b})$ je $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, řešení $(R|\vec{y})$ je $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. (1) Je snadné, že $\forall x \in \mathbb{F}$, $x^* a x = |x|^2 a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$, a pro nenulové x platí ostré nerovnosti právě tehdy, když $a > 0$.

   (2) Pokud A je PSD, pak pro $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$ je
$$\vec{x}^* \cdot C \cdot \vec{x} = \vec{x}^* \cdot B^* \cdot A \cdot B \cdot \vec{x} = (B \cdot \vec{x})^* \cdot A \cdot (B \cdot \vec{x}) \geq 0,$$
   tedy C je PSD. Pokud B je navíc regulární, potom pro nenulové $\vec{x}$ platí $B \cdot \vec{x} \neq 0$, a tedy $\vec{x}^* \cdot C \cdot \vec{x} = (B \cdot \vec{x})^* \cdot A \cdot (B \cdot \vec{x}) > 0$, pokud A je PD.

(3) Stačí to dokázat pro 2 bloky a použít indukci. Pokud $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$ pro $B \in \mathbb{F}^{k\times k}, C \in \mathbb{F}^{(n-k)\times(n-k)}$, potom požadované tvrzení plyne z toho, že pro libovolné $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$, označíme-li $\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ platí

$$\vec{x}^* \cdot A \cdot \vec{x} = \vec{y}^* \cdot B \cdot \vec{y} + \vec{z}^* \cdot C \cdot \vec{z}.$$

5. (1) Ano, neboť $(A+B)^* = A^* + B^*$, a $\vec{x}^* \cdot (A+B) \cdot \vec{x} = \vec{x}^* \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{x}^* \cdot B \cdot \vec{x}$.

(2) Ano, analogicky jako výše.

(3) Ne, součin nemusí být ani Hermitovská matice, například pro $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(4) Ano, to plyne toho, že pro všechny kanonické vektory $\vec{e}_i$ je $\vec{e}_i^* \cdot A \cdot \vec{e}_i > 0$.

(5) Ano, protože to, že $A \cdot B$ je regulární implikuje, že A je regulární.

(6) Ano, protože $(I+A)\cdot(I-A) = I + A^*A$ je pozitivně definitní dle (ii), tedy A je regulární dle (v).

(7) Ano, protože determinant je součinem vlastních čísel, a vlastní čísla unitární matice mají absolutní hodnotu 1.

(8) Ne, například $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.