Maticový počet, výsledky 11

1. A je niloptentní, stupeň nilpotence je 2.

   - e^A existuje. $H(x)$ má splňovat $H(0) = e^0 = 1, H^{'}(0) = (\exp)^{'}(0) = 0$, tedy $H(x) = x + 1$. Tedy $e^A = H(A) = A + I_3$.
   - $\sin(x)$... $\sin(A)$ existuje. $H(x)$ má splňovat $H(0) = \sin(0) = 0, H^{'}(0) = \sin'(0) = \cos(0) = 1$, tedy $H(x) = x$. Tedy $\sin(A) = H(A) = A$.
   - $\cos(A)$ existuje. $H(x)$ má splňovat $H(0) = \cos(0) = 1, H^{'}(0) = \cos'(0) = -\sin(0) = 1$, tedy $H(x) = 1$. Tedy $\cos(A) = H(A) = I_3$.
   - $tg(A)$ existuje. $H(x)$ má splňovat $H(0) = tg(0) = 0, H^{'}(0) = tg'(0) = \frac{1}{\cos^2(0)} = 1$, tedy $H(x) = x$. Tedy $tg(A) = H(A) = A$.
   - $cotg(A)$ neexistuje, neboť $cotg$ není definován v 0
   - $\sqrt{A}$ neexistuje. Odmocnina je sice definovaná v nule, ale nemá tam vlastní derivaci. Jelikož $ind_0(A) = nil(A) = 2$, není $\sqrt{A}$ definována.

2. $$e^A = \frac{1}{a+b} \cdot \begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix} + e^{-a-b} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix},$$
   lze řešit pomocí diagonalizace, nebo spektrálních projekcí.

3. $$\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{64} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

4. (a) Ano, matice je PD, tedy to plyne z (b).
   (b) Ano, PD matice má kladné spektrum, a odmocnina má definováné všechny derivace na intervalu $(0, \infty)$.
   (c) Ano, matice je v Jordanově tvaru, má tedy vlastní čísla 0 a 14, a index vlastního čísla 0 je 1.
   (d) Ne-pomocí Geršgorinových kruhů lze usoudit, že alespoň jedno vlastní číslo neleží v intervalu $[0, \infty)$.
   (e) Ne-jestliže A je nenulová nilpotentní matice, pak není diagonalizovatelná (to bylo v pátém cvičení). Tedy, jelikož všechna vastní čísla A jsou nulová, je $ind_0(A) \geq 2$, a odmocnina nemá vlastní derivaci v 0.

5. Například pomocí spektrálních projekcí (lze ale také i přímo použít rozklad $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$):
   $$\cos^2(A) + \sin^2(A) = \sum_{j=1}^{k} \cos^2(\lambda_j) G_j + \sum_{j=1}^{k} \sin^2(\lambda_j) G_j = \sum_{j=1}^{k} (\cos^2(\lambda_j) + \sin^2(\lambda_j)) G_j = \sum_{j=1}^{k} G_j = I_n.$$

6. Tvrzení plyne z toho, že $\sigma(A) = \sigma(A^T)$. Pro A^* to neplatí, protože $\sigma(A^*)$ se může lišit od $\sigma(A)$.

7. Pokud $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ je Jordanův tvar A, potom
   $$\det(e^A) = \det(P \cdot e^J \cdot P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(e^J) \cdot \frac{1}{\det(P)} = \det(e^J),$$
   a matice e^J má a diagonále čísla e^λ, kde λ jsou vlastní čísla A, zapsaná včetně algebraických násobností. Tedy
   $$\det(e^J) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (e^\lambda)^{an_A(\lambda)} = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} e^{\lambda \cdot an_A(\lambda)} = e^{\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \cdot an_A(\lambda)} = e^{tr(A)}.$$