Maticový počet, výsledky 12

1. Označíme-li $u_i(t)$ množství znečišťující látky v jezeře i v čase t, ze zadání lze vyvodit soustavu rovnic $\vec{u}' = \frac{r}{V} \cdot A \cdot \vec{u}$, $\vec{u}(0) = \vec{c}$ kde

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Platí $\sigma(A) = \{0, -6\}$, $an_A(0) = 1$, $an_A(-6) = 2$. Matice soustavy má tedy vlastní čísla 0 a $\frac{-6r}{V}$, a 0 má index 1, a tedy soustava je semistabilní. Z toho plyne, že v nekonečnu se buďto množství znečišťující látky v každém jezeře ustálí, nebo bude oscilovat.

Dále, standardním způsobem zjistíme, že vlastní vektor příslušný 0 je například $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vlastní vektor příslušný -6 je například $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dále, vyřešením soustavy $(A+6I_3)\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dostaneme zobecněný vlastní vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dostaneme tedy $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$, kde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Víme, že platí $\vec{u}(t) = e^{t\cdot\frac{r}{V}\cdot A} \cdot \vec{c}$. Matici $e^{t\cdot\frac{r}{V}\cdot A}$ spočteme dosazením komplexní funkce $z \mapsto e^{t\cdot\frac{r}{V}\cdot z}$ do definice funkce matice, a dostaneme

$$e^{t\cdot\frac{r}{V}\cdot A} = P \cdot e^{t\cdot\frac{r}{V}\cdot J} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-6rt}{V}} & \frac{tr}{V}e^{\frac{-6rt}{V}} \\ 0 & 0 & e^{\frac{-6rt}{V}} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Tedy platí

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-6rt}{V}} & \frac{tr}{V}e^{\frac{-6rt}{V}} \\ 0 & 0 & e^{\frac{-6rt}{V}} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{c},$$

a

$$\lim_{t\to\infty} \vec{u}(t) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 \end{pmatrix},$$

a tedy množství znečišťující látky v každém jezeře ustálí na stejné úrovni (nehledě na počáteční množství v každém z jezer).

2. Pokud $u_i(t)$ značí množství sloučeniny v buňce i v čase t, máme soustavu $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$, $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$. Tedy $\vec{u}(t) = e^{t\cdot A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Podobně jako v příkladu 2 ze cvičení 11 máme

$$e^{t\cdot A} = \frac{1}{a+b} \cdot \Big(\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix} + e^{(-a-b)\cdot t} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix} \Big),$$

a tedy $u_1(t) = \frac{1}{a+b}(b + ae^{(-a-b)\cdot t})$, $u_2(t) = \frac{a}{a+b}(1 - e^{(-a-b)\cdot t})$. V nekonečnu se tedy množství ustálí na hodnotách $\lim_{t\to\infty} u_1(t) = \frac{b}{a+b}$, $\lim_{t\to\infty} u_2(t) = \frac{a}{a+b}$.

3. Máme soustavu $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$, $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix}$, kde $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$. Matice A má vlastní čísla $1+i, 1-i$, je tedy diagonalizovatelná, a soustava je nestabilní. Spektrální projekce matice A splňují

$$G_1 = \frac{A-(1-i)I_2}{(1+i)-(1-i)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}, \quad G_2 = I_2 - G_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\vec{u}(t) = e^{t\cdot A}\cdot\begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix} = e^{(1+i)t}\cdot\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}50\\50\end{pmatrix} + e^{(1-i)t}\cdot\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}50\\50\end{pmatrix} =$$
$$= 50e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1-i\\1+i\end{pmatrix} + 50e^{(1-i)t}\begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix} = 50e^t\Big((\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix}1-i\\1+i\end{pmatrix} + (\cos t - i\sin t)\begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix}\Big) =$$
$$= 100e^t\begin{pmatrix}\cos t + \sin t\\ \cos t - \sin t\end{pmatrix}.$$

Soustava je sice nestabilní, ale, jelikož v konečném čase $t = \frac{\pi}{4}$ se $u_2(t)$ dostane do 0, populace kořisti je odsouzena k vyhynutí.

4. Máme soustavu $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$, $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}$, kde $A = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$. Matice A má vlastní čísla $1, 3$, je tedy diagonalizovatelná, a soustava je nestabilní. Spektrální projekce matice A splňují

$$G_1 = \frac{A-(3)I_2}{1-3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \quad G_2 = I_2 - G_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\vec{u}(t) = e^{t\cdot A}\cdot\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix} = (e^t G_1 + e^{3t}G_2)\cdot\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}150e^t - 50e^{3t}\\150e^t + 50e^{3t}\end{pmatrix}.$$

Druh 1 tedy vyhyne v čase t splňujícím $150e^t - 50e^{3t} = 0$, tj. $t = \log\sqrt{3}$.

5. Máme soustavu $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$, $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix}200\\400\end{pmatrix}$, kde $A = \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$. Matice A má vlastní čísla $0, -2$, je tedy diagonalizovatelná, a soustava je stabilní. Spektrální projekce matice A splňují

$$G_1 = \frac{A+2I_2}{0+2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \quad G_2 = I_2 - G_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\vec{u}(t) = e^{t\cdot A}\cdot\begin{pmatrix}200\\400\end{pmatrix} = (G_1 + e^{-2t}G_2)\cdot\begin{pmatrix}200\\400\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}300 - 100e^{-2t}\\300 + 100e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

Z dlouhodobého hlediska se tedy obě populace ustálí na 300 jedincích.

6. (a) řešení konverguje k 0,
   (b) řešení neomezeně roste
   (c) řešení osciluje
   (d) řešení neomezeně roste

7. (a)
$$\vec{u}(t) = e^{t\cdot A}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-t} & t\cdot e^{-t} & \frac{t^2\cdot e^{-t}}{2}\\ 0 & e^{-t} & t\cdot e^{-t}\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix} = \cdot\begin{pmatrix}3e^{-t} + 2te^{-t} - 5\frac{t^2\cdot e^{-t}}{2}\\ 2e^{-t} - 5te^{-t}\\ -5e^{-t}\end{pmatrix},$$

soustava je stabilní.

(b) Platí $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = O_{4\times 4}$, a tedy

$$\vec{u}(t) = e^{t\cdot A} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (I_4 + t \cdot A + \frac{t^2 \cdot A^2}{2}) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2t+1 \\ 4t^2 - t + 4 \end{pmatrix},$$

soustava je nestabilní.