Maticový počet, výsledky 8

1.

(*a*) $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} + 5 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad \frac{\|A - A_1\|_F}{\|A\|_F} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad A_2 = A, \quad A^+ = A^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, jde o přesné řešení,

$\|A\|_2 = 10, \|A\|_F = \sqrt{125}, \kappa_2(A) = 2, \kappa_F(A) = 2,5$

(*b*) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot I_3 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\|A - A_1\|_F}{\|A\|_F} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad A_2 = A, \quad A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, jde o přesné řešení,

$\|A\|_2 = 3, \|A\|_F = \sqrt{10},$ matice není regulární

(*c*) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$ jde o matici hodnosti 1

$A_1 = A, \quad A^+ = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix},$

$\vec{x} = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$, jde o přibližné řešení,

$\|A\|_2 = \|A\|_F = 5 \cdot \sqrt{5},$ matice není regulární

(*d*) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\|A - A_1\|_F}{\|A\|_F} = \frac{6}{\sqrt{261}}, \quad A^+ = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 10 & 5 & -10 \end{pmatrix},$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}$, jde o přibližné řešení,

$\|A\|_2 = 15, \|A\|_F = \sqrt{261},$ matice není regulární

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\|A - A_1\|_F}{\|A\|_F} = \sqrt{\frac{1}{3}}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}, \quad \frac{\|A - A_2\|_F}{\|A\|_F} = \sqrt{\frac{1}{6}},$

$A^+ = A^{-1}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, jde o přesné řešení,

$\|A\|_2 = 2, \|A\|_F = \sqrt{6}, \kappa_2(A) = 2, \kappa_F(A) = \frac{3}{2}\sqrt{6}$

2. A je normální, tedy unitárně diagonalizovatelná, lze tedy psát $A = UDU^*$ pro nějakou unitární matici U a diagonální matici D. Potom $A^* \cdot A = U \cdot D^* \cdot U^* \cdot U \cdot D \cdot U^* = U \cdot D^* \cdot D \cdot U^*$. Singulární čísla A jsou odmocniny z nenulových vlastních čísel matice $A^* \cdot A$. Vlastní čísla této matice jsou ale prvky na diagonále diagonální matice $D^* \cdot D$, což jsou čísla $\overline{\lambda} \cdot \lambda = |\lambda|^2$ pro $\lambda \in \sigma(A)$.

3. Pokud $A = U \cdot D \cdot V^*$ je SVD rozklad A, potom

$$\|A\|_F = \sqrt{tr(A^* \cdot A)} = \sqrt{tr(V \cdot D^* \cdot D \cdot V^*)},$$

a matice $V \cdot D^* \cdot D \cdot V^*$ má na diagonále čísla $\overline{\sigma_i}\sigma_i[V]_{i*} \cdot [V]^*_{i*} = |\sigma_i|^2$, jelikož V má ON řádky.

4. Pro hodnost 1 to plyne z příkladu 5, ostatní je jasné.

5. Pokud A má hodnost 1, potom má jediné sigunlární číslo λ_1, její SVD rozklad má tvar

$$A = U \cdot diag_{m\times n}(\sigma_1) \cdot V^*.$$

Dále, $tr(A^* \cdot A) = \|A\|_F^2 = \sigma_1^2 = \|A\|_2^2$, tedy

$$A^+ = V \cdot diag_{n\times m}(\frac{1}{\sigma_1}) \cdot U^* = \frac{1}{\sigma_1^2} \cdot V \cdot diag_{n\times m}(\sigma_1) \cdot U^* = \frac{1}{\sigma_1^2}A^* = \frac{A^*}{Tr(A^* \cdot A)}.$$

6. Platí $rank(A^* \cdot A) = rank(A) = n$, tedy, matice $A^* \cdot A$ je regulární, a tedy má inverzi. Nyní, stačí ověřit, že matice $(A^* \cdot A)^{-1} \cdot A^*$ splňuje podmínky

   (i) $A \cdot A^+ \cdot A = A$,
   (ii) $A^+ \cdot A \cdot A^+ = A^+$,
   (iii) $(A^+ \cdot A)^* = A^+ \cdot A$,
   (iv) $(A \cdot A^+)^* = A \cdot A^+$.

   definující pseudoinverzi.

7. Platí $A(0)^+ = A(0)$, a pro $t \geq 0$ platí $A(t)^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$, tedy $\lim_{t\to 0^+} A(t)^+$ ani neexistuje.