Maticový počet, cvičení 10

1. Pro následující matice A: Pokud je matice diagonalizovatelná, diagonalizujte ji. Pokud ne, převeďte ji do Jordanova kanonického tvaru (inverze netřeba počítat).

$$(a)\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -16 & 9\end{pmatrix},\quad (b)\quad A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -25 & 12\end{pmatrix},\quad (c)\quad A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$(d)\quad A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 3\\ -1 & -2 & -2\end{pmatrix},\quad (e)\quad A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad (f)\quad A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -4\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix},$$

$$(g)\quad A=\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ -6 & 6 & -2\\ 9 & -9 & 3\end{pmatrix},\quad (h)\quad A=\begin{pmatrix}0 & -4 & 1\\ 2 & -6 & 1\\ 4 & -8 & 0\end{pmatrix},$$

2. Spočtěte A^{15} pro:

$$(a)\quad A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}\quad (b)\quad A=\begin{pmatrix}5 & 9\\ -4 & -7\end{pmatrix},\quad (c)\quad A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -10 & 6 & -5\\ -6 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

3. Pro matici $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je vždy možné nalézt takzvaný *reálný Jordanův tvar* A, i pokud má matice A nějaká komplexní vlatsní čísla. Ten vypadá tak, že na diagonále segmentů $B(\lambda_j)$ přísulušných komplexním vlastním číslům $\lambda_j=a+bi$ budou místo skalárů λ_j matice tvaru

$$D(\lambda_j)=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}.$$

Nalezntěte způsob, jak matici $D(\lambda_j)$ umocnit. Hint: Uvažujte $r=\sqrt{a^2+b^2}$, a reprezentujte matici $D(\lambda_j)$ jako r-násobek nějaké vhodně zvolené unitární matice.