Maticový počet, výsledky 10

1. $P^{-1} \cdot A \cdot P = J$, například pro (existuje více možností):

$$(a)\quad J = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)\quad J = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(c)\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (d)\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(e)\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (f)\quad J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(g)\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad (h)\quad J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

2.

$$(a)\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

tedy

$$A^{15} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & 60 \\ -15 & 31 \end{pmatrix}.$$

$$(b)\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

tedy

$$A^{15} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 & 135 \\ -60 & -91 \end{pmatrix}.$$

$$(c)\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -10 & 6 & -5 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1},$$

tedy

$$A^{15} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -10 & 5 & -5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & 15 & -15 \\ -150 & 76 & -75 \\ -90 & 45 & -44 \end{pmatrix}.$$

3. Platí

$$D(\lambda_j) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

pro vhodně zvolený úhel θ. Tedy, $D(\lambda_j)$ je skalární násobek matice rotace o úhel θ, a tedy platí

$$D(\lambda_j)^n = r^n \cdot \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$