Maticový počet, cvičení 1

1. Pro matici A a $k \in \mathbb{N}$ spočtěte A^k, pokud:

   (a)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   (b)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c)
   $$A = \begin{pmatrix} I_3 & B \\ B & I_3 \end{pmatrix},$$

   kde $B \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ je libovolná matice splňující $B = B^{-1}$.

2. Pro matice $A, B, C, D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ a matici
   $$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2n\times 2n}$$
   nalezněte matici $E \cdot E^T$.

3. Pro $m, n \in \mathbb{N}$, regulární matice $A \in \mathbb{F}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, a matici
   $$C = \begin{pmatrix} A & O_{m\times n} \\ O_{n\times m} & B \end{pmatrix}$$
   dokažte, že C je regulární, a nalezněte C^{-1}.

4. Spočtěte následující determinanty:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 4 & 9 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 9 & 0 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$