

ŘEŠENÍ ÚLOH, CVIČENÍ 1

1. Parameterická rovnice je například

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Obecná rovnice je například $2x + 3y = 5$.

2. Průsečíkem může být buďto přímka (přímky jsou stejné), nebo bod (přímky jsou různoběžné), nebo prázdná množina (přímky jsou rovnoběžné).

Pokud uvažujeme více než 2 přímky, situace se nezmění, průnik může být stále jen přímka, bod, nebo prázdná množina.

3. Důkaz lze provést zcela analogicky jako pro obecnou rovnici přímky. Pro spor předpokládejme, že $a = b = c = 0$. Potom množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 = d \right\}$$

je buďto celé $\mathbb{R}^3$ (pokud $d = 0$), nebo prázdná množina (pokud $d \neq 0$), tedy v žádném případě nejde o rovinu, což je spor s předpokladem.

4. Podmínku lze najít více, jedna z nich je například: existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že $c = a + t \cdot (b - a)$.

Jak na to přijít? Skutečnost, že body a, b, c leží na stejné přímce, lze ekvivalentně vyjádřit tak, že bod c leží na přímce určené body a, b . Parametrický tvar přímky určené body a, b je například

$$\{a + t \cdot (b - a) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Bod c tedy leží na přímce určené body a, b právě tehdy, když rovnice $c = a + t \cdot (b - a)$ je splněna pro nějaké $t \in \mathbb{R}$.

5. Soustava má právě jedno řešení, a to $x = 1, y = -1, z = 2$. Jeden z možných postupů je tento:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) &\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} | R_2 \\ | R_1 \\ | R_3 \end{array} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} | R_1 \\ | R_2 - 2R_1 \\ | R_3 - 3R_1 \end{array} \simeq \\ \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} | R_1 \\ | R_2 \\ | 3R_3 - 5R_2 \end{array} \end{aligned}$$

Zpětným dopočtením nyní postupně zjistíme, že $z = 2, y = -1$, a $x = 1$.

6. Chyba je v tomto kroku, v úpravě třetího řádku:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} | R_1 \\ | R_2 - R_3 \\ | \textcolor{red}{R_3} - \textcolor{red}{R_2} \end{array}$$

Jedná se o klasickou chybu, kdy je provedena úprava s řádkem, který se už mezitím změnil. Řádkové úpravy je totiž potřeba provádět postupně. V okamžiku, kdy tuto úpravu provádíme, už má naše matice změněný druhý řádek. Pro názornost jsou tyto dva kroky, provedené správně, rozepsány takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} | R_1 \\ | R_2 - R_3 \\ | R_3 \end{array} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} | R_1 \\ | R_2 \\ | R_3 - R_2 \end{array}$$

Tím bychom ale nedostali to, co chceme. Proto se vždy doporučuje nulovat příslušné souřadnice pomocí řádku, který se v daném kroku nemění (tedy, v tomto konkrétním případě, pomocí prvního řádku). Pokud se Vám nelíbí čísla, která tento řádek, kterým máte zrovna nulovat, obsahuje (například proto, že byste museli použít zlomky), řádky prohoďte.