

ŘEŠENÍ ÚLOH, CVIČENÍ 2

1. (a) Ne, množina není uzavřená na násobení (například, obsahuje 1, ale ne $-1 \cdot 1 = -1$).
- (b) Ne, množina neobsahuje nulový vektor.
- (c) Ano.

Množina zřejmě obsahuje vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ověříme uzavřenost na sčítání: Pokud vektory $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ patří do této množiny, pak $2x_1 + 3y_1 + 4z_1 = 0$ a $2x_2 + 3y_2 + 4z_2 = 0$. Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

tedy také do této množiny patří, neboť platí

$$2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) + 4(z_1 + z_2) = (2x_1 + 3y_1 + 4z_1) + (2x_2 + 3y_2 + 4z_2) = 0 + 0 = 0.$$

Uzavřenost na násobení skalárem se ověří analogicky.

- (d) Ano, reálná čísla obsahují nulu, a součet i součin reálných čísel je opět reálné číslo.
 - (e) Ne, množina reálných čísel není uzavřená na násobení komplexními čísly. Například, číslo 1 je reálné, ale číslo $i \cdot 1 = i$ reálné není.
2. (a) Ano.
 - (b) Ne.

K tomu se dobereme tak, že standartním způsobem zjistíme, zda příslušné soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \\ 9 & -5 & -3 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

mají řešení.

3. (a) Ne, množina není uzavřená na sčítání. Obsahuje například polynomy $x^2 + x$, $-x^2$, ale nikoli jejich součet.
 - (b) Ano. Množina obsahuje nulový polynom, ten má nulové koeficienty u všech mocnin. Součtem dvou polynomů, které mají všechny koeficienty u lichých mocnin nulové, vznikne opět polynom, který má všechny koeficienty u lichých mocnin nulové. A, vynásobíme-li polynom, který má všechny koeficienty u lichých mocnin nulové, reálným číslem, vznikne opět takový polynom.
4. (a) Výrok platí. Je-li $\vec{v}$ nenulový vektor v $\mathbb{R}^2$, potom jeho lineární obal je podle definice roven množině

$$\{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\},$$

což není nic jiného, než parametrický tvar přímky procházející nulou.

- (b) Výrok neplatí. Například, lineární obal vektorů

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^2$ je roven množině

$$\left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (t_1 + t_2) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

je přímka v $\mathbb{R}^2$, nikoli celé $\mathbb{R}^2$.

Výrok by ale platil, pokud by se přidala podmínka, že ani jeden z těchto dvou vektorů není násobkem druhého, tj. vektory by byly takzvaně *lineárně nezávislé*. O tom se dozvíte více na přednášce a na dalším cvičení.

5. (a) Výrok neplatí. Protipříkladem jsou třeba jednobodové množiny

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, N = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, jejichž průnik je prázdná množina (a lineární obal prázdné množiny je nulový vektor), ale jejichž lineární obaly jsou oba rovny stejné přímce

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

(viz příklad 4(a)), takže průnik jejich lineárních obalů je opět tato přímka.

- (b) Výrok neplatí. Protipříkladem jsou třeba jednobodové množiny

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sjednocení jejich lineárních obalů jsou dvě přímky procházející nulou (viz příklad 4(a)), konkrétně jde o standardní souřadnicové osy x, y , ale lineární obal sjednocení těchto dvou množin je celá rovina $\mathbb{R}^2$ (viz příklad 4(b)).

6. Výrok neplatí. Protipříkladem je třeba $L = \mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$ (zde je vhodné si uvědomit, že celý lineární prostor je vždy svým lineárním podprostorem), a M interval $(-1, 1)$. Množina M obsahuje nulu, ale není lineárním podprostorem, neboť není uzavřená ani na sčítání vektorů, ani na násobení skalárem.