

ŘEŠENÍ ÚLOH, CVIČENÍ 3

1. (a) Množina je LN. To plyne z toho, že soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

má pouze nulové řešení.

- (b) Množina je LZ. To plyne z toho, že soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

má nenulové řešení.

- (c) Množina je LZ. Existují totiž skaláry $a, b, c \in \mathbb{R}$, které nejsou všechny nulové, a splňují rovnost

$$a(2x^2 - x + 2) + b(x + 8) + c(x^2 + 5) = \vec{0}.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin na levé a pravé straně rovnosti dostaneme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 5 & 0 \end{array} \right),$$

která má nenulové řešení (kupříkladu $a = -1, b = -1, c = 2$).

2. (a) Ano. Jelikož má množina 3 vektory, je LN (viz příklad 1(a)), a dimenze $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ je 3, je tato množina báze tohoto prostoru.
- (b) Ano. Množina je LN, neboť $\sqrt{3} \neq 0$. A, množina generuje $\mathbb{R}$, protože každý prvek $\mathbb{R}$ je nějaký skalární násobek čísla $\sqrt{3}$.
- (c) Ne. Množina negeneruje $\mathbb{R}$, neboť například číslo 1 není racionálním násobkem čísla $\sqrt{3}$.
- (d) Ano. Postup je zcela analogický jako v příkladu na cvičení.
3. (a) Dimenze je 1 (to platí dokonce pro libovolné těleso $\mathbb{F}$, že dimenze prostoru $\mathbb{F}$ nad $\mathbb{F}$ je 1). Báze je například jednobodová množina $\{1\}$. Je LN, neboť $1 \neq 0$, a generuje $\mathbb{C}$, protože každé komplexní číslo je skalárním násobkem čísla 1.
- (b) Dimenze je 2. Báze je například množina $\{1, i\}$. Je LN, protože ani jedno z čísel $1, i$ nelze zapsat jako reálný násobek toho druhého. Množina generuje $\mathbb{C}$, neboť, jak víte ze střední školy, každé komplexní číslo lze zapsat ve tvaru $a + bi$ pro nějaká reálná čísla a, b .
- (c) Dimenze je $n + 1$. Báze je například množina $\{1, x, \dots, x^n\}$. Je LN, neboť, pokud nějaké skaláry $a_0, a_1, \dots, a_n$ splňují rovnost

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = \vec{0},$$

potom nutně platí $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, protože na pravé straně rovnosti je nulový polynom, a polynomy se rovnají právě tehdy, když se rovnají koeficienty u všech mocnin x .

Množina generuje prostor $\mathbb{R}[x]$, neboť pro každý polynom triviálně platí, že jej lze napsat ve tvaru $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ pro nějaké skaláry $a_0, a_1, \dots, a_n$, tedy, tento polynom je lineární kombinací prvků z množiny $\{1, x, \dots, x^n\}$.

4. Důkaz můžeme provést například sporem. Předpokládejme, že množina $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ je lineárně závislá, tedy existují skaláry $a, b \in \mathbb{F}$ takové, že buď $a \neq 0$, nebo $b \neq 0$, a zároveň platí $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{o}$. Nyní rozebereme dva případy.

(a) Pokud $b = 0$, potom $a \neq 0$. Z rovnosti

$$\vec{o} = a\vec{x} + b\vec{y} = a\vec{x}$$

ale poté plyne $\vec{x} = \vec{o}$, což je spor s předpokladem, že vektor $\vec{x}$ je nenulový.

(b) Pokud $b \neq 0$, potom existuje jeho inverzní prvek b^{-1} , a tedy z rovnosti $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{o}$ plyne $\vec{y} = b^{-1}(-a)\vec{x}$, což je spor s tím, že $\vec{y} \notin \text{span}(\vec{x})$.

V obou případech jsme došli ke sporu, čímž je důkaz dokončen.