

ŘEŠENÍ ÚLOH, CVIČENÍ 4

1. (a) Souřadnice jsou $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Zjistíme je vyřešením soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

- (b) Souřadnice jsou $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Hledáme totiž čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $a(x^2 + 2) + b(x - 2) + c(x^2 + 2x) = 1$. Porovnáním koeficientů u mocnin x^2, x^1 a x^0 dostaneme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

a hledané souřadnice jsou jejím řešením.

- (c) Souřadnice jsou $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ -\frac{7}{10} \end{pmatrix}$. To zjistíme tak, že standartním způsobem převedeme dané komplexní číslo do základního tvaru:

$$\frac{1-2i}{3+i} = \frac{1-2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{1-7i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i.$$

2. (a) Jelikož B je báze L , platí $\dim(L) = 3$. Jelikož seznam C se skládá ze 3 vektorů, k tomu, aby C byla uspořádaná báze L , stačí ověřit, že C je LN. Předpokládejme tedy, že skaláry $a, b, c \in \mathbb{R}$ splňují

$$a\frac{1}{2}\vec{v}_1 + b(2\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + c(\vec{v}_2 - \vec{v}_3) = \vec{o}.$$

Tedy platí

$$\frac{1}{2}a\vec{v}_1 + (2b+c)\vec{v}_2 + (b-c)\vec{v}_3 = \vec{o}.$$

Jelikož B je báze L , je LN, a tedy musí platit $\frac{1}{2}a = 0, 2b+c = 0$, a $b-c = 0$. Tato soustava tří rovnic o třech neznámých má jediné řešení, a to $a = 0, b = 0, c = 0$. Seznam C je tedy LN, a tedy je uspořádanou bází prostoru L .

- (b) Hledáme čísla $d, e, f \in \mathbb{R}$ splňující

$$d\frac{1}{2}\vec{v}_1 + e(2\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + f(\vec{v}_2 - \vec{v}_3) = \vec{u},$$

tedy

$$\frac{1}{2}d\vec{v}_1 + (2e+f)\vec{v}_2 + (e-f)\vec{v}_3 = \vec{u}.$$

Zároveň víme, že platí

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \vec{u}.$$

Chceme tedy, aby platilo $\frac{1}{2}d = a, 2e+f = b$, a $e-f = c$. Tato soustava má jediné řešení, a to

$$d = 2a, e = \frac{b+c}{3}, f = \frac{b-2c}{3}. \text{ Tedy platí } [\vec{u}]_C = \begin{pmatrix} 2a \\ \frac{b+c}{3} \\ \frac{b-2c}{3} \end{pmatrix}.$$

3. (a) Ano. Jde o lineární zobrazení reprezentované maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pro libovolné vektory $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ totiž platí

$$A \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

a pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ a vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$A(a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = ax + ay + az = a(x + y + z) = aA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- (b) Ne. To plyne z toho, že funkce sinus není lineární. Například,

$$2A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin(1) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Ne. Pro dané zobrazení A a každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| \\ |y| \end{pmatrix}$, a pro toto zobrazení jsme na cvičení ukázali, že není lineární.

- (d) Ano. Pro libovolné dva polynomy $p_1 = a + bx + cx^2 + dx^3, p_2 = e + fx + gx^2 + hx^3 \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ a reálné číslo α totiž platí

$$\begin{aligned} A(p_1 + p_2) &= A(a + e + (b + f)x + (c + g)x^2 + (d + h)x^3) = \begin{pmatrix} (d + h) - (c + g) \\ (a + e) + (b + f) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} d - c \\ a + b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h - g \\ e + f \end{pmatrix} = A(p_1) + A(p_2), \end{aligned}$$

a

$$A(\alpha p_1) = \begin{pmatrix} \alpha d - \alpha c \\ \alpha a + \alpha b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} d - c \\ a + b \end{pmatrix} = \alpha A(p_1).$$

- (e) Ano. Jak možná víte, pro libovolné dva polynomy p_1, p_2 (nebo i jiné funkce, které lze integrovat) a $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_0^1 p_1(x) + p_2(x) dx = \int_0^1 p_1(x) dx + \int_0^1 p_2(x) dx,$$

a

$$\int_0^1 a \cdot p_1(x) dx = a \cdot \int_0^1 p_1(x) dx.$$

4. Abychom našli danou matici, stačí zjistit, kam se danou projekcí zobrazí kanonické vektory $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nakreslením obrázku lze snadno zjistit, že první kanonický vektor se zobrazí na vektor

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

zatímco druhý kanonický vektor se zobrazí na vektor

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice je tedy

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$