# Ukázkové početní příklady ke zkoušce

Zde je ukázka početních příkladů, které můžete potkat (s drobnými obměnami) u písemné části zkoušky.

(1) Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & 27 \end{pmatrix} \quad \text{a vektory} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(a) (max. 4 body) Nalezněte QR-rozklad matice $A$, pokud existuje.

(b) (max. 4 body) Nalezněte Choleského rozklad matice $B$, pokud existuje.

(c) (max. 5 bodů) Řešte soustavy rovnic $(A|\vec{x})$ a $(B|\vec{y})$ **pomocí nalezených rozkladů**. Pokud má soustava přesné řešení, nalezněte ho. Pokud ne, řešte soustavu metodou nejmenších čtverců, a spočtěte velikost chyby, které jste se dopustili (v libovolné normě dle Vašeho výběru).

(2) Pro následující matici $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$ a vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$:

(a) (max. 5 bodů) Nalezněte SVD rozklad matice $A$.

(b) (max. 2 body) Aproximujte matici $A$ maticemi nižších hodností, a spočtěte relativní změnu matice.

(c) (max. 2 body) Nalezněte pseudoinverzi $A$.

(d) (max. 2 body) Naleněte (přibližné, pokud přesné neexistuje) řešení $\vec{x}$ soustavy $(A|\vec{b})$ s minimální $\ell_2$ normou.

(e) (max. 2 body) Spočtěte spektrální a Frobeniovu normu $A$, a, pokud $A$ je regulární matice, čísla podmíněnosti $\kappa_2(A)$ a $\kappa_F(A)$.

(3) Je dána matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -10 & 6 & -5 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) (max. 4 body) Nalezněte Jordanův tvar $A$.

(b) (max. 5 bodů) Nalezněte Jordanovu bázi $A$.

(c) (max. 2 body) Spočtěte $A^{15}$.

(d) (max. 2 body) Spočtěte $\sqrt{A}$, pokud je tato hodnota definována.

U částí (c), (d) stačí výsledek ve tvaru "$P \cdot J \cdot P^{-1}$", tj. přechodovou matici není třeba invertovat.

(4) Je dána nilpotentní matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) (max. 4 body) Nalezněte Jordanův tvar $A$.

(b) (max. 5 bodů) Nalezněte Jordanovu bázi $A$.

(c) (max. 2 body) Spočtěte $\cos A$, pokud je tato hodnota definována.

(d) (max. 2 body) Nalezněte řešení soustavy diferenciálních rovnic $\vec{u}'(t) = A \cdot \vec{u}(t)$, $u(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.