

DOPORUČENÉ ÚLOHY, CVIČENÍ 2

1. Rozhodněte, zda následující množina tvoří lineární podprostor.

- (a) $\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$,
- (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$
- (c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$,
- (d) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$,
- (e) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$.

2. Rozhodněte, zda $\vec{v} \in \text{span}(M)$, pokud:

- (a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $M = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$,
- (b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Rozhodněte, zda následující množina tvoří lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}[x]$.

- (a) $\{p \in \mathbb{R}[x] : \text{stupeň } p \text{ je sudý}\} \cup \{\vec{o}\}$ (kde $\vec{o}$ značí nulový polynom),
- (b) $\{p \in \mathbb{R}[x] : \text{koeficienty u lichých mocnin } p \text{ jsou nulové}\}$.

4. Rozhodněte o platnosti výroků v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

- (a) Lineární obal nenulového vektoru je vždy přímka procházející nulou.
- (b) Lineární obal dvou různých nenulových vektorů je vždy roven $\mathbb{R}^2$.

5. Rozhodněte o platnosti výroků.

Pro každý lineární prostor L a množiny $M, N \subseteq L$ platí:

- (a) $\text{span}(M \cap N) = \text{span}(M) \cap \text{span}(N)$,
- (b) $\text{span}(M \cup N) = \text{span}(M) \cup \text{span}(N)$.

6. Rozhodněte o platnosti výroku.

Pokud L je lineární prostor, W je jeho lineární podprostor, a $M \subseteq W$ je množina obsahující nulový vektor, potom M je lineární podprostor prostoru L .