

DOPORUČENÉ ÚLOHY, CVIČENÍ 3

1. Rozhodněte, zda je následující množina lineárně nezávislá či lineárně závislá.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$,

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ v $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$,

(c) $\{2x^2 - x + 2, x + 8, x^2 + 5\}$ v $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$.

2. Rozhodněte, zda následující množina tvoří bázi zadaného prostoru.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$,

(b) $\{\sqrt{3}\}$ v $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$,

(c) $\{\sqrt{3}\}$ v $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$,

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ v lineárním prostoru $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$,

3. Spočítejte dimenzi následujících lineárních prostorů:

(a) $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$,

(b) $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$.

(a) $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ nad $\mathbb{F}$, kde $\mathbb{F}$ je libovolné těleso.

4. Dokažte následující výrok.

Pokud $\vec{x}$ je nenulový vektor v lineárním prostoru L a $\vec{y} \in L$ splňuje $\vec{y} \notin \text{span}(\vec{x})$, potom je množina $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ lineárně nezávislá.