Maticový počet — Písemná zkouška **Varianta A**
Čas: 75 minut Max. bodů: 25

Upozornění: K připuštění k ústní části zkoušky je potřeba z písemné části získat alespoň 10 bodů, jinak je celá zkouška hodnocena známkou F. Řešení pište na samostatné podepsané listy.

---

1. Početní příklad (max. 13 bodů)
Jsou dány matice A a B a vektory $\vec{b}$ a $\vec{c}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 13 & 8 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$$

(a) Nalezněte QR-rozklad matice A, pokud existuje. (4 body)

(b) Nalezněte Choleského rozklad matice B, pokud existuje. (4 body)

(c) Řešte soustavy rovnic $(A|\vec{b})$ a $(B|\vec{c})$ **pomocí nalezených rozkladů**. Pokud má soustava přesné řešení, nalezněte ho. Pokud ne, řešte soustavu metodou nejmenších čtverců a spočtěte velikost chyby, které jste se dopustili (v libovolné normě dle Vašeho výběru). (5 bodů)

---

2. Kvíz — Výběr správné možnosti (max. 12 bodů)
U každé otázky vyberte právě jedno platné tvrzení. Hodnocení: Správná volba + správné stručné zdůvodnění = +3 body; Správná volba bez zdůvodnění (nebo se špatným zdůvodněním) = +2 body; Nesprávná volba = 0 bodů.

1. Matice $A \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ má spektrum $\sigma(A) = \{0, i, -i\}$ a jedno z vlastních čísel matice A má index 3. Potom **nutně** platí:

(a) Alespoň jedno z vlastních čísel A má geometrickou násobnost 3.
(b) Matice A není antihermitovská.
(c) Jordanův tvar A obsahuje maximálně 3 Jordanovy buňky.
(d) $A \notin \mathbb{R}^{7\times 7}$.

2. Pro každé singulární číslo σ matice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ platí $\sigma = 5$ nebo $\sigma = 12$. Potom **nutně** platí:

(a) Pro každou matici $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ hodnosti 2 je $\|A - B\|_2 \geq 12$.
(b) Je-li $U \cdot D \cdot V^*$ SVD rozklad matice A, potom $D = \mathrm{diag}(12, 5, 0)$.
(c) $\|A\|_F = 13$.
(d) Každý sloupec $\vec{x}$ matice A splňuje $\|\vec{x}\|_2 \leq 12$.

3. Nechť $\vec{x}, \vec{y}$ jsou dva různé nenulové vektory v $\mathbb{R}^2$. Potom **nutně** platí:

(a) Existuje ortogonální matice $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ splňující $P \cdot \vec{x} = \vec{y}$.
(b) Pokud existuje vektor $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$, který je vzhledem k standardnímu skalárnímu součinu kolmý na oba vektory $\vec{x}, \vec{y}$, potom $\vec{x}$ je kolmý na $\vec{y}$.
(c) $\|\vec{x} + \vec{y}\|_\infty < \|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{y}\|_\infty$.
(d) Pokud jsou $\vec{x}, \vec{y}$ lineárně závislé, potom neexistuje projekce $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ splňující $P \cdot \vec{x} = \vec{y}$.

4. Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je matice taková, že $\sigma(A) \subseteq (0, \infty)$. Potom **nutně** platí:

(a) A je pozitivně definitní.
(b) $\sin(A)$ je regulární matice.
(c) $\cos(A)$ je regulární matice.
(d) $\sqrt{A}$ je regulární matice.