Cvičení: Operátory a funkcionály na Hilbertových prostorech

1. Ukažte, že pro každý spojitý funkcionál f na Hilbertově prostoru H existuje ortogonální projekce P zobrazující H na jednodimenzionální prostor tak, že
$$|f(x)|^2 = \|f\|^2 \cdot \langle Px, x\rangle \qquad x \in H\,.$$

2. Ukažte, že každý spojitý funkcionál f na prostoru l^2 je tvaru
$$f((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n\,,$$
kde $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$.

3. Ukažte, že Rieszova věta neplatí v neúplném prostoru se skalárním součinem.

4. Nechť $F \in B(H, \mathbb{C}^n)$, kde H je komplexní Hilbertův prostor. Ukažte, že pro každou ortonormální bázi $(e_i)_{i=1}^{n}$ prostoru $\mathbb{C}^n$ existují vektory $x_1, \ldots, x_n \in H$ tak, že
$$F(x) = \langle x, x_1\rangle e_1 + \langle x, x_2\rangle e_2 + \cdots + \langle x, x_n\rangle e_n\,.$$

5. K je Hilbertův podprostor Hilbertova prostoru H. $T : K \to H$ je operátor: $T(x) = x$, $x \in K$. Stanovte T^*.

6. Ukažte, že je-li $T \in B(H)$ operátor na, pak T^* je prostý operátor. Tedy v důsledku toho je každý samoadjungovaný surjektivní operátor prostý.

7. Ukažte, že
   (a) Každá ortogonální projekce je pozitivní operátor.
   (b) Je-li $T \in B(H)$, pak T^*T je pozitivní operátor.
   (c) Je-li $T \in B(H)$ nezáporný, pak T^n, $n \in \mathbb{N}$, je také nezáporný.

8. $T \in B(H)$ je pozitivní prostý operátor. Ukažte, že $\langle x, y\rangle_T = \langle Tx, y\rangle$ je skalární součin na prostoru H. (Návod: použijte Schwarzovu nerovnost.)

9. Na prostoru l^2 uvažujme operátor
$$T : (x_1, x_2, \ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots)\,.$$
   (a) Nalezněte T^*.
   (b) Ukažte, že T je izometrie, ale ne unitární operátor.

10. $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo operátoru $T \in B(H)$, existuje-li nenulový vektor $u \in H$ tak, že
$$Tu = \lambda\, u\,.$$
u se nazývá vlastní vektor příslušný hodnotě λ. Ukažte, že
   (a) Vlastní čísla samoadjungovaného operátoru jsou reálná.

(b) Vlastní čísla pozitivního operátoru jsou pozitivní.

(c) Vlastní čísla unitárního operátoru jsou komplexní jednotky.

(d) Nechť $T \in B(H)$, kde $\dim H < \infty$. Je-li λ vlastní číslo operátoru T, pak $\overline{\lambda}$ je vlastní číslo operátoru T^*. Na základě předchozího příkladu ukažte, že tato implikace neplatí pro nekonečně dimenzionální prostor.

(e) Operátor $T \in B(H)$ se nazývá normální, jestliže $T^*T = TT^*$. Uvědomte si, že pozitivní, samoadjungované a unitární operátory jsou příklady normálních operátorů. Ukažte, že pro normální operátor platí: vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

11. Ukažte, že inverze k unitárnímu operátoru je opět unitární operátor. Ukažte, že součin unitárních operátorů je unitární operátor.