KAPITOLA 5: Operátory

8. dubna 2020

Opakování: Lineární zobrazení $T : X \to Y$ mezi lineárními prostory je zobrazení zachovávající artimetické operace: $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbf{C}$:

$$T(x+y) = T(x) + T(y)\,.$$

$$T(\lambda x) = \lambda T(x)\,.$$

$L(X, Y)$ .... množina všech lineárních zobrazení z X do Y. Je to prostor s obvyklými aritmetickými operacemi.

Definice : Lineární zobrazení $T : X \to Y$ mezi normovanými prostory (nad stejným tělesem) se nazývá **operátor**.

$T(x)$, Tx – hodnota operátoru T v x
$D(T)$ – definiční obor operátoru T (podprostor prostoru X; neřekneme-li jinak, předpokládáme $D(T) = X$)

Definice : Operátor $T : X \to Y$ je **omezený**, jestliže existuje $K \geq 0$ tak, že

$$\|Tx\| \;\leq\; K \qquad \forall x \in B_X$$

(neboli $T(B_X) \subset K \cdot B_Y$).

Množinu operátorů prostoru X do prostoru Y značíme $B(X, Y)$. Je-li $X = Y$, používáme zkrácené označení $B(X) := B(X, X)$.

$B(X,Y)$ je podprostor $L(X,Y)$ (dokažte z trojúhelníkové nerovnosti).

Pro $T \in B(X,Y)$ pokládáme

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|.$$

Platí: **1)** Pro omezený operátor $T : X \to Y$ je

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|\,.$$

2) Je-li $T : X \to Y$ omezený operátor, pak

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| \qquad \forall\, x \in X\,.$$

3) Nechť $T : X \to Y$ je omezený operátor, pak $\|T\|$ je nejmenší konstanta $c \geq 0$ taková, že

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\| \qquad \forall\, x \in X\,.$$

4) $(B(X,Y), \|.\|)$ je normovaný prostor (tj. $\|.\|$ je norma na $B(X,Y)$).

5) Nechť $T \in B(X,Y)$, $U \in B(Y,Z)$. Pak složené zobrazení $UT : X \to Z$ je omezené a platí

$$\|UT\| \leq \|U\|\,\|T\|.$$

Důkaz: **1)** Nechť $x \in X$, $x \neq 0$. Pak $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$. Jednotkovou sféru $S_X = \{x \in X \,:\, \|x\| = 1\}$ tedy můžeme napsat jako $S_X = \{\frac{x}{\|x\|} \,:\, x \neq 0\}$. Uvažujme nyní nenulové $x \in B_X$. Pak

$$T(x) = \|x\| \cdot T\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)$$

Jelikož je $\|x\| \leq 1$ platí, že

$$\|T(x)\| \leq \left\|T\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\right\|$$

Tedy

$$\sup_{x\in B_X} \|T(x)\| = \sup_{x\in S_X} \|T(x)\|\,,$$

což dokončuje důkaz.

2) Pro $x = 0$ nerovnost platí zřejmě. Je-li $x \neq 0$, pak z předchozího

$$\|Tx\| = \|x\|\,\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|x\| \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} = \|x\|\,\|T\|\,.$$

3) Dokažte jako cvičení.

4) Ověříme jen, že pro $\|T\|$ platí trojúhelníková nerovnost. Splnění ostatních vlastností normy je zřejmé. Mějme tedy dva operátory $T_1, T_2 \in B(X,Y)$. Využívajíce trojúhelníkovou nerovnost pro původní normu máme

$$\begin{aligned}\|T_1 + T_2\| = \sup_{x\in B_X} \|T_1x + T_2x\| &\leq \sup_{x\in B_X} (\|T_1x\| + |T_2x\|) \leq \\ &\leq \sup_{x\in B_X} \|T_1x\| + \sup_{x\in B_X} \|T_2x\| = \|T_1\| + \|T_2\|.\end{aligned}$$

5) Dokažte jako cvičení. □

Definice : Ať $T : X \to Y$ je operátor. Řekneme, že T je spojitý v bodě $x_0 \in X$ jestliže platí:

$$x_n \to x_0 \quad \text{implikuje} \quad Tx_n \to Tx\,.$$

Ekvivalentně: Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\|x - x_0\| \leq \delta$ implikuje $\|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$.

Věta : Pro operátor $T : X \to Y$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) $T \in B(X, Y)$.

(ii) T je spojité zobrazení z X do Y.

(iii) T je spojité v nějakém bodě $x_0 \in X$.

Důkaz: **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** Nechť $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Pak

$$0 \leq \|Tx_n - Tx\| \leq \|T\| \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tedy $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** platí zřejmě.

(iii) $\Rightarrow$ **(i)** Ať T je spojité v $x_0 \in X$. Pro $\varepsilon = 1$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $r \in X$, $\|r\| \leq \delta$, platí

$$\|T(x_0 + r) - Tx_0\| = \|Tr\| \leq 1.$$

Jak tedy vypadá $\|Tx\|$ na B_X? Protože pro $x \in B_X$ je $\|\delta x\| = \delta\|x\| \leq \delta$, dostáváme z předchozího, že na B_X platí $1 \geq \|T(\delta x)\| = \delta\|Tx\|$, neboli $\frac{1}{\delta} \geq \|Tx\|$. Při označení $K = \frac{1}{\delta}$ tak máme $\|Tx\| \leq K$ pro každé $x \in B_X$, což znamená, že $T \in B(X, Y)$.

Poznámka : Potřebujeme-li tedy ukázat, že operátor T je omezený (nebo spojitý), stačí ověřit jeho spojitost v nule, tj. že platí implikace

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \Rightarrow \qquad Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Opakování z lineární algebry:

Příklad : Nechť X, Y jsou normované prostory konečné dimenze, $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je báze prostoru X a $\mathcal{U} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ je báze prostoru Y. Mějme lineární zobrazení $T : X \to Y$ takové, že

$$T(x_j) \;=\; \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \qquad \text{pro } j = 1, \ldots, n\,.$$

Nechť bod $x \in X$ má vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ souřadnice $\langle x \rangle_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top$ (tj. $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$). Pak

$$\begin{aligned} Tx \;=\; \alpha_1 T x_1 + \cdots + \alpha_n T x_n \;&=\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i \;=\; \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_j \Big)\, y_i \;= \\ &=\; \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, \alpha_j \Big)\, y_1 \;+\; \cdots \;+\; \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\, \alpha_j \Big)\, y_m \end{aligned}$$

a Tx má vzhledem k bázi $\mathcal{U}$ souřadnice

$$\langle Tx \rangle_{\mathcal{U}} \;=\; \mathbf{A} \cdot \langle x \rangle_{\mathcal{B}}\,,$$

kde $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$ s prvky a_{ij} (tj. $\mathbf{A} = \big(a_{ij} \big)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$). Rozepsáno po složkách pro $\langle Tx \rangle_{\mathcal{U}} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)^\top$

$$\begin{array}{ccccc} \langle Tx \rangle_{\mathcal{U}} & & (m \times n) & & \langle x \rangle_{\mathcal{B}} \\ \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Poznámka : Všechny operátory mezi prostory konečné dimenze jsou tedy reprezenovány maticemi. Skládání operátorů přitom odpovídá násobení matic.

Tvrzení : Každý lineární operátor definovaný na prostoru konečné dimenze je omezený (a tedy spojitý).

Důkaz: Nechť $T : X \to Y$, kde $\dim X < \infty$, je lineární operátor a $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je báze prostoru X. Mějme obecné $x \in X$, $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. Pak

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|\alpha_1 Tx_1 + \cdots + \alpha_n Tx_n\| \leq |\alpha_1|\,\|Tx_1\| + \cdots + |\alpha_n|\,\|Tx_n\| \leq \\ &\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\Big) \underbrace{\max_{i=1,\ldots,n} \|Tx_i\|}_{\overset{\text{ozn.}}{=} K} . \end{aligned}$$

Podle tvrzení o ekvivalenci norem na prostorech konečné dimenze existuje $C > 0$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq C\|x\|.$$

pro všechna $x \in X$. Pak ale $\|Tx\| \leq KC\|x\|$ pro každé $x \in X$ a speciálně

$$\|Tx\| \leq KC \qquad \forall\, x \in B_X .$$

Operátor T je tedy omezený. $\square$

Příklad : Už víme, že při pevně zvolené bázi v $\mathbb{C}^n$ operárory z $B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ vzájemně jednoznačně korespondují s maticemi z $M_n(\mathbb{C})$ (tj. $B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) \cong M_n(\mathbb{C})$). Uvažujme v $\mathbb{C}^n$ standardní bázi
$\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$.

1) Nechť operátor $A : (\mathbb{C}^n, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{C}^n, \|.\|_\infty)$ je reprezentován maticí $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. (Protože operátor a matici můžeme ztotožit, používáme pro ně stejné označení.) Ukážeme, že $\|A\|$ je maximální řádkový součet matice A, který jsme už dříve označili $\|A\|_r$. Máme

$$Ax = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ \end{matrix} ,$$

tedy

$$\|Ax\|_\infty \;=\; \max_{i=1,\dots,n} \Big|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big| \;\le\; \Big(\max_{i=1,\dots,n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\Big)\cdot \max_{j=1,\dots,n}\|x_j\| = \|A\|_r\|x\|_\infty.$$

Dostali jsme tak odhad

$$\|A\| \le \|A\|_r.$$

Abychom dokázali opačnou nerovnost, zkusíme najít $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B_{\mathbb{C}^n}$, pro které platí $\|A\alpha\|_\infty \ge \|A\|_r$. Nechť největší řádkový součet matice A odpovídá řádku i_0. Pro $j = 1, \dots, n$ položme

$$\alpha_j = \frac{|a_{i_0j}|}{a_{i_0j}},$$

je-li $a_{i_0j} \neq 0$, jinak $\alpha_j = 1$. Pak $\alpha \in B_{\mathbb{C}^n}$ a na pozici i_0 v $A\alpha$ máme

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0j}\alpha_j = \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| = \|A\|_r.$$

Tedy

$$\|A\alpha\|_\infty \ge \|A\|_r$$

a $\|A\| \ge \|A\|_r$. Tím jsme dokázali, že $\|A\|$ je maximální řádkový součet matice A.

2) Pro operátor $A : (\mathbb{C}^n, \|.\|_2) \to (\mathbb{C}^n, \|.\|_2)$ se dá ukázat (bude později), že $\|A\|$ je tzv. *spektrální norma* jemu odpovídající matice A. Např. pro hermitovské matice, tj. matice, pro které platí $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, je

$$\|A\| = \max\{|\lambda_i| \,\big|\, \lambda_i \text{ je vlastní číslo matice } A\}.$$

Příklad (důležité nespojité lineární zobrazení) : Uvažujme lineární prostor $X = C^1\langle 0,\, 1\rangle$ všech funkcí spojitě diferencovatelných na intervalu $\langle 0,\, 1\rangle$ a na něm maximovou normu

$$\|f\| = \max_{t\in\langle 0,\,1\rangle} |f(t)|.$$

Nechť operátor $T : C^1\langle 0,\, 1\rangle \to C\langle 0,\, 1\rangle$ je definován předpisem $Tf = f'$. Pro funkce $x_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, \ldots$, platí $\|x_n\| = 1$ (tedy $x_n \in B_X$ pro každé n). Přitom $(Tx_n)(t) = n\, t^{n-1}$, tudíž $\|Tx_n\| = n$. To ale znamená, že

$$\sup_{x \in B_X} \|Tx\| \;=\; \infty.$$

Operátor T tak není omezený, a tím ani spojitý.

Příklad : Nechť $X = C\langle 0,\, 1\rangle$ s maximovou normou a I je operátor definovaný předpisem

$$I(f) \;=\; \int_0^1 f(t)\; \mathrm{d}t.$$

Pak

$$\|I(f)\| \;=\; \left| \int_0^1 f(t)\; \mathrm{d}t \right| \;\leq\; \int_0^1 |f(t)|\; \mathrm{d}t \;\leq\; \|f\|.$$

Tedy $\|I\| \;\leq\; 1$. Protože pro funkci $\mathbf{1}$ identicky rovnou 1 na $\langle 0,\, 1\rangle$ máme $I(\mathbf{1}) = 1$, platí $\|I\| = 1$.

Derivace není spojitá integrace ano.

Definice : **Funkcionál** na normovaném prostoru X je lineární zobrazení $f : X \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$. ($\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$ je tu těleso skalárů prostoru X.)

Značení: X^* - **duální prostor**: prostor všech omezených funkcionálů na X (s operátorovou normou).

Stěžejní princip funkcionální analýzy:

Hahn Banachova věta :

Ať Y je podprostor normovaného prostoru X. Pak pro každé $f \in Y^*$ existuje $g \in X^*$ takové, že

$$g(y) = f(y) \text{ pro všechna } y \in Y$$

a

$$\|f\| = \|g\|\,.$$

Důkaz je nekonstruktivní a vyžaduje axiom výběru. Neuvádíme.

Důsledkem Hahn Banachovy věty je fakt, že duální prostor má mnoho prvků a odděluje body:

Důsledek : Ať je X normovaný prostor. Pak platí

1. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in X^*$ s $\|f\| = 1$ tak, že
$$f(x) = \|x\|\,.$$

2. Jestliže pro $x, y \in X$ platí $f(x) = f(y)$ pro všechna $f \in X^*$ pak $x = y$.

Důkaz: (i) Vezměme nenulové $x \in X$ a uvažujme jednodimenzionální podprostor Y generovaný vektorem x. Uvažujme lineární funkcionál g na Y definovaný předpisem

$$g(\lambda x) = \lambda\|x\|\,, \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Je zřejmé, že g splňuje $\|g\| = 1$ a $g(x) = \|x\|$.
Stačí nyní vzít libovolné rozšíření $f \in X^*$ funkcionálu g na funkcionál s normou jedna.

(ii) Je-li $f(x) = f(y)$ pro všechna $f \in X^*$ pak dle (i) $\|x - y\| = 0$ a tedy $x = y$.

Tyto poznatky jsou základem konceptu slabého řešení rovnic matematické fyziky.