KAPITOLA 1: Míra a měřitelné funkce

$\mathcal{P}(X) = \{A \,|\, A \subset X\}$ – potenční množina množiny X

1.1 Měřitelné množiny

dále předpokládáme $X \neq \emptyset$

Definice : Systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá **algebra**, jestliže

($\mathcal{A}1$) $\emptyset \in \mathcal{S}$,

($\mathcal{A}2$) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{S}$ (uzavřenost na doplněk),

($\mathcal{A}3$) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$ (uzavřenost na sjednocení).

Systém $\mathcal{S}$ se nazývá **σ-algebra**, pokud splňuje podmínky ($\mathcal{A}1$), ($\mathcal{A}2$) a

($\mathcal{A}3\sigma$) $A_1, A_2, ... \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$.

Je-li $\mathcal{S}$ σ-algebra na X, nazýváme dvojici $(X, \mathcal{S})$ **měřitelný prostor** a množiny $A \in \mathcal{S}$ nazýváme **$\mathcal{S}$-měřitelné**.

Platí: Podmínky ($\mathcal{A}1$), ($\mathcal{A}2$) v definici (σ-)algebry lze nahradit podmínkami

($\mathcal{A}1^*$) $X \in \mathcal{S}$

($\mathcal{A}2^*$) $A, B \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathcal{S}$

Platí: a) Každá algebra je uzavřená na průnik.

b) Každá algebra je uzavřená na konečná sjednocení a konečné průniky, tj.

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{S} \;\text{ a }\; A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{S}.$$

c) Každá σ-algebra je uzavřená na spočetné průniky.

Definice : Nechť $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Nejmenší σ-algebru, která obsahuje všechny množiny z $\mathcal{F}$ („obsahuje $\mathcal{F}$“) značíme $\sigma(\mathcal{F})$ a říkáme jí **σ-algebra generovaná** $\mathcal{F}$. (Podobně lze definovat algebru generovanou $\mathcal{F}$.)

1.2 Míra a vnější míra

- Je-li $Y \neq \emptyset$ a $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak zobrazení $\tau : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$, kde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, říkáme **množinová funkce**.
- Jsou-li $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(Y)$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, $\mu : \mathcal{U} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\nu : \mathcal{V} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mu(A) = \nu(A)$ pro všechna $A \in \mathcal{U}$, pak ν je **rozšíření μ z $\mathcal{U}$ na $\mathcal{V}$** a μ je **zúžení ν z $\mathcal{V}$ na $\mathcal{U}$**.

Definice : Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor (tj. $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je σ-algebra). Množinová funkce $\mu : \mathcal{S} \to \langle 0, \infty \rangle$ se nazývá **míra**, jestliže splňuje:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(M2) Jsou-li $A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \ldots$, po dvou disjunktní (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$), pak

$$\mu\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\Big) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j). \qquad (\sigma\text{-aditivita})$$

Trojici $(X, \mathcal{S}, \mu)$ nazýváme **prostor s mírou**.

Příklady:

- **Diracova míra:** $(\emptyset \neq)$ X – libovolná množina, $a \in X$ pevně zvolené, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

- **Aritmetická (též (po)čítací) míra:** $(\emptyset \neq)$ X – libovolná množina, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$

$$\alpha(A) = \begin{cases} \text{počet prvků } A & \text{pro } A \text{ konečnou} \\ \infty & \text{pro } A \text{ nekonečnou} \end{cases}$$

- **Lebesgueova míra:** zobecňuje pojmy délka intervalu, obsah obdélníka, objem kvádru (více viz dále)

Věta 1.1 (vlastnosti míry): Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$. Pak

(1) Je-li $A_1 \subset A_2$, pak $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$. (monotonie míry)

(2) $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

(3) Je-li $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, pak

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j).$$

(4) Je-li $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ a $\mu(A_1) < \infty$, pak

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j).$$

Definice: Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Pak míru μ nazýváme

- **konečná** – je-li $\mu(X) < \infty$,
- **σ-konečná** – existují-li $X_1, X_2, ... \subset X$ tak, že $\mu(X_j) < \infty$ $\forall j$ a $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = X$,
- **pravděpodobnostní** – je-li $\mu(X) = 1$, $(X, \mathcal{S}, \mu)$ pak nazýváme pravděpodobnostní prostor,
- **úplná** – je-li každá podmnožina množiny míry nula měřitelná

Věta 1.2 (zúplnění míry): Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Pak existuje nejužší rozšíření $(\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ míry $(\mathcal{S}, \mu)$ na úplnou míru. Míru $(\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ nazýváme **zúplnění míry** $(\mathcal{S}, \mu)$.

Tvrzení 1.3: Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$. Pak $(D, \mathcal{S}_D, \mu_D)$, kde

$$\mathcal{S}_D = \{A \in \mathcal{S} | A \subset D\} \ (= \{B \cap D | B \in \mathcal{S}\}) \qquad \text{a} \qquad \mu_D = \mu|_{\mathcal{S}_D},$$

je prostor s mírou. Pokud je míra μ úplná, je i míra μ_D úplná.

Konstrukce míry z množinové funkce přes vnější míru

Mějme $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ a množinovou funkci $\tau : \mathcal{G} \to \langle 0, \infty \rangle$ splňující

$$\emptyset \in \mathcal{G}, \qquad \tau(\emptyset) = 0.$$

Definujme množinovou funkci $\tau^* : \mathcal{P}(X) \to \langle 0, \infty \rangle$ tak, že pro $A \subset X$ položíme

$$\tau^*(A) = \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \tau(B_j) \ \Big| \ B_j \in \mathcal{G} \text{ pro } j \in \mathbb{N} \text{ a } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \Big\}.$$

Jsou-li $B_j \in \mathcal{G}$ a $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, nazýváme $\sum_{j=1}^{\infty} \tau(B_j)$ **horní součet k** $\tau^*(A)$.

Poznámka: Může se stát, že $\tau^*(A) \neq \tau(A)$ pro nějaké $A \in \mathcal{G}$.

Definice: Množinová funkce $\gamma : \mathcal{P}(X) \to \langle 0, \infty \rangle$ se nazývá **vnější míra** na množině X, jestliže

(VM1) $\gamma(\emptyset) = 0$

(VM2) $A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B)$ (monotonie)

(VM3) $\gamma(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(A_j)$ (σ-subaditivita)

Věta 1.4: Množinová funkce τ^* je vnější míra (na X).

Definice: Nechť $\gamma : \mathcal{P}(X) \to \langle 0, \infty \rangle$ je vnější míra na X. Množina $A \subset X$ se nazývá γ**-měřitelná** (podle Carathéodoryho), jestliže pro každou množinu $T \subset X$ platí

$$\gamma(T) = \gamma(T \cap A) + \gamma(T \setminus A).$$

Množinu všech γ-měřitelných množin značíme $\mathfrak{M}(\gamma)$ a pro $A \in \mathfrak{M}(\gamma)$ pokládáme $\gamma^\circ(A) = \gamma(A)$. Tedy $\gamma^\circ = \gamma|_{\mathfrak{M}(\gamma)}$ (zúžení γ na $\mathfrak{M}(\gamma)$).

Věta 1.5 (Carathéodoryova): Nechť γ je vnější míra na X. Pak systém γ-měřitelných množin $\mathfrak{M}(\gamma)$ je σ-algebra a γ° je úplná míra.

1.3 Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$

$a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a \leq b$

(a,b), $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$, $\langle a,b\rangle$ – **(jednorozměrný) interval**

$(a,b\rangle$ – **usměrněný interval** (není to běžně používaný název, zjednoduší nám ale vyjadřování)

$\mathcal{I}_1 = \{I \,|\, I$ - interval, $a, b \in \mathbb{R}\}$ (systém všech omezených intervalů v $\mathbb{R}$)

$\widetilde{\mathcal{I}}_1 = \{(a,b\rangle \,|\, -\infty < a \leq b < \infty\}$ (systém všech omezených usměrněných intervalů v $\mathbb{R}$)

délka intervalu $\mathcal{I}$ s krajními body a, b, kde $-\infty < a \leq b < \infty$:

$$l(I)\ (= l_1(I)) = b - a$$

Platí: Pokud sjednocením, průnikem či rozdílem usměrněných intervalů je interval, pak je usměrněný.

n**-rozměrný interval**:

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n, \quad \text{kde } I_i \text{ jsou jednorozměrné intervaly}$$

$$\mathcal{I}_n = \{I \subset \mathbb{R}^n \,|\, I \text{ je omezený interval}\}$$

usměrněný n**-rozměrný interval**:

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n, \quad \text{kde } I_i \text{ jsou usměrněné jednorozměrné intervaly}$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_n = \{I \in \mathcal{I}_n \,|\, I \text{ je usměrněný}\}$$

usměrněný poloprostor: množina typu

$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \leq c\}$ nebo $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i > c\}$, kde $c \in \mathbb{R}$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$ je vhodná dvojice čísel

elementární objem n-rozměrného intervalu $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n \in \mathcal{I}_n$:

$$l_n(I) = l(I_1) \cdot l(I_2) \cdot \ldots \cdot l(I_n)$$

Platí: Každý usměrněný interval v $\mathbb{R}^n$ je průnik $2n$ usměrněných poloprostorů.

Platí: Jsou-li I usměrněný interval a H usměrněný poloprostor v $\mathbb{R}^n$, pak $I \cap H$ a $I \backslash H$ jsou usměrněné intervaly.

Vlastnosti funkce l_n na $\widetilde{\mathcal{I}}_n$:

- l_n je **aditivní** v tomto smyslu: pro každý usměrněný interval I_n a usměrněný poloprostor H platí

$$l_n(I) = l_n(I \cap H) + l_n(I \backslash H)$$

- l_n je **nezáporná** (zřejmé)

- l_n je **zprava spojitá** v tom smyslu, že kdykoliv $(Q_j)_{j=1}^{\infty} \subset \widetilde{\mathcal{I}}_n$, $I \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$ a $Q_j \searrow I$ (tj. $Q_{j+1} \subset Q_j$, $I = \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j$) nebo $Q_j \nearrow I$ (tj. $Q_j \subset Q_{j+1}$, $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$), pak $l_n(Q_j) \longrightarrow l_n(I)$ pro $j \to \infty$.

Příklady dalších aditivních nezáporných zprava spojitých funkcí intervalu:

- Diracova funkce: $x \in \mathbb{R}^n$ pevně zvoleno, $I \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$

$$d_x(I) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}$$

- funkce $\underline{m_n : \widetilde{\mathcal{I}}_n \to \mathbb{R}}$ definovaná pomocí neklesající zprava spojité funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že

$$m_n(I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n) = m_1(I_1) \cdot m_1(I_2) \cdot \ldots \cdot m_1(I_n),$$

  kde pro $I_j = (a_j, b_j\rangle$ je

$$m_1(I_j) = F(b_j) - F(a_j).$$

Definice: Vnější míru l_n^* na $\mathbb{R}^n$ generovanou elementárním objemem l_n na $\widetilde{\mathcal{I}}_n$, tj.

$$l_n^*(A) = \inf\{ \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j) \mid Q_j \in \widetilde{\mathcal{I}}_n \text{ pro } j \in \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \},$$

nazýváme **Lebesgueova vnější míra**. Vnější míru m^*, která je daná obecnou konečnou aditivní nezápornou zprava spojitou funkcí m na $\widetilde{\mathcal{I}}_n$ nazýváme **Lebesgue-Steiltjesova vnější míra generovaná** m.

Platí: Lebesgueova vnější míra je definovaná na celé $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, je monotonní a σ-subaditivní.

Věta 1.6: Pro každé $I \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$ platí $l_n^*(I) = l_n(I)$.

Důsledek 1.7: Nechť $I \in \mathcal{I}_n$. Pak $l_n^*(I) = l_n(I)$.

Tvrzení 1.8: l_n^* je translačně invariantní, tj. pro každé $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ je při označení $A + x = \{a + x \mid a \in A\}$

$$l_n^*(A + x) = l_n^*(A).$$

Definice: Řekněme, že $A \subset \mathbb{R}^n$ je **lebesgueovsky měřitelná** (píšeme $A \in \mathfrak{M}_n$), jestliže pro každý usměrněný interval $Q \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$ platí

$$l_n^*(Q) = l_n^*(Q \cap A) + l_n^*(Q \backslash A).$$

Pro $A \in \mathfrak{M}_n$ položíme $\lambda_n(A) = l_n^*(A)$. λ_n nazýváme **Lebesgueova míra**.
Podobně pro m nezápornou zprava spojitou aditivní funkci na intervalu dostaneme **Lebesgue-Stieltjesovu míru generovanou** m.

Tvrzení 1.9 : **a)** Je-li H usměrněný poloprostor v $\mathbb{R}^n$, pak $H \in \mathfrak{M}_n$.

b) Je-li H usměrněný poloprostor v $\mathbb{R}^n$ a $A \in \mathfrak{M}_n$, pak $H \cap A \in \mathfrak{M}_n$.

c) Je-li I usměrněný interval v $\mathbb{R}^n$, pak $I \in \mathfrak{M}_n$ (tedy $\widetilde{\mathcal{I}}_n \subset \mathfrak{M}_n$).

Věta 1.10 : Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná právě tehdy, když je l_n^*-měřitelná podle (Carathéodoryho), tj.

$$l_n^*(T) \;=\; l_n^*(T \cap A) \;+\; l_n^*(T \setminus A) \qquad \forall\, T \subset \mathbb{R}^n.$$

Tedy $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_n(l_n^*)$ a $\lambda_n = (l_n^*)^\circ$. ($\mathfrak{M}_n$ je tak σ-algebra a λ_n je úplná míra).

Důsledek 1.11 : Každý interval je lebesgueovsky měřitelný.

Věta 1.12 : Existuje množina $B \subset (0,1)$ taková, že $B \notin \mathfrak{M}_1$ (tj. B je neměřitelná). Tedy Lebesgueova vnější míra l_1^* není aditivní.

1.4 Borelovské množiny v $\mathbb{R}^n$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ... $\|x\| \;=\; \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ – **norma** x

$r > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$ ... $B_r(x) \;=\; \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$ – **otevřená koule se středem** x **a poloměrem** r (okolí bodu x o poloměru r)

$(x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x_k - x\| \to 0$ pro $k \to \infty$ ... $x_k \to x$ pro $k \to \infty$,

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **otevřená**, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ tak, že $B_r(x) \subset M$.

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **uzavřená**, jestliže je množina $\mathbb{R}^n \setminus M$ otevřená. To nastává právě tehdy, když platí

$$\text{kdykoliv} \quad (x_k)_{k=1}^\infty \subset M,\ \ x \in \mathbb{R}^N \ \text{ a } \ x_k \to x, \qquad \text{pak} \qquad x \in M.$$

Platí:

- $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ jsou otevřené množiny.
- $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ jsou uzavřené množiny.
- Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.
- Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina .
- Průnik **konečného** počtu otevřených množin je otevřená množina .
- Sjednocení **konečného** počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

Tvrzení 1.13 : Každá otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je sjednocením spočetně mnoha usměrněných intervalů.

Definice : Označme $\mathcal{G} = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ je otevřená }\}$. Pak definujeme

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;=\; \sigma(\mathcal{G}),$$

tedy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je nejmenší σ-algebra podmnožin $\mathbb{R}^n$, která obsahuje všechny otevřené množiny. Množiny ze σ-algebry $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nazýváme **borelovské**.

Platí:

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ obsahuje také všechny uzavřené množiny.

- Je-li $\mathcal{A}$ σ-algebra obsahující všechny usměrněné intervaly v $\mathbb{R}^n$, pak $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}_n$. Tedy každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná.

Věta 1.14 **(charakterizace lebesgueovsky měřitelných množin) :** Buď $E \subset \mathbb{R}^n$. Pak jsou ekvivalentní tvrzení

(i) $E \in \mathfrak{M}_n$

(ii) Pro každé $\varepsilon > 0$ existují otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ a uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}^n$, takové že

$$F \subset E \subset G \qquad \text{a} \qquad \lambda_n(G \backslash F) < \varepsilon.$$

(iii) Existují borelovské množiny $P,\ Q \subset \mathbb{R}^n$ (přesněji P typu F_σ – spočetné sjednocení uzavřených množin, Q typu G_δ – spočetný průnik otevřených množin) takové, že

$$P \subset E \subset Q \qquad \text{a} \qquad \lambda_n(Q \backslash P) = 0.$$

(iv) Existují borelovské množiny $M,\ N$ takové, že

$$\lambda_n(N) = 0 \qquad \text{a} \qquad (E \backslash M) \cup (M \backslash E) \ \subset\ N.$$

1.5 Měřitelné funkce

Definice : Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $D \in \mathcal{S}$. Pak $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **$\mathcal{S}$-měřitelná funkce na** D, jestliže pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\{x \in D \,|\, f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty\rangle) \in \mathcal{S}.$$

Komplexní funkce na D je $\mathcal{S}$-měřitelná, jestliže jsou $\mathcal{S}$-měřitelné její reálná i imaginární část.

Zřejmě:
- Je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná na $D \in \mathcal{S}$, $D' \in \mathcal{S}$, $D' \subset D$, pak je f $\mathcal{S}$-měřitelná i na D'.
- Je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná na D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$, pak je f $\mathcal{S}$-měřitelná i na $D_1 \cup D_2$.

Platí: Následující tvrzení jsou ekvivalentní

- f je $\mathcal{S}$-měřitelná na D, tj. pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \,|\, f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty\rangle) \in \mathcal{S}$.
- Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \,|\, f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}(\langle -\infty,\, \alpha\rangle) \in \mathcal{S}$.
- Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \,|\, f(x) < \alpha\} = f^{-1}(\langle -\infty,\, \alpha)) \in \mathcal{S}$.
- Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \,|\, f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}(\langle \alpha,\, \infty\rangle) \in \mathcal{S}$.

Aritmetické operace v $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:

- **nedefinujeme:** $\infty \ + \ (-\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{a}{0}$ $(a \in \overline{\mathbb{R}})$
- **definujeme (zde):** $0 \cdot (\pm\infty) = 0$

Tvrzení 1.15 : Nechť f, g jsou $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na X, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

a) $\{x \in X \,|\, f(x) < g(x)\} \in \mathcal{S}$ (zkráceně zde $\{f < g\} \in \mathcal{S}$ a analogicky jinde)

b) $\{x \in X \,|\, f(x) = +\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{S}$

$\{x \in X \,|\, f(x) = -\infty\} = f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{S}$

c) $\{x \in X \,|\, f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathcal{S}$

Značení: Pro $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ označíme

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{(kladná část } f), \qquad f^- = \max\{-f, 0\} \quad \text{(záporná část } f).$$

Tvrzení 1.16 : Nechť f je $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$, φ spojitá funkce na otevřené nebo uzavřené množině $G \subset \overline{\mathbb{R}}$. Pak množina

$$D' = \{x \in D \,|\, f(x) \in G\}$$

je měřitelná a funkce $\varphi \circ f$ je $\mathcal{S}$-měřitelná na D'.

Věta 1.17 : Nechť $f,\ g,\ f_1,\ f_2, \ldots$ jsou $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak

a) funkce λf, $|f|$, f^+, f^-, f^2 jsou $\mathcal{S}$-měřitelné na D, funkce $\frac{1}{f}$ je $\mathcal{S}$-měřitelná na $\{x \in D \,|\, f(x) \neq 0\}$,

b) funkce $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ jsou $\mathcal{S}$-měřitelné na podmnožině množiny D, na které má daná operace smysl,

c) funkce $\max\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\min\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$, $\inf\limits_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$, $\limsup\limits_{j\to\infty} f_j \overset{\text{DEF.}}{=} \lim\limits_{j\to\infty} \Big(\sup\limits_{i \geq j}\{f_i\}\Big)$,
$\liminf\limits_{j\to\infty} f_j \overset{\text{def.}}{=} \lim\limits_{j\to\infty} \Big(\inf\limits_{i \geq j}\{f_i\}\Big)$ jsou $\mathcal{S}$-měřitelné na D,

d) množina D' všech $x \in D$, kde existuje $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$ je $\mathcal{S}$-měřitelná a funkce $\lim\limits_{j\to\infty} f_j$ je $\mathcal{S}$-měřitelná na D'.

Důsledek 1.18 : Nechť $f,\ g$ jsou $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak $\{x \in D \,|\, f(x) = g(x)\} \in \mathcal{S}$.

Definice : Nechť $A \subset X$. Funkci $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ takovou, že

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

nazýváme **charakteristická funkce množiny** A **v** X.

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme zúžení funkce χ_A na množinu $D \in \mathcal{S}$ (tj. charakteristickou funkci množiny $A \cap D$ v D) značit také χ_A.

Zřejmě: χ_A je měřitelná, právě když je A měřitelná

Definice : Systém $\{A_1, \ldots, A_n\}$ podmnožin množiny D se nazývá **rozkladem** množiny D, jestliže $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$ a $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = D$.

Definice : Funkce f se nazývá **jednoduchá**, pokud je lineární kombinací charakteristických funkcí měřitelných množin, tj. existují množiny $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ a čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ taková, že

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \chi_{A_i}.$$

Věta 1.19 : Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a f je nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak existují jednoduché nezáporné funkce $f_k \nearrow f$ (tj. $f_{k+1} \geq f_k$ pro každé k a $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ pro každé x). Navíc f lze vyjádřit ve tvaru

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^j \chi_{E_j} \quad \Big(= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} 2^j \chi_{E_j} \Big),$$

kde $E_j \in \mathcal{S}$.

Důsledek 1.20 : Nechť f je $\mathcal{S}$-měřitelná na $D \in \mathcal{S}$. Pak existuje posloupnost jednoduchých funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $|f_n| \leq |f|$ a $f_n \longrightarrow f$ na D.

Definice : Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Dále nechť $f : D' \to \overline{\mathbb{R}}$ je $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na $D' \in \mathcal{S}$, $D' \subset D$, $\mu(D \setminus D') = 0$. Pak funkci f nazveme **μ-měřitelnou na** D.

Poznámka : Pokud v budoucnu použijeme bez dalšího upřesnění jen stručné označení "funkce měřitelná na D", budeme mít na mysli funkci μ-měřitelnou na D.

KAPITOLA 2: Abstraktní Lebesgueův integrál

$(X, \mathcal{S}, \mu)$ – prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$

s.v. = **skoro všude, pro skoro všechna** apod. … až na množinu míry nula

2.1 Zavedení a základní vlastnosti

Konstrukce integrálu

Při konstrukci integrálu postupujeme v několika krocích. definujeme ho nejdříve pro nejjednodušší funkce a od nich pak přecházíme k funkcím obecnějším.

Nechť $D \in \mathcal{S}$

(1) Je-li s nezáporná jednoduchá funkce, $s = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$, kde $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$, pak definujeme

$$\int_D s \, \mathrm{d}\mu \ = \ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, \mu(A_j \cap D) \, .$$

(2) Je-li f nezáporná $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na D, pak definujeme

$$\int_D f \, \mathrm{d}\mu \ = \ \sup \left\{ \int_D s \, \mathrm{d}\mu \ \Big| \ s \text{ je jednoduchá funkce, } 0 \leq s \leq f \text{ na } D \right\}.$$

(3) Je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na D, pak definujeme

$$\int_D f \, \mathrm{d}\mu \ = \ \int_D f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_D f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

má-li tento rozdíl smysl (tj. není $\infty - \infty$).

(4) Je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná na $D' \subset D$, $\mu(D \backslash D') = 0$ (tedy f je také μ-měřitelná na D), definujeme

$$\int_D f \, \mathrm{d}\mu \ = \ \int_{D'} f \, \mathrm{d}\mu \, ,$$

pokud je integrál vpravo definován.

Je-li integrál $\int_D f \, \mathrm{d}\mu$ definován, říkáme, že **má smysl** nebo že f **má integrál**. Pokud je integrál navíc konečný, říkáme, že $\int_D f \, \mathrm{d}\mu$ **konverguje** nebo že f **je integrovatelná na** D**.**

Poznámky:

1) Je-li funkce f integrovatelná, je integrovatelná i $|f|$. Tedy každá integrovatelná funkce je **absolutně integrovatelná** (říkáme též, že Lebesgueův integrál je **absolutně konvergentní**). Zřejmě přitom platí

$$\int_D |f| \, \mathrm{d}\mu \ \geq \ \left| \int_D f \, \mathrm{d}\mu \right| .$$

2) Definice abstraktního integrálu z jednoduché funkce je korektní, tj. nezávisí na výběru vyjádření funkce s jako lineární kombinace charakteristických funkcí po dvou disjunktních množin.

3) Určení $\int_D f \, \mathrm{d}\mu$ pro $f \geq 0$ jednoduchou podle **(1)** a **(2)** dává stejné hodnoty.

4) Je-li $D \in \mathcal{S}$, $\mu(D) = 0$, pak pro každou měřitelnou funkci f je $\int_D f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

5) Definice integrálu μ-měřitelné funkce je korektní, tedy nezávisí na volbě množiny D' uvedených vlastností.

6) Je-li f definována na $D \in \mathcal{S}$ a $M \subset D$, $M \in \mathcal{S}$, pak zřejmě platí

$$\int_M f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_D f\chi_M \,\mathrm{d}\mu\,.$$

7) Někdy (např. když integrál bude záviset na parametru) budeme psát

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{místo} \qquad \int_D f\,\mathrm{d}\mu\,.$$

8) Pro $(X,\mathcal{S},\mu) \;=\; (\mathbb{R}^n,\mathfrak{M}_n,\lambda_n)$ používáme značení

$$\int_E f\,\mathrm{d}x \;:=\; \int_E f\,\mathrm{d}\lambda_n, \qquad \int_a^b f\,\mathrm{d}x \;:=\; \int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Index u $\mathfrak{M}$ a λ označující dimenzi někdy vynecháváme.

9) Při výpočtu integrálů používáme tento vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem:

   Nechť f je riemannovsky integrovatelná funkce na $\langle a,\, b\rangle$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b (tj. přes $\langle a,\, b\rangle$) konverguje a je roven integrálu Riemannovu.

Tvrzení 2.1 : Nechť $D \in \mathcal{S}$ a funkce f, g jsou měřitelné na D. Pak platí

a) Je-li $f \geq 0$, $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, $D_1 \subset D_2 \subset D$, pak $\int_{D_1} f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_{D_2} f\,\mathrm{d}\mu\,.$

b) Je-li $\int_D |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$, pak $|f| < \infty$ skoro všude na D.

c) Je-li $\int_D |f|\,\mathrm{d}\mu = 0$, pak $|f| = 0$ skoro všude na D.

d) Jestliže f, g mají integrál přes D a $f \leq g$ skoro všude na D, pak $\int_D f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_D g\,\mathrm{d}\mu$. (monotonie integrálu)

e) Je-li $\int_D g\,\mathrm{d}\mu < \infty$ a $|f| \leq g$ skoro všude na D, pak f je integrovatelná.

Důsledek 2.2 : **a)** Jestliže $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0$ pro každou měřitelnou množinu $E \subset D \subset \mathcal{S}$, pak $f = 0$ s.v. na D.

b) Nechť f a g jsou integrovatelné na $D \in \mathcal{S}$. Jestliže $\int_E f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g\,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou množinu $E \subset D$, pak $f \leq g$ s.v. na D.

Věta 2.3 (Leviho o monotonní konvergenci) : Nechť $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in \mathcal{S}$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ a $f = \lim\limits_{j\to\infty} f_j$. Potom

$$\int_D f\,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{j\to\infty}\int_D f_j\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Poznámka: Předpoklad $0 \leq f_1$ ve Větě 2.3 lze nahradit předpokladem $\int_D f_1\,\mathrm{d}\mu > -\infty$.

Důsledek 2.4 (Spojitá závislost na integračním oboru) : Nechť $D, E_k \in \mathcal{S}$, $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = D$ a f je nezáporná měřitelná funkce na D. Potom

$$\int_D f\,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Věta 2.5 (Linearita integrálu) :

a) Nechť funkce f a g jsou měřitelné na $D \in \mathcal{S}$. Potom

$$\int_D (f+g)\,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_D f\,\mathrm{d}\mu + \int_D g\,\mathrm{d}\mu\,,$$

   má-li pravá strana smysl.

b) Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Pokud má f integrál, pak

$$\int_D \tau f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \tau \int_D f \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Tvrzení 2.6 : Nechť $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cup D_2 = D$. Pak

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu = \int_{D_1} f \,\mathrm{d}\mu \;+\; \int_{D_2} f \,\mathrm{d}\mu \,,$$

pokud má některá strana smysl.

Značení:

$$\mathcal{L}^1(\mu) \;=\; \Big\{ f \mid \int_X f \,\mathrm{d}\mu \;\text{ konverguje} \Big\}.$$

Z předchozího dostáváme:

Tvrzení 2.7 (Vlastnosti $\mathcal{L}^1(\mu)$) :

a) Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

b) Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $|f| < \infty$ s.v. na X.

c) Je-li $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (tj. $\mathcal{L}^1(\mu)$ je lineární prostor) a platí

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu \;=\; \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu \;+ \beta \int_X g \,\mathrm{d}\mu \,.$$

d) Pro $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ je $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

e) Je-li f měřitelná, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $|f| \le g$ s.v., pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

2.2 Záměna limity a integrálu

(Mezi tyto věty patří také Leviho věta o monotonní konvergenci – viz Věta 2.3)

Vsuvka: Limes superior a limes inferior posloupnosti $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ jsou definovány vztahy

$$\liminf_{j\to\infty} \; a_j \;=\; \lim_{j\to\infty} \Big(\inf_{i\ge j} \{a_i\} \Big), \quad \limsup_{j\to\infty} \; a_j \;=\; \lim_{j\to\infty} \Big(\sup_{i\ge j} \{a_i\} \Big) \,.$$

Tedy zřejmě vždy platí

$$\liminf_{j\to\infty} \; a_j \;\le\; \limsup_{j\to\infty} \; a_j$$

a rovnost nastává právě tehdy, když existuje limita posloupnosti $(a_j)_{j=1}^{\infty}$. V tom případě jsou jí $\liminf_{j\to\infty} a_j$ a $\limsup_{j\to\infty} a_j$ rovny, tedy

$$\limsup_{j\to\infty} a_j = \liminf_{j\to\infty} a_j = a \quad \text{právě tehdy, když} \quad \text{existuje} \quad \lim_{j\to\infty} a_j = a.$$

Lemma 2.8 (Fatouovo) : Nechť $D \in \mathcal{S}$ a $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D. Pak

$$\int_D \liminf_{j\to\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu \;\le\; \liminf_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu \,.$$

Věta 2.9 (Lebesgueova o majorizované konvergenci) : Nechť $D \in \mathcal{S}$ a f, f_j, $j = 1, 2, \ldots,$ jsou měřitelné funkce na D. Nechť posloupnost $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ konverguje s.v. na D k f a existuje integrovatelná (na D) funkce g (tzv. **majoranta**) tak, že

$$|f_j(x)| \;\le\; g(x) \qquad \text{pro každé } j \in \mathbb{N} \text{ a s.v. } x \in D \,.$$

Potom

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Poznámka: Rovnost $\int_D \big(\lim_{j\to\infty} f_j\big)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \Big(\int_D f_j\,\mathrm{d}\mu\Big)$ obecně neplatí.

Věta 2.10 (Leviho pro řady): Nechť $D \in \mathcal{S}$ a $g_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots$, jsou funkce měřitelné na D. Pak

$$\int_D \sum_{j=1}^{\infty} g_j \;\mathrm{d}\mu \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \int_D g_j \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Věta 2.11 (Lebesgueova pro řady): Nechť $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in \mathcal{S}$ g je integrovatelná funkce na D. Jestliže

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} h_j(x)\Big| \;\leq\; g(x) \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

a řada $\sum_{j=1}^{\infty} h_j$ konverguje s.v. na D, pak

$$\int_D \sum_{j=1}^{\infty} h_j \,\mathrm{d}\mu \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \int_D h_j \,\mathrm{d}\mu\,.$$

2.3 Střední hodnota náhodné veličiny

Definice: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor (tj. je to prostor s mírou, v kterém $P(\Omega) = 1$). Pak

- $\mathcal{A}$-měřitelnou funkci $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazýváme **náhodná veličina**,
- integrál z náhodné veličiny X vzhledem k míře P (pokud existuje) nazýváme **střední hodnota** náhodné veličiny X a značíme jej EX, tj.

$$EX \;=\; \int_\Omega X \;\mathrm{d}P \;\Big(\; = \int_\Omega X(\omega)\;\mathrm{d}P(\omega)\Big),$$

- **distribuční funkci** F_X náhodné veličiny X definujeme vztahem

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) \;\Big(\; = \; P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\})\;\Big), \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Střední hodnota diskrétní a absolutně spojité náhodné veličiny

Definice: Řekneme, že náhodná veličina je **diskrétní** (má **diskrétní rozdělení**), pokud existují posloupnost reálných čísel $(x_n)_{n\in\mathcal{N}_0}$ $(\mathcal{N}_0 \subset \mathbb{N})$ a posloupnost kladných čísel $(p_n)_{n\in\mathcal{N}_0}$ takové, že

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_0} p_n = 1$$

a

$$p_n = P\big(\{X = x_n\}\big)\;\Big(= P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_n\})\Big).$$

Poznámka: Pro distribuční funkci diskrétní náhodné veličiny X zřejmě máme

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = \sum_{\substack{n\in\mathcal{N}_0 \\ x_n \leq x}} p_n.$$

Platí: Jestliže je X diskrétní náhodná veličina, pak

$$EX \;=\; \sum_{n\in\mathcal{N}_0} x_n\, p_n.$$

Definice : Řekneme, že náhodná veličina je **absolutně spojitá** (má **absolutně spojité rozdělení**), pokud existuje nezáporná borelovsky měřitelná funkce f taková, že

$$F_X(x) = P(\{X \le x\}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Funkci f pak nazýváme **hustota** náhodné veličiny X.

Platí: Jestliže je X absolutně spojitá náhodná veličina, pak

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.4 Fubiniova věta v $\mathbb{R}^N$

Značení: Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ a $N = n + k$.

- Pro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ označíme
$$(x, y) := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^N .$$
- Je-li $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ měřitelná množina, f měřitelná funkce na M, pak používáme značení
$$\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y := \int_M f\,\mathrm{d}\lambda_{n+k} .$$
- Je-li $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$, pak pro $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^k$ položíme
$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in \mathbb{R}^k \,\big|\, (x, y) \in M\}, \\ M^{*,y} &= \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, (x, y) \in M\}. \end{aligned}$$

  Množinám $M^{x,*}$ a $M^{*,y}$ říkáme **řezy**.

Tvrzení 2.16* : Nechť $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ je $\mathfrak{M}_{n+k}$-měřitelná množina. Pak pro každá $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^k$ je množina $M^{x,*}$ $\mathfrak{M}_k$-měřitelná a množina $M^{*,y}$ $\mathfrak{M}_n$-měřitelná, funkce $x \mapsto \lambda_k(M^{x,*})$ a $y \mapsto \lambda_n(M^{*,y})$ jsou měřitelné a

$$\lambda_{n+k}(M) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_k(M^{x,*})\,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_n(M^{*,y})\,\mathrm{d}\lambda_k.$$

Věta 2.19 (Fubiniova v $\mathbb{R}^N$) : Nechť $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ je měřitelná množina a f je funkce měřitelná na M, která má integrál $\int_M f\,\mathrm{d}\lambda_{n+k}$. Potom pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ je definován integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y)\,\underbrace{\mathrm{d}\lambda_k(y)}_{\text{píšeme: } \mathrm{d}y}$$

a platí

$$\int_M f\,\mathrm{d}\lambda_{n+k} = \int_{\mathbb{R}^n} g\,\mathrm{d}\lambda_n ,$$

neboli

$$\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{M^{x,*}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x .$$

Poznámka : Ve větě 2.19 není podstatné, že $x_1, \dots, x_n$ je právě prvních n složek bodu z $\mathbb{R}^{n+k}$. Stejným způsobem bychom za předpokladu existence integrálu $\int_M f\,\mathrm{d}\lambda_{n+k}$ (ten je ve Větě 2.19 podstatný) dostali také

$$\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{M^{*,y}} f(x, y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y.$$

Mohli bychom tedy zaměnit pořadí inegrace:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{M^{x,*}} f(x, y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{M^{*,y}} f(x, y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y.$$

2.5 Věta o substituci

Definice : Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n) : G \to \mathbb{R}^n$ má v bodě $\tilde{x} \in G$ všechny (první) parciální derivace. Pak matici

$$\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

se nazýváme **Jacobiho matice zobrazení** ψ v bodě $\tilde{x}$. Determinant této matice nazýváme **Jacobián zobrazení** ψ v bodě $\tilde{x}$ a značíme ho $J_\psi(\tilde{x})$. Existuje-li lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{\psi(\tilde{x} + h) - \psi(\tilde{x}) - L(h)}{\|h\|} \;=\; 0\,,$$

řekneme, že ψ má v bodě $\tilde{x}$ **(Frechetovu) derivaci**. V tomto případě je L reprezentováno Jacobiho maticí a značí se $\psi'(\tilde{x})$. Zobrazení ψ nazveme **regulární na** G, jestliže má na G spojitou derivaci (tj. všechny jeho parciální derivace jsou na G spojité) a $J_\psi(x) \neq 0$ pro každé $x \in G$.

Věta 2.20 (O substituci) : Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \psi(G)$. Potom

$$\int_M u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi^{-1}(M)} u(\psi(t))\,|J_\psi(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

2.6 Integrály závislé na parametru

Věta 2.21 (Spojitost integrálu závislého na parametru) : Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$, $a \in \mathbb{R}$ a U je okolí bodu a. Nechť funkce $F : U \times D \to \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti

(a) pro **s.v.** $x \in D$ je funkce $F(\,.\,, x)$ spojitá v a,

(b) pro **všechna** $t \in U$ je funkce $F(t,\,.\,)$ měřitelná,

(c) existuje $g \in \mathcal{L}^1(D)$ tak, že pro **všechna** $t \in U$ je $|F(t,\,.\,)| \le g$ **skoro všude** na D (tj. $|F(t,x)| \le g(x)$ pro skoro všechna $x \in D$).

Potom pro **všechna** $t \in U$ je $F(t,\,.\,) \in \mathcal{L}^1(D)$ a funkce

$$G : t \mapsto \int_D F(t,\,.\,)\,\mathrm{d}\mu$$

je spojitá v a, neboli

$$\lim_{t \to a} \int_D F(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x) \;=\; \lim_{t \to a} G(t) \;=\; G(a) \;=\; \int_D F(a,x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Věta 2.22 (Derivace integrálu podle parametru) : Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$ a $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $F : I \times D \to \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti:

(a) pro **s.v.** $x \in D$ je funkce $F(\,.\,, x)$ diferencovatelná na I,

(b) pro **všechna** $t \in I$ je funkce $F(t,\,.\,)$ měřitelná

(c) existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že pro **všechna** $t \in I$ je

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} F(t,\,.\,) \right| \le g \qquad \textbf{s.v. } \text{na } D,$$

(d) existuje $t_0 \in I$ tak, že $F(t_0,\,.\,) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Potom pro **všechna** $t \in I$ je $F(t, .) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, funkce

$$G : t \mapsto \int_D F(t, .)\,\mathrm{d}\mu$$

je diferencovatelná na I a platí vzorec

$$G'(t) = \int_D \frac{\partial}{\partial t} F(t, .)\,\mathrm{d}\mu$$

$$\Big(\text{tj.} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int_D F(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x) \;=\; \int_D \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad \Big).$$

KAPITOLA 3: Prostory L^p

Definice: Nechť Y je lineární prostor. Pak zobrazení $\|.\| : Y \to \mathbb{R}$ nazveme **norma**, jestliže pro každé $u, v \in Y$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(1) $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$

(2) $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$ (**trojúhelníková nerovnost**)

(3) a) $\|u\| \ge 0$

b) $\|u\| = 0 \;\Leftrightarrow\; u = \mathbf{0}$ (nulový prvek v Y)

Dvojici $(Y, \|.\|)$ pak nazveme **normovaný prostor**. (Obvykle píšeme pouze Y.)

Definice: Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, u je μ-měřitelná funkce na X. Pro $p \in \langle 1, \infty)$ definujeme

$$\|u\|_p \;=\; \Big(\int_X |u|^p\,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p}.$$

Dále definujeme

$$\|u\|_\infty \;=\; \operatorname{ess\,sup} |u| := \inf\{C \in \mathbb{R} \,\big|\, |u| \le C \;\text{ s.v. na } X\}.$$

Pro $p \in \langle 1, \infty\rangle$ položíme

$$\mathcal{L}^p(X) \;=\; \{u \mid \|u\|_p < \infty,\ u \text{ je } \mu\text{-měřitelná}\}.$$

Poznámka: Hodnotě $\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{C \in \mathbb{R} \mid f \le C \text{ s.v. na } X\}$ se říká **podstatné** (esenciální) **supremum** funkce f na X. Je ho možné také vyjádřit ve tvaru $\operatorname{ess\,sup} f = \inf\limits_{\substack{E \in \mathcal{S} \\ \mu(E)=0}} \{ \sup\limits_{x \in X \setminus E} f(x) \}$.

Lemma 3.1 (Youngova nerovnost): Nechť $a, b \ge 0$, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak

$$ab \;\le\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $a^p = b^q$.

Věta 3.2 (Hölderova nerovnost): Nechť u, v jsou μ-měřitelné funkce na X, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$\|uv\|_1 \;\le\; \|u\|_p \cdot \|v\|_q.$$

Pokud $\|uv\|_1 < \infty$, rovnost nastává, právě když existují čísla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, z nichž je alespoň jedno $\neq 0$, taková, že

$$c_1 |u|^p \;=\; c_2 |v|^q \quad \text{s.v. na } X.$$

Důsledek 3.3: Nechť $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u \in \mathcal{L}^p(X)$, $v \in \mathcal{L}^q(X)$. Pak $uv \in \mathcal{L}^1(X)$. Navíc

$$\Big| \int_X uv\,\mathrm{d}\mu \Big| \le \Big(\int_X |u|^p\,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \Big(\int_X |v|^q\,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/q}.$$

Důsledek 3.4: Nechť $\mu(X) < \infty$ a $1 \le p < q \le \infty$. Pak $\mathcal{L}^q(X) \subset \mathcal{L}^p(X)$ a existuje konstanta C taková, že

$$\|f\|_p \le C\,\|f\|_q \qquad \text{pro každé } f \in \mathcal{L}^q(X).$$

Věta 3.5 (Minkowského nerovnost): Jsou-li u, v μ-měřitelné funkce na X, $p \in (1, \infty)$, pak

$$\|u + v\|_p \;\le\; \|u\|_p + \|v\|_p\,.$$

Důsledek 3.6: Jestliže $u, v \in \mathcal{L}^p(X)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, pak též $u + v \in \mathcal{L}^p(X)$.

Důkaz: Jde o bezprostřední důsledek Minkowského nerovnosti. □

Ekvivalence na $\mathcal{L}^p(X)$, prostor $L^p(X)$

Na $\mathcal{L}^p(X)$ uvažujme ekvivalenci

$$u \sim v, \qquad \text{jestliže} \quad u = v \quad \text{s.v. na } X$$

(zřejmě $u \sim v \Rightarrow \|u\|_p = \|v\|_p$). Pro $u \in \mathcal{L}^p(X)$ označme jemu odpovídající třídu ekvivalence

$$[u] \;=\; \{v \in \mathcal{L}^p(X) \mid u \sim v\}$$

a položme

$$L^p(X) \;=\; \{[u] \mid u \in \mathcal{L}^p(X)\}\,.$$

Na $L^p(X)$ definujeme operace

$$[u] + [v] \;=\; [u + v]$$
$$\alpha[u] \;=\; [\alpha u] \qquad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R}$$

a normu

$$\|[u]\|_p \;=\; \|u\|_p.$$

Poznámka: Prvky prostorů $\mathcal{L}^p(X)$ a $L^p(X)$ obvykle nerozlišují zápisem ani pojmenováním.

Definice: Nechť Y je normovaný prostor. Řekněme, že posloupnost $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prvků z Y je **cauchyovská**, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall m, n \in \mathbb{N},\; m, n \ge n_0 \quad \text{platí} \quad \|y_m - y_n\| < \varepsilon.$$

Řekněme, že posloupnost $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konverguje v normě** k prvku $y \in Y$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| \;=\; 0\,,$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N},\; n \ge n_0 \quad \text{platí} \quad \|y_n - y\| < \varepsilon.$$

Definice: Normovaný prostor se nazývá **úplný**, jestliže je v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní (tj. konverguje v normě k nějakému *jeho* prvku).

Poznámka: Zřejmě každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Ne v každém normovaném prostoru však jsou všechny cauchyovské posloupnosti konvergentní.

Věta 3.7 (Úplnost prostorů L^p): Nechť $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ je posloupnost prvků z $L^p(X)$, která je cauchyovská v normě $\|.\|_p$. Pak existuje $f \in L^p(X)$ tak, že $\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\| = 0$. Navíc existuje posloupnost $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vybraná z $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ taková, že $g_k \to f$ skoro všude na X.

Poznámka (prostory l^p): Je-li $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost reálných (příp. komplexních) čísel, položme pro $p \in \langle 1, \infty)$

$$\|(a_n)\|_{l^p} \;=\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}$$

a

$$\|(a_n)\|_{l^\infty} \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Pro $p \in \langle 1, \infty\rangle$ definujeme

$$l^p \;=\; \{(a_n) \mid \|(a_n)\|_{l^p} < \infty\}.$$

Pak $(l^p, \|.\|_{l^p})$ je úplný normovaný prostor.

KAPITOLA 4: Normované prostory

X, Y vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Definice: **Norma** na X je funkce $\|.\| : X \to \langle 0, \infty)$ splňující pro všechna $x, y \in X$

(N1) $\|x\| \;\geq\; 0$

(N2) $\|x\| \;=\; 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; x = \mathbf{0}$

(N3) $\|\alpha x\| \;=\; |\alpha| \cdot \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \;\leq\; \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Dvojici $(X, \|.\|)$ nazýváme **normovaný prostor**.

$\|x\|$ – ,,velikost vektoru x"

$d(x, y) = \|x - y\|$ – ,,vzdálenost x a y"

Platí: $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$.

Značení: $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\} \Big(= \{x \in X \mid d(\mathbf{0}, x) \leq 1\}\Big)$ – **jednotková** (uzavřená) **koule** v X

Definice: Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v X.

(i) Řekneme, že posloupnost (x_n) **konverguje k** $x \in X$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| \;=\; 0.$$

Značíme $\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; x$.

(ii) Řekneme, že posloupnost (x_n) je **cauchyovská**, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall\, n, m \geq n_0 : \;\; \|x_n - x_m\| \;\leq\; \varepsilon.$$

Pozorování: Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Z cauchyovskosti ale obecně konvergence nevyplývá.

Definice: Normovaný prostor $(X, \|.\|)$ je **úplný (Banachův) prostor**, jestliže je v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní.

Definice: Nechť X je normovaný prostor, $x \in X$, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. Řekneme, že x je **součtem řady** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, jestliže

$$x \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n\,.$$

Definice: Nechť X je normovaný prostor. Množina $A \subset X$ se nazývá **omezená**, jestliže existuje $K \geq 0$ tak, že

$$\|x\| \leq K \qquad \forall x \in A.$$

Tvrzení: Každá cauchyovská posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ je omezená.

Definice: Nechť X a Y jsou normované prostory (nad stejným tělesem). Pak zobrazení $f : X \to Y$ definované na $D(f) \subset X$ je **spojité**, jestliže pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ a $x \in D(f)$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, platí

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

neboli

$$x_n \to x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x).$$

Tvrzení: Nechť X, Y jsou normované prostory, $f : X \to Y$ a $\tilde{x} \in X$. Pak jsou ekvivalentní tvrzení:

(i) Pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$, platí

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\tilde{x}).$$

(ii) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové,

$$\|x - \tilde{x}\|_X < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(\tilde{x})\|_Y < \varepsilon.$$

Příklad: Uveďme některé často používané normy na $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$. Pro $x = (x_1, \ldots, x_n)$ definujeme

- $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$,
- $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.
- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$.

Příklad: $M_{m\times n}$ – matice typu $m \times n$. Pro

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \in M_{m\times n}$$

definujeme např.

$$\|A\|_\infty = \max_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_r = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(tedy $\|A\|_r$ je maximální řádkový součet matice A).

Definice: Mějme dvě normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ na prostoru X. Řekněme, že tyto normy jsou **ekvivalentní**, jestliže existují konstanty K_1, $K_2 > 0$ tak, že

$$K_2\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq K_1\|x\|_2 \qquad \forall x \in X.$$

Poznámka: Ekvivalentní normy mají stejnou konvergenci.

Základní principy analýzy v konečné dimenzi:

Bolzano-Weierstrassova věta:
Každá omezená posloupnost v $\mathbb{C}$ (a tedy i v $\mathbb{R}$) má konvergentní podposloupnost.

Princip maxima:
Každá spojitá funkce na uzavřené omezené množině v $\mathbb{C}^n$ (a tedy i v $\mathbb{R}^n$) je omezená a nabývá svého maxima a minima.

Věta : Každé dvě normy na prostoru X konečné dimenze jsou ekvivalentní.

Důsledky : **a)** Každý konečně dimenzionální prostor je úplný.

b) Všechny konvergence na konečně dimenzionálním prostoru jsou stejné a rovnají se konvergenci po souřadnicích vzhledem k dané bázi.

Poznámka : Ekvivalence norem na prostoru nekonečné dimenze neplatí.

Tvrzení : Nechť X je úplný prostor a Y jeho podprostor. Pak Y je úplný právě tehdy, když Y je uzavřený v X (tj. kdykoliv $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$, $y_n \to x \in X$, pak $x \in Y$).

Důsledek : Každý konečně dimenzionální podprostor je uzavřený. Je to totiž kopie úplného prostoru $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$.

Definice : Bod x normovaného (obecněji topologického) prostoru X je bodem **uzávěru** $\overline{M}$ množiny $M \subset X$, jestliže pro každé okolí $U(x)$ bodu x platí $U(x) \cap M \neq \emptyset$.

Poznámka : Uzávěr množiny M v prostoru X je průnik všech uzavřených podmnožin prostoru X, které obsahují M jako svou podmnožinu. Je to tedy nejmenší (ve smyslu inkluze) uzavřená množina v X, jejíž částí je množina M.

KAPITOLA 5: Operátory

Definice : Lineární zobrazení $T : X \to Y$ mezi normovanými prostory (nad stejným tělesem) se nazývá **operátor**.

$T(x)$, Tx – hodnota operátoru T v x
$D(T)$ – definiční obor operátoru T (podprostor prostoru X; neřekneme-li jinak, předpokládáme $D(T) = X$)

Definice : Operátor $T : X \to Y$ je **omezený**, jestliže existuje $K \geq 0$ tak, že

$$\|Tx\| \leq K \qquad \forall x \in B_X$$

(neboli $T(B_X) \subset K \cdot B_Y$). Prostor všech omezených operátorů z prostoru X do prostoru Y značíme $B(X, Y)$. Je-li $X = Y$, používáme zkrácené označení $B(X) := B(X, X)$. Pro $T \in B(X, Y)$ pokládáme

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|.$$

Platí : **1)** Pro omezený operátor $T : X \to Y$ je

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| .$$

2) Je-li $T : X \to Y$ omezený operátor, pak

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \qquad \forall \, x \in X .$$

3) Nechť $T : X \to Y$ je omezený operátor, pak $\|T\|$ je nejmenší konstanta $c \geq 0$ taková, že

$$\|Tx\| \leq c \, \|x\| \qquad \forall \, x \in X .$$

4) $(B(X,Y), \|.\|)$ je normovaný prostor (tj. $\|.\|$ je norma na $B(X,Y)$).

5) Nechť $T \in B(X,Y)$, $U \in B(Y,Z)$. Pak složené zobrazení $UT : X \to Z$ je omezené a platí

$$\|UT\| \leq \|U\| \, \|T\|.$$

Věta : Pro operátor $T : X \to Y$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) $T \in B(X,Y)$.

(ii) T je spojité zobrazení z X do Y.

(iii) T je spojité v nějakém bodě $x_0 \in X$.

Příklad : Nechť X, Y jsou normované prostory konečné dimenze, $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je báze prostoru X a $\mathcal{U} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ je báze prostoru Y. Mějme lineární zobrazení $T : X \to Y$ takové, že

$$T(x_j) \;=\; \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \qquad \text{pro } j = 1, \ldots, n\,.$$

Nechť bod $x \in X$ má vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ souřadnice $\langle x \rangle_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top$ (tj. $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$). Pak

$$Tx \;=\; \alpha_1 T x_1 + \ldots + \alpha_n T x_n \;=\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i \;=\; \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=n}^{m} a_{ij}\, \alpha_j \Big)\, y_i \;=\; \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, \alpha_j \Big)\, y_1 \;+\; \ldots \;+\; \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\, \alpha_j \Big)\, y_m$$

a Tx má vzhledem k bázi $\mathcal{U}$ souřadnice

$$\langle Tx \rangle_{\mathcal{U}} \;=\; \mathbf{A} \cdot \langle x \rangle_{\mathcal{B}}\,,$$

kde $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$ s prvky a_{ij} (tj. $\mathbf{A} \;=\; \big(a_{ij} \big)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$).

Tvrzení : Každý lineární operátor definovaný na prostoru konečné dimenze je omezený (a tedy i spojitý).

Poznámka : Nechť $T : X \to Y$ je lineární operátor. Potom $T(X)$ je podprostor prostoru Y. Je-li $\dim X < \infty$, pak také $\dim T(X) < \infty$. Na operátor T se tedy v tomto případě můžeme dívat jako na operátor mezi prostory konečné dimenze X a $T(X)$.

Definice : **Funkcionál** na normovaném prostoru X je lineární zobrazení $f : X \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$. ($\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$ je tu těleso skalárů prostoru X.)

KAPITOLA 6: Hilbertovy prostory

Definice : **Prostor se skalárním součinem** je dvojice $(V, \langle .\,, . \rangle)$, kde V je lineární prostor a $\langle .\,, . \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ splňuje pro všechna $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ následující podmínky

(i) $\langle x,\, y \rangle \;=\; \overline{\langle y,\, x \rangle}$

(ii) $\langle x + y,\, z \rangle \;=\; \langle x,\, z \rangle + \langle y,\, z \rangle$

(iii) $\langle \alpha x,\, y \rangle \;=\; \alpha \langle x,\, y \rangle$,

(iv) $\langle x,\, x \rangle \;\geq\; 0$

(v) $\langle x,\, x \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathbf{0}$.

Na základě bodu **(i)** je skalární součin v reálném prostoru symetrický.

Poznámka : Jako jednoduché důsledky axiomů dostáváme

$$\begin{aligned} \langle x,\, \alpha y \rangle &= \overline{\alpha} \langle x,\, y \rangle, \\ \langle x,\, y + z \rangle &= \langle x,\, y \rangle + \langle x,\, z \rangle\,. \end{aligned}$$

Značení : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ (později ukážeme, že $\|.\|$ je norma na V)

Definice : Prvky $x, y \in V$ jsou **kolmé (ortogonální)** (značíme $x \perp y$), jestliže

$$\langle x, y\rangle \;=\; 0.$$

Věta (Pythagorova) : Pro $x, y \in V$ platí

$$x \perp y \quad\Rightarrow\quad \|x+y\|^2 \;=\; \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Věta (Geometrický rozklad) : Pro $x, y \in V,\ y \neq \mathbf{0}$ existují jediná $z \in V$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že

$$z \perp y \qquad \text{a} \qquad x \;=\; z + \lambda\, y.$$

(Jde o rozklad x do dvou kolmých směrům, přičemž jeden z nich je zadán.)

Věta (Schwarzova nerovnost) : Pro každé dva prvky x, y prostoru se skalárním součinem V platí

$$|\langle x, y\rangle| \;\le\; \|x\|\,\|y\|\,.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když x, y jsou lineárně závislé.

Důsledek : Pro prostor V se skalárním součinem platí

$$\|x+y\| \;\le\; \|x\| + \|y\|$$

a $\|.\|$ je norma na V.

Tvrzení (Rovnoběžníkové pravidlo) : Pro $x, y \in V$ máme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \;=\; 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Tvrzení : Skalární součin je spojitá funkce, tj.

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ y_n \to y \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle\,.$$

Definice : Úplný prostor se skalárním součinem se nazývá **Hilbertův prostor**.

Nejlepší aproximace

Definice : Nechť X je normovaný prostor, $M \subset X$ a $x \in X$. Potom **vzdálenost bodu x od množiny M** je

$$\operatorname{dist}(x, M) \;=\; \delta(x, M) \;=\; \inf\{\|x-y\| \mid y \in M\}$$

Bod $x_0 \in M$ je **nejbližším bodem** k bodu x, jestliže

$$\|x - x_0\| \;=\; \operatorname{dist}(x, M)\,.$$

Definice : Nechť $x, y \in L$, kde L je lineární prostor. **Úsečkou s krajními body** x, y je množina

$$[x, y] \;=\; \{\lambda x + (1-\lambda) y \,\big|\, 0 \le \lambda \le 1\}\,.$$

Množina $K \subset L$ je **konvexní**, jestliže platí implikace

$$x, y \in K \;\Rightarrow\; [x, y] \subset K.$$

Věta (Nejlepší aproximace) : Nechť K je uzavřená konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Ke každému $x \in H$ existuje jediný nejbližší bod z množiny K.

Značení: Pro $x \in H,\ M, N \subset H$ pokládáme

$$x \perp M \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x,\, y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in M,$$

$$N \perp M \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x,\, y\rangle = 0 \quad \forall\, x \in N,\ \forall\, y \in M,$$

$$M^{\perp} \ = \ \{\, x \in H \mid \ x \perp M \}\,.$$

Pro jakoukoliv podmnožinu $M \subset H$ je množina $M^{\perp}$ uzavřený podprostor prostoru H.

Věta: Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H a $x \in H$. Bod $x_0 \in M$ je nejbližším bodem množiny M k bodu x právě tehdy, když

$$x - x_0 \ \in \ M^{\perp}.$$

Definice: Podprostory V_1 a V_2 lineárního prostoru V tvoří **algebraický rozklad** prostoru V (prostor V je **direktním součtem** podprostorů V_1 a V_2), jestliže

$$V \ = \ \text{lineární obal } \ V_1 \cup V_2 \qquad \text{a} \qquad V_1 \cap V_2 \ = \ \{\mathbf{0}\}.$$

Píšeme

$$V = V_1 \oplus_{\text{lin}} V_2.$$

Ekvivalentně: Pro každé $v \in V$ existují jediné dva prvky $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$ tak, že $v = v_1 + v_2$.

Definice: Prostor V se skalárním součinem je **ortogonální součet** podprostorů V_1 a V_2, jestliže

$$V \ = \ \text{lineární obal } \ V_1 \cup V_2 \qquad \text{a} \qquad V_1 \ \perp \ V_2\,.$$

Píšeme

$$V \ = \ V_1 \oplus V_2.$$

Ekvivalentně: Pro každé $v \in V$ existují jediné dva prvky $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$ tak, že $v = v_1 + v_2$ a $v_1 \perp v_2$.

Věta (Projekční): Je-li M uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H, pak

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Poznámka: Projekční věta nám vlastně říká toto: *Pro každé $x \in H$ je $x = x_M + x_{M^{\perp}}$, kde $x_M \in M$ a $x_{M^{\perp}} \in M^{\perp}$. Aproximace x_M a $x_{M^{\perp}}$ prvku x v M a $M^{\perp}$ jsou určeny jednoznačně a jsou v odpovídajícím podprostoru nejlepší.*

Definice: Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Potom zobrazení $P_M : \ H \to M$ takové, že

$$P_M : \quad x \quad \mapsto \quad x_M \ \text{ - nejlepší aproximace } x \text{ v } M,$$

nazýváme **ortogonální projekce**.

Platí: P_M je omezený lineární operátor, pro který je $\|P_M\| = 1$ a $P_M^2 = P_M$.

Důsledky (projekční věty): **a)** Pro každý vlastní uzavřený podprostor M v Hilbertově prostoru H existuje nenulový vektor $x \in H$ tak, že $x \perp M$.

b) Je-li M uzavřený podprostor, pak pro $M^{\perp\perp} = (M^{\perp})^{\perp}$ platí $M = M^{\perp\perp}$.

c) Je-li A podmnožina H, pak $[A] = A^{\perp\perp}$, kde $[A] \ = \ \overline{\text{lin } A}$.

Poznámka : Předpokládejme, že H je Hilbertův prostor a M jeho podprostor takový, že $M = \operatorname{lin}(e_1, \dots, e_n)$, kde

$$\|e_j\| = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \qquad \text{a} \qquad \langle e_j, e_i \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

(tj. množina $\{e_1, \dots, e_n\}$ je **ortonormální**). Potom pro každé $x \in H$ je

$$P_M(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Je-li M konečně dimenzionální podprostor s obecnou lineární bází $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ a $x \in H$, pak

$$P_M(x) = a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n,$$

kde z podmínek kolmosti $(x - P_M x) \perp \varphi_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$ dostaneme koeficienty $a_1, \dots, a_n$ jako řešení soustavy rovnic

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = \langle x, \varphi_i \rangle \qquad i = 1, \dots, n.$$

Matice této soustavy

$$\big(\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle\big)_{i,j=1,\dots,n}$$

se nazývá **Gramova matice** vektorů $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (obecně ne nutně lineárně nezávislých). V našem případě, kdy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tvoří bázi podprostoru M, je Gramova matice regulární.

Metoda nejmenších čtverců

Uvažujme $H = \mathbb{R}^m$ (m velké). Mějme dánu tabulku naměřených hodnot funkce f

x_1	x_2	$\dots$	x_m	- uzly měření x
f_1	f_2	$\dots$	f_m	- naměřené hodnoty f

Funkci f bychom chtěli aproximovat pomocí lineární kombinace funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, kde $n \ll m$, pro které jsou vektory $(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_1(x_m))$, $\dots$, $(\varphi_n(x_1), \dots, \varphi_n(x_m))$ z $\mathbb{R}^m$ lineárně nezávislé (pak jsou nutně i funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ lineárně nezávislé). Můžeme mít např. $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$, $\varphi_3 = x^2$, $\dots$, $\varphi_n = x^{n-1}$. Hledaná aproximace

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

funkce f by měla minimalizovat střední kvadratickou odchylku

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} |f_j - \varphi(x_j)|^2\Big)^{1/2} = \|(f_1, \dots, f_m) - (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m)\|_2.$$

Jedná se tu o úlohu ortogonální projekce na lineární obal vektorů $(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_1(x_m))$, $\dots$, $(\varphi_n(x_1), \dots, \varphi_n(x_m))$ v $\mathbb{R}^m$.

Zobecnění: V $\mathbb{R}^m$ uvažujeme skalární součin

$$\langle (x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m) \rangle = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i y_i\,,$$

kde $w_i > 0$ jsou váhy určující důležitost daného měření.

Ortonormální báze

Definice : Množina A v prostoru se skalárním součinem V je **ortogonální**, jestliže $\langle x, y \rangle = 0$, kdykoliv $x, y \in A$, $x \neq y$. Množina A je **ortonormální**, jestliže je ortogonální a $\|x\| = 1$ pro všechna $x \in A$.

Poznámka : Nechť V je prostor se skalárním součinem konečné dimenze a $\{e_1, \dots, e_n\}$ je jeho ortonormální báze. Potom pro každá $x, y \in V$ platí

- $x \;=\; \sum_{j=1}^{n} \langle x,\, e_j \rangle\, e_j$ (konečně dimenzionální Fourierův rozklad)

- $||x||^2 \;=\; \sum_{j=1}^{n} |\langle x,\, e_j \rangle|^2,$

- $\langle x,\, y \rangle \;=\; \sum_{j=1}^{n} \langle x,\, e_j \rangle \overline{\langle y,\, e_j \rangle}.$

Konečně dimenzionální Hilbertovy prostory jsou tedy v podstatě l_n^2.

Otázka: Jak je tomu v nekonečné dimenzi?

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces
Nechť $x_1, x_2, ...$ je lineárně nezávislá posloupnost. Nalezněme ortonormální posloupnost $e_1, e_2, \ldots$ tak, že pro všechna n

$$\mathrm{lin}(e_1, \ldots, e_n) \;=\; \mathrm{lin}(x_1, \ldots, x_n) \;:$$

1. krok

$$e_1 = \frac{x_1}{||x_1||}$$

2. krok

$$v_2 = x_2 - P_{\mathrm{lin}(e_1)}(x_2) = x_2 - \langle x_2,\, e_1 \rangle\, e_1$$
$$e_2 = \frac{v_2}{||v_2||}$$

3. krok

$$v_3 = x_3 - P_{\mathrm{lin}(e_1, e_2)}(x_3) = x_3 - \langle x_3,\, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3,\, e_2 \rangle\, e_2$$
$$e_3 = \frac{v_3}{||v_3||}$$

$\vdots$

n-tý krok

$$v_n = x_n - P_{\mathrm{lin}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})}(x_n) = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n,\, e_j \rangle\, e_j$$
$$e_n = \frac{v_n}{||v_n||}$$

Definice : Množina A v normovaném prostoru X je **hustá**, jestliže jejím uzávěrem je celý prostor X, tj. pokud $\overline{A} = X$.

Definice : Normovaný prostor X je **separabilní**, pokud v X existuje spočetná množina $\{x_n \,|\, n \in N\}$ taková, že

$$\overline{\{x_n |\, n \in N\}} \;=\; X$$

(tj. existuje-li v X spočetná hustá podmnožina).

Tvrzení : Normovaný prostor X je separabilní, jestliže existuje spočetná množina $\{y_n \,|\, n \in N\} \subset X$ tak, že

$$\overline{\mathrm{lin}\, \{y_n |\, n \in N\}} \;=\; X.$$

Definice: **Ortonormální báze** (ONB) Hilbertova prostoru H je ortonormální množina A taková, že

$$\overline{\operatorname{lin} A} = H \qquad (\Leftrightarrow A^{\perp} = \{\mathbf{0}\}).$$

Věta: **(1)** Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.
(2) Každá ortonormální množina v Hilbertově prostoru je částí ortonormální báze.
(3) Každá ortonormální množina v separabilním Hilbertově prostoru je spočetná.

Tvrzení: Ať $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru H.

(i) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, kde $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$, konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.

(ii) Pro $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ je $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^2$ („nekonečná Pythagorova věta").

Věta: Ať H je separabilní Hilbertův prostor s ortonormální bází $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, pak pro každé $x \in H$ platí

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,\, e_n\rangle\, e_n \qquad \text{(abstraktní Fourierův rozvoj)}$$

a

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,\, e_n\rangle|^2} \qquad \text{(Parsevalova rovnost).}$$

Věta: Ať $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální posloupnost v Hilbertově prostoru H. Ať P je ortogonální projekce na uzavřený podprostor $\overline{\operatorname{lin}\{f_n \,|\, n = 1, 2, \dots\}}$. Potom

$$Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,\, f_n\rangle\, f_n$$

a

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,\, f_n\rangle|^2 \qquad \text{(Besselova nerovnost).}$$

Důležité aproximační věty

Věta (Weierstrassova): Pro $-\infty < a < b < \infty$ tvoří polynomy hustou množinu v $C\langle a, b\rangle$ (s maximovou normou).

Věta: Je-li $1 \leq p \leq \infty$, $-\infty < a < b < \infty$, pak spojité funkce tvoří hustou množinu v $L^p\langle a, b\rangle$.

Definice: **Nosič funkce** je uzávěr množiny všech bodů, v kterých je funkce nenulová.

Věta: Nekonečně diferencovatelné funkce s omezeným nosičem jsou husté v prostoru $L^p\langle a, b\rangle$, kde $1 \leq p \leq \infty$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Důsledek: Pro $-\infty < a < b < \infty$ platí

(i) Polynomy jsou husté v $L^2\langle a, b\rangle$.

(ii) $\overline{\operatorname{lin}(\mathbf{1}, x, x^2, \dots)} = L^2\langle a, b\rangle$.

Důsledek: Ortogonalizací posloupnosti $\mathbf{1}, x, x^2, \dots$ získáme ONB prostoru $L^2\langle a, b\rangle$, kde $-\infty < a < b < \infty$.

Funkcionály a operátory na Hilbertových prostorech

Věta (Rieszova): Pro každý spojitý lineární funkcionál f na Hilbertově prostoru H existuje právě jeden vektor $y \in H$ tak, že

$$f(x) = \langle x,\, y\rangle \qquad \forall x \in H.$$

Navíc platí $||f|| = ||y||$.

Definice: Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $f \in L^\infty(X)$. Pak operátor $T_f : L^2(X) \to L^2(X)$ definovaný předpisem $T_f g = fg$ nazýváme **multiplikativní operátor**.

Tvrzení: Nechť H, K jsou Hilbertovy prostory a $T : H \to K$ je omezený lineární operátor (tj. $T \in B(H,K)$). Pak existuje jediný operátor $T^* \in B(K,H)$ takový, že

$$\langle Tx,\, y\rangle_K \;=\; \langle x,\, T^*y\rangle_H \qquad \forall\, x \in H,\, y \in K.$$

Definice: Operátor T^* z předchozího tvrzení se nazývá **adjungovaný operátor** k operátoru T.

Platí: Nechť $T \in B(H,K)$. Pak $T^{**}(=\;(T^*)^*\,) \;=\; T$ a $\|T\| \;=\; \|T^*\|$.

Platí: Pravidla pro adjunkci Pro $T, R \in B(H)$ platí

(a) $(T+R)^* \;=\; T^* + R^*$

(b) $(\alpha T)^* \;=\; \overline{\alpha}\, T^*, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$

(c) $(TR)^* \;=\; R^*T^*$

(d) $T^{**} \;=\; T$

Značení: Nechť $T \in B(H)$, potom označíme

$R(T) \;=\; \{Tx \mid x \in H\}$ („range“, obor hodnot operátoru T),

$N(T)\;(=\;\mathrm{Ker}(T)\,) \;=\; \{x \in H \mid Tx = 0\}$ (jádro, nulový prostor operátoru T).

Věta: Nechť $T \in B(H)$. Potom

$$N(T)^\perp \;=\; \overline{R(T^*)}.$$

Poznámka: Máme rozklady

$$H \;=\; N(T) \oplus \overline{R(T^*)} \qquad \text{a} \qquad H \;=\; N(T^*) \oplus \overline{R(T)}\,,$$

pro konečnou dimenzi

$$H \;=\; N(T) \oplus R(T^*) \qquad \text{a} \qquad H \;=\; N(T^*) \oplus R(T)\,.$$

Tedy např. je-li operátor T <u>na</u>, pak je operátor T^* prostý, apod.

Definice: Nechť V je komplexní lineární prostor. Potom $b : V \times V \to \mathbb{C}$ se nazývá **seskvilineární forma**, jestliže pro každá $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

(i) $b(x+y, z) \;=\; b(x,z) + b(y,z)$,
 $b(x, y+z) \;=\; b(x,y) + b(x,z)$,

(ii) $b(\alpha\, x, y) \;=\; \alpha\, b(x,y)$,

(iii) $b(x, \alpha\, y) \;=\; \overline{\alpha}\, b(x,y)$.

Věta (Polarizační identita): Nechť b je seskvilineární forma na V. Potom

$$4\,b(x,y) \;=\; b(x+y,x+y) \;-\; b(x-y,x-y) \;+\; i\left[\,b(x+iy,x+iy) \;-\; b(x-iy,x-iy)\,\right].$$

Důsledek: Je-li b seskvilineární forma na V, pak

$$b(x,x) \;=\; 0 \quad \forall\, x \in V \qquad \Rightarrow \qquad b(x,y) = 0 \quad \forall\, x,\, y \in V.$$

Důsledek: Nechť $T,\, S \in B(H)$, kde H je komplexní Hilbertův prostor. Potom platí:

(i) Jestliže $\langle Tx,\, x\rangle \;=\; 0$ pro každé $x \in H$, pak $T = 0$.

(ii) Jestliže $\langle Tx,\, x\rangle \;=\; \langle Sx,\, x\rangle$ pro každé $x \in H$, pak $T = S$.

Poznámka: Předchozí důsledek neplatí pro reálný prostor.

Definice: Nechť $T \in B(H)$. Pak

(i) T se nazývá **samoadjungovaný**, jestliže $T = T^*$,

(ii) T se nazývá **pozitivní**, jestliže $\langle Tx,\, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$,

(iii) T se nazývá **unitární**, je-li bijekce a přitom $T^{-1} = T^*$ $\quad(\Leftrightarrow \quad T^*T = TT^* = I)$.

Tvrzení: Nechť H je komplexní Hilbertův prostor. Operátor $T \in B(H)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když

$$\langle Tx,\, x\rangle \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in H.$$

Důsledek: Každý pozitivní operátor $T \in B(H)$ na komplexním Hilbertově prostoru H je samoadjungovaný.

Tvrzení: Nechť H je Hilbertův prostor a $x_1, \ldots, x_n \in H$. Potom matice $(\langle x_i,\, x_j\rangle)_{i,j=1,\ldots,n}$ je pozitivně semidefinitní.

Tvrzení: Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in B(H)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) T je unitární.

(ii) T je izometrie (tj. $\|Tx\| = \|x\| \;\; \forall x \in H$) a T je surjektivní .

(iii) T zachovává skalární součin a T je surjektivní.

(Surjektivní zobrazení je zobrazení <u>na</u>.)

Tvrzení: Nechť $T \in B(H)$ je unitární operátor. Pak k němu adjungovaný operátor T^* je také unitární.

Definice: Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazývá **unitární**, pokud je unitární operátor $T \in B(\mathbb{C}^n)$ definovaný předpisem

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \;=\; \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad\qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Tvrzení: Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}$ je unitární matice.

(ii) Sloupcové vektory $s_1, \ldots, s_n$ matice $\mathbf{A}$ tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{C}^n$.

(iii) Řádkové vektory $r_1, \ldots, r_n$ matice $\mathbf{A}$ tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{C}^n$.

Definice: Zobrazení $U : H \to K$ mezi Hilbertovými prostory H a K se nazývá **unitární**, jestliže je bijektivní a zachovává skalární součin. Existuje-li takové zobrazení mezi H a K, nazýváme prostory H a K **izomorfní**.

Věta: Každý separabilní Hilbertův prostor je izomorfní s l^2.

KAPITOLA 7: Spektrální analýza operátorů a matic

Definice : Nechť H je komplexní Hilbertův prostor. Řekneme, že operátor $T \in \mathcal{B}(H)$ je **normální**, jestliže

$$T^*T \;=\; TT^*.$$

Tvrzení : Operátor $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální právě tehdy, když

$$\|Tx\| \;=\; \|T^*x\| \qquad \forall x \in H.$$

Tvrzení : Každý samoadjungovaný, pozitivní nebo unitární operátor je normální.

Definice : **Spektrum**, $\sigma(T)$, operátoru $T \in \mathcal{B}(H)$ je podmnožina $\mathbb{C}$ taková, že

$$\lambda \in \sigma(T) \quad \text{právě tehdy, když} \quad (T - \lambda I) \quad \text{nemá inverzi v } \mathcal{B}(H).$$

Neboli

$$\lambda \notin \sigma(T) \quad \text{právě tehdy, když} \quad \text{existuje } S \in \mathcal{B}(H) \text{ tak, že } S(T - \lambda I) \;=\; (T - \lambda I)S \;=\; I.$$

Hodnotu

$$r(T) \;=\; \sup\{\, |\lambda| \;\big|\; \lambda \in \sigma(T)\,\}$$

nazýváme **spektrální poloměr** operátoru T. **Bodové spektrum** operátoru T je množina

$$\sigma_p(T) \;=\; \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, T - \lambda I \text{ není prostý}\}.$$

Prvek $\lambda \in \sigma_p(T)$ se nazývá **vlastní číslo** operátoru T. Vektor $v \in H \setminus \{\mathbf{0}\}$, pro který platí

$$Tv \;=\; \lambda\, v,$$

se nazývá **vlastní vektor** příslučný vlastnímu číslu λ.

Věta : Každý operátor $T \in B(H)$ má neprázdné spektrum a spektrum je vždy omezená uzavřená množina v $\mathbb{C}$.

Poznámka : Obecně může pro $\lambda \in \mathbb{C}$ platit $\lambda \in \sigma(T)$ ze tří důvodů:

1) Operátor $T - \lambda I$ není prostý. Pak je $\lambda \in \sigma_P(T)$.
2) Operátor $T - \lambda I$ je prostý, ale není na, tj. $R(T) \neq H$. V tomto případě sice existuje operátor $(T - \lambda I)^{-1}$, není ale definovaný na celém H (tedy nemůže být v $B(H)$).
3) Operátor $T - \lambda I$ je prostý i na (tedy inverzní operátor existuje a je definován na celém H), operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ ale není spojitý.

Tvrzení : Nechť $T \in B(H)$, $\dim H < \infty$. Pak $\sigma(T) \;=\; \sigma_P(T)$.

Tvrzení : Nechť operátor $T \in B(H)$ má v $B(H)$ inverzi. Pak

$$\lambda \;\in\; \sigma(T) \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \lambda^{-1} \;\in\; \sigma(T^{-1})\,.$$

Tvrzení : Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální. Pak

(i) $Tx = \lambda x$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C}$ implikuje $T^*x = \overline{\lambda}x$.

(ii) Jestliže $\lambda_1 \neq \lambda_2$, potom $\mathrm{Ker}(T - \lambda_1 I) \perp \mathrm{Ker}(T - \lambda_2 I)$.

Tvrzení: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální operátor. Pak

$$\lambda \notin \sigma(T) \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \text{existuje } c > 0 \text{ tak, že} \quad \|(T - \lambda I)x\| \;\geq\; c\|x\| \quad \forall x \in H.$$

Důsledek: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální. Pak $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když existuje posloupnost jednotkových vektorů $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \lambda x_n\| \;=\; 0.$$

Tvrzení: Je-li $T \in \mathcal{B}(H)$ normální, pak

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx, x\rangle \mid \|x\| = 1\}}.$$

Tvrzení: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$. Pak

(i) T je samoadjungovaný $\Rightarrow$ $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,

(ii) T je pozitivní $\Rightarrow$ $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+ = \langle 0, \infty)$,

(iii) T je unitární $\Rightarrow$ $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Věta: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální. Pak

$$||T|| \;=\; r(T).$$

Spektrální věty

V této části se zaměříme na Hilbertovy prostory konečné dimenze. Připomeňme, že v tomto případě je spektrum operátoru T tvořeno právě jeho vlastními čísly, tj. $\sigma(T) = \sigma_P(T)$.

Věta: Nechť H je Hilbertův prostor, dim $H < \infty$, $T \in B(H)$ je normální operátor. Pak existuje ortonormální báze prostoru H složená z vlastních vektorů operátoru T.

Důsledek: Nechť H je Hilbertův prostor konečné dimenze a $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální operátor. Pak

$$\|T\| \;=\; r(T).$$

Poznámka: Dá se ukázat, že pro obecný operátor $T \in B(H)$ na Hilbertově prostoru konečné dimenze platí

$$\|T\| \;=\; \sqrt{r(T^*T)}.$$

Z tohoto důvodu se také normě operátoru indukované skalárním součinem říká **spektrální norma**. Protože není těžké dokázat, že $\|T^*T\| = \|T\|^2$, vidíme, že uvedená rovnost je zobecněním výsledku, který jsme dostali pro normální operátory.

Věta (Spektrální rozklad): Nechť H je Hilbertův prostor konečné dimenze a $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální operátor. Pak

$$T \;=\; \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k,$$

kde $\lambda_i \in \sigma(T)$ a $P_1, \ldots, P_k$ jsou ortogonální projekce na navzájem kolmé podprostory.

Definice: Operátor $T \in B(H)$ nazýváme **jednoduchý**, jestliže je lineární kombinací ortogonálních projekcí s navzájem kolmými obory hodnot.

Poznámka : Na základě spektrální věty je každý normální operátor na prostoru konečné dimenze jednoduchý. Spektrální teorie pro obecný Hilbertův prostor říká, že jednoduché operátory jsou husté v množině normálních operátorů. Tedy každý normální operátor je limitou jednoduchých operátorů.

Poznámka : Uvažujme operátor $T \in B(H)$. Víme, že pokud je T samoadjungovaný, pak $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, je-li pozitivní, pak $\sigma(T) \subset \langle 0, \infty)$, a konečně v případě unitárního operátoru máme $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$. Pokud je operátor T normální, můžeme uvedené implikace obrátit.

Poznámka : Explicitní tvar konečně dimenzionálního normálního operátoru. Nechť $\dim H < \infty$ a $T \in B(H)$ je normální operátor. Mějme ortonormální bázi $v_1, \ldots, v_n$ složenou z vlastních vektorů, $Tv_i = \lambda_i v_i$. (Vlastní čísla λ_i obecně nemusí být po dvou různá.) Pak pro $x \in H$ platí

$$Tx \;=\; \lambda_1 \langle x, v_1\rangle\, v_1 + \;\ldots\; + \lambda_n \langle x, v_n\rangle\, v_n\,.$$

Věta (Diagonalizace) : Nechť H je Hilbertův prostor konečné dimenze a $(e_i)_{i=1}^n$ jeho ortonormální báze. Nechť $T \in B(H)$ je normální operátor a $\mathbf{T} = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ jeho matice vzhledem k bázi $(e_i)_{i=1}^n$, tj. $t_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle$. Pak existují diagonální matice $\mathbf{D}$ a unitární matice $\mathbf{U}$ takové, že

$$\mathbf{T} \;=\; \mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}\,.$$

Alternativní pohled na kvadratickou formu

Abychom zjednodušili formulace a zápis, nebudeme v této části rozlišovat mezi maticí z $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ a jí odpovídajícím operátorem z $B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$. Pro hermitovsky sdruženou matici k matici $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ a adjungovaný oprátor k operátoru $\mathbf{A} \in B(\mathbb{C}^n)$ budeme používat společné označení $\mathbf{A}^*$. Vektory z $\mathbb{C}^n$ si podle situace představíme zapsané buď jako řádky (při aplikaci operátoru) nebo jako sloupce (při násobení maticí). Je-li matice A typu $m \times n$ reálná, můžeme se na ni dívat jako na omezený operátor z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Analogické úvahy a zjednodušení, jaká jsme provedli výše pro komplexní případ, můžeme provést i pro případ reálný.

Platí : Je-li $\mathbf{A}$ je reálná symetrická matice typu $n \times n$, $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ jsou její vlastní čísla a $g(x) = \langle \mathbf{A}x, x\rangle$, pak

$$\max\{g(x) \,\big|\, \|x\| = 1\} \;=\; \lambda_1$$

a kvadratická forma g této hodnoty nabývá pro všechny jednotkové vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ_1. Podobně

$$\min\{g(x) \,\big|\, \|x\| = 1\} \;=\; \lambda_n$$

a této hodnoty se nabývá ve všech jednotkových vlastních vektorech příslušných k vlastnímu číslu λ_n.

V dalším se pro jednoduchost omezíme na reálný případ.

Definice : Singulární hodnoty matice $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ jsou čísla $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$, kde $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Platí : Je-li $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a $x \in \mathbb{R}^n$, pak

$$\|\mathbf{A}x\|^2 = \langle \mathbf{A}^*\mathbf{A}\, x, x\rangle.$$

Platí : Největší hodnota funkce $h(x) = \|\mathbf{A}x\|$ na jednotkové sféře $\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|x\| = 1\}$ je σ_1 a nabývá se jí právě ve všech vlastních vektorech příslušných k vlastnímu číslu λ_1 operátoru $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Jinými slovy $\|\mathbf{A}\| = \sigma_1$.

Tvrzení (SVD rozklad): Nechť $\mathbf{A}$ je reálná matice typu $m \times n$ a $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0,\ \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$ jsou její singulární hodnoty. Nechť je dále $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^n$ tvořená vlastními vektory operátoru $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^*\mathbf{A}v_i = \sigma_i^2 v_i$, a $\{u_1, \ldots, u_n\}$ je taková ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^m$, že $u_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}v_i$ pro $i = 1, \ldots, r$. Potom

$$\mathbf{A} \;=\; \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^*,$$

kde $\mathbf{U} \in M_m(\mathbb{R})$, $\mathbf{V} \in M_n(\mathbb{R})$ jsou unitární matice

$$\mathbf{U} \;=\; \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \ldots & u_m \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V} \;=\; \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \ldots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

a $\boldsymbol{\Sigma} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ je matice

$$\boldsymbol{\Sigma} \;=\; \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{O}_{r\times(n-r)} \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{O}_{(m-r)\times r} & & \mathbf{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

($\mathbf{O}_{k\times l}$ je tu nulová matice typu $k \times l$). Tedy

$$\mathbf{A} \;=\; \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & \ldots & u_m \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{O}_{r\times(n-r)} \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{O}_{(m-r)\times r} & & \mathbf{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_n & \rightarrow \end{pmatrix}.$$