Ukázka zadání zkoušky z Pokročilé analýzy LS 22/23

1. $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou.
   - Popište konstrukci abstraktního Lebesgueova integrálu.
   - Ukažte, že každá integrovatelná funkce je absolutně integrovatelná.
   - Zformulujte a dokažte větu o integrálu z násobku funkce.

2. - Definice adjungovaného operátoru. Důkaz existence adjunkce.
   - H je Hilbertův prostor, x, $y \in H$. Operátor $T_{x,y} \in B(H)$ je dán předpisem

     $$T_{x,y}(z) = \langle z, y \rangle x, \quad z \in H.$$

     Stanovte $T^*_{x,y}$.
   - Ukažte, že T je samoadjungovaný $\iff$ pro každý unitární operátor U je UTU^* také samoadjungovaný.

3. - Definice spektra a spektrálního poloměru. Věta o spektrálním rozkladu normální matice.
   - $T \in B(H)$ a pro $S \in B(H)$ existuje $S^{-1} \in B(H)$. Ukažte, že STS^{-1} má stejné spektrum jako T.