

## KAPITOLA 2: Abstraktní Lebesgueův integrál

$(X, \mathcal{S}, \mu)$  – prostor s mírou,  $D \in \mathcal{S}$

**s.v.** = skoro všude, **pro skoro všechna** apod. ... až na množinu míry nula

**Poznámka:** Na několika místech v této kapitole použijeme při důkazu nějakého tvrzení linearitu integrálu nebo aditivitu integrálu vzhledem k integračnímu oboru, které budou dokázány až později. Pokud to uděláme, nebude právě dokazované tvrzení k důkazu linearity či aditivity integrálu potřeba. Nepůjde tedy o důkaz v kruhu.

### 2.1 Zavedení a základní vlastnosti

**Připomenutí:** Máme definováno  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ .

#### Konstrukce integrálu

Při konstrukci integrálu postupujeme v několika krocích. definujeme ho nejdříve pro nejjednodušší funkce a od nich pak přecházíme k funkcím obecnějším.

Nechť  $D \in \mathcal{S}$

(1) Je-li  $s$  nezáporná jednoduchá funkce,  $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}$ , kde  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ , pak definujeme

$$\int_D s \, d\mu = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap D).$$

(2) Je-li  $f$  nezáporná  $\mathcal{S}$ -měřitelná funkce na  $D$ , pak definujeme

$$\int_D f \, d\mu = \sup \left\{ \int_D s \, d\mu \mid s \text{ je jednoduchá funkce, } 0 \leq s \leq f \text{ na } D \right\}.$$

(3) Je-li  $f$   $\mathcal{S}$ -měřitelná funkce na  $D$ , pak definujeme

$$\int_D f \, d\mu = \int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu,$$

má-li tento rozdíl smysl (tj. není  $\infty - \infty$ ).

(4) Je-li  $f$   $\mathcal{S}$ -měřitelná na  $D' \subset D$ ,  $\mu(D \setminus D') = 0$  (tedy  $f$  je také  $\mu$ -měřitelná na  $D$ ), definujeme

$$\int_D f \, d\mu = \int_{D'} f \, d\mu,$$

pokud je integrál vpravo definován.

Je-li integrál  $\int_D f \, d\mu$  definován, říkáme, že **má smysl** nebo že  $f$  **má integrál**. Pokud je integrál navíc konečný, říkáme, že  $\int_D f \, d\mu$  **konverguje** nebo že  $f$  **je integrovatelná na  $D$** .

#### Poznámky:

1) Je-li  $f$  integrovatelná, pak nutně  $\int_D f^+ \, d\mu < \infty$ ,  $\int_D f^- \, d\mu < \infty$ , tedy též

$$\int_D |f| \, d\mu = \int_D (f^+ + f^-) \, d\mu = \int_D f^+ \, d\mu + \int_D f^- \, d\mu < \infty.$$

(Použili jsme tu Větu 2.5 o linearitě integrálu, která bude uvedena dále.) To znamená, že pokud je funkce  $f$  integrovatelná, je integrovatelná i  $|f|$ . Tedy každá integrovatelná funkce je **absolutně integrovatelná** (říkáme též, že Lebesgueův integrál je **absolutně konvergentní**). Přitom  $(\int_D f^+ \, d\mu + \int_D f^- \, d\mu) \geq |\int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu|$ , tedy

$$\int_D |f| \, d\mu \geq \left| \int_D f \, d\mu \right|.$$

Tato nerovnost platí zřejmě i v případě, že  $\int_D f \, d\mu$  je nekonečný.

- 2) Definice abstraktního integrálu z jednoduché funkce je korektní, tj. nezávisí na výběru vyjádření funkce  $s$  jako lineární kombinace charakteristických funkcí po dvou disjunktních množin. Je to důsledek tvrzení, které říká, že jsou-li  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$  resp.  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{S}$  po dvou disjunktní,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$  nezáporná čísla a

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j} \leq \sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{B_i},$$

pak

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) \leq \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i).$$

(Tvrzení dokažte jako cvičení.) Je-li tedy

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j} = \sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{B_i},$$

pak

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) \leq \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j),$$

tj.

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i).$$

Dá se dokonce ukázat, že definice  $\int_D s \, d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap D)$  by byla korektní i bez požadavku  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pro  $i \neq j$ . Dokazování je ale nepříjemné, protože společný průnik může mít několik množin.

- 3) Určení  $\int_D f \, d\mu$  pro  $f \geq 0$  jednoduchou podle (1) a (2) dává stejné hodnoty. Je-li totiž  $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$ ,  $0 \leq s \leq f$  na  $D$ ,  $s = \sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{B_i}$ , pak z předchozího dostáváme

$$\int_D s \, d\mu = \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \int_D f \, d\mu.$$

Tedy

$$\sup \left\{ \int_D s \, d\mu \mid s \text{ je jednoduchá funkce, } 0 \leq s \leq f \text{ na } D \right\} = \int_D f \, d\mu.$$

Nyní už si stačí jen uvědomit, že pro  $s = f$  máme  $\int_D s \, d\mu = \int_D f \, d\mu$ .

- 4) Je-li  $D \in \mathcal{S}$ ,  $\mu(D) = 0$ , pak pro každou měřitelnou funkci  $f$  je  $\int_D f \, d\mu = 0$ . V tomto případě je totiž nulový integrál přes  $D$  z každé nezáporné jednoduché funkce.
- 5) Definice integrálu  $\mu$ -měřitelné funkce je korektní, tedy nezávisí na volbě množiny  $D'$  uvedených vlastností. Je to důsledek aditivity integrálu vzhledem k integračnímu oboru (viz Tvrzení 2.6) a předchozí poznámky.
- 6) Je-li  $f$  definována na  $D \in \mathcal{S}$  a  $M \subset D$ ,  $M \in \mathcal{S}$ , pak zřejmě platí

$$\int_M f \, d\mu = \int_D f \chi_M \, d\mu.$$

- 7) Někdy (např. když integrál bude záviset na parametru) budeme psát

$$\int_D f(x) \, d\mu(x) \quad \text{místo} \quad \int_D f \, d\mu.$$

- 8) Pro  $(X, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \lambda_n)$  používáme značení

$$\int_E f \, dx := \int_E f \, d\lambda_n, \quad \int_a^b f \, dx := \int_{(a,b)} f \, d\lambda_1.$$

Index u  $\mathfrak{M}$  a  $\lambda$  označující dimenzi někdy vynecháváme.

- 9) Při výpočtu integrálů používáme tento vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem:

Nechť  $f$  je riemannovsky integrovatelná funkce na  $\langle a, b \rangle$ . Potom Lebesgueův integrál funkce  $f$  od  $a$  do  $b$  (tj. přes  $\langle a, b \rangle$ ) konverguje a je roven integrálu Riemannovu.

**Tvrzení 2.1:** Nechť  $D \in \mathcal{S}$  a funkce  $f, g$  jsou měřitelné na  $D$ . Pak platí

- a) Je-li  $f \geq 0$ ,  $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$ ,  $D_1 \subset D_2 \subset D$ , pak  $\int_{D_1} f \, d\mu \leq \int_{D_2} f \, d\mu$ .
- b) Je-li  $\int_D |f| \, d\mu < \infty$ , pak  $|f| < \infty$  skoro všude na  $D$ .
- c) Je-li  $\int_D |f| \, d\mu = 0$ , pak  $|f| = 0$  skoro všude na  $D$ .
- d) Jestliže  $f, g$  mají integrál přes  $D$  a  $f \leq g$  skoro všude na  $D$ , pak  $\int_D f \, d\mu \leq \int_D g \, d\mu$ . (monotonie integrálu)
- e) Je-li  $\int_D g \, d\mu < \infty$  a  $|f| \leq g$  skoro všude na  $D$ , pak  $f$  je integrovatelná.

**Důkaz:** a) Z našich předpokladů plyne, že  $f\chi_{D_1} \leq f\chi_{D_2}$  na  $D$ , tedy každá jednoduchá funkce, která splňuje  $0 \leq s \leq f\chi_{D_1}$  na  $D$ , splňuje na  $D$  také  $0 \leq s \leq f\chi_{D_2}$ . Odtud už máme

$$\begin{aligned} \int_{D_1} f \, d\mu &= \int_D f\chi_{D_1} \, d\mu = \sup \left\{ \int_D s \, d\mu \mid s \text{ je jednoduchá funkce, } 0 \leq s \leq f\chi_{D_1} \text{ na } D \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_D s \, d\mu \mid s \text{ je jednoduchá funkce, } 0 \leq s \leq f\chi_{D_2} \text{ na } D \right\} = \int_D f\chi_{D_2} \, d\mu = \int_{D_2} f \, d\mu. \end{aligned}$$

b) Předpokládejme, že  $\int_D |f| \, d\mu < \infty$ . Kdyby pro  $M = \{x \in D \mid |f(x)| = \infty\}$  bylo  $\mu(M) > 0$ , pak by pro jednoduché funkce  $s_k = k\chi_M$  platilo  $0 \leq s_k \leq |f|$ , tedy

$$\int_D |f| \, d\mu \geq \int_D s_k \, d\mu = k\mu(M) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

To by ale bylo ve sporu s naším předpokladem  $\int_D |f| \, d\mu < \infty$ . Musí tedy být  $\mu(M) = 0$ .

c) Nechť  $\int_D |f| \, d\mu = 0$ . Označme  $M = \{x \in D \mid |f(x)| > 0\}$  ( $= \{x \in D \mid |f(x)| \neq 0\}$ ). Pak  $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ , kde  $M_k = \{x \in D \mid |f(x)| > \frac{1}{k}\}$ . Pro každé  $k$  je  $\frac{1}{k}\chi_{M_k}$  jednoduchá funkce, pro kterou platí  $0 \leq \frac{1}{k}\chi_{M_k} \leq |f|$  na  $D$ . Tedy

$$0 = \int_D |f| \, d\mu \geq \int_D \frac{1}{k}\chi_{M_k} \, d\mu = \frac{1}{k}\mu(M_k) \geq 0.$$

Odtud dostáváme, že  $\mu(M_k) = 0$  pro každé  $k$ , což už dává díky  $\sigma$ -subaditivitě míry (viz Věta 1.1)  $\mu(M) = 0$ , neboli  $f = 0$  s.v. na  $D$ .

d) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $f \leq g$  všude na  $D$ . Kdyby totiž tato nerovnost platila jen na množině  $D' \subset D$ ,  $\mu(D \setminus D') = 0$ , omezili bychom se na tuto množinu a pak využili toho, že integrály přes  $D$  a  $D'$  jsou stejné (je to důsledek Tvrzení 2.6 uvedeného dále). Nechť tedy  $f \leq g$  na  $D$ . Pro  $0 \leq f \leq g$  tvrzení zřejmě platí. Jsou-li  $f \leq g$  obecné, přejdeme od nich k funkcím  $f^+$ ,  $f^-$ ,  $g^+$  a  $g^-$ , které jsou nezáporné. Pro tyto funkce platí  $f^+ \leq g^+$  a  $f^- \geq g^-$ , a tedy

$$\int_D f^+ \, d\mu \leq \int_D g^+ \, d\mu, \quad \int_D f^- \, d\mu \geq \int_D g^- \, d\mu.$$

Odtud dostáváme

$$\int_D f \, d\mu = \int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu \leq \int_D g^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu \leq \int_D g^+ \, d\mu - \int_D g^- \, d\mu = \int_D g \, d\mu.$$

e) Budeme-li aplikovat d) na dvojice funkcí  $|f| \leq g$ ,  $f^+ \leq |f|$ ,  $f^- \leq |f|$ , dostaneme

$$\infty > \int_D g \, d\mu \geq \int_D |f| \, d\mu \geq \begin{cases} \int_D f^+ \, d\mu, \\ \int_D f^- \, d\mu. \end{cases}$$

Funkce  $f$  má tedy integrál a ten je konečný.  $\square$

Absolutní hodnotu v tvrzení 2.1,c) není možné vynechat a opačná implikace v tvrzení 2.1,d) neplatí. (Najděte vhodné protipříklady jako cvičení.) Platí ale toto:

**Důsledek 2.2:** a) Jestliže  $\int_E f \, d\mu = 0$  pro každou měřitelnou množinu  $E \subset D \in \mathcal{S}$ , pak  $f = 0$  s.v. na  $D$ .

b) Nechť  $f$  a  $g$  jsou integrovatelné na  $D \in \mathcal{S}$ . Jestliže  $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$  pro každou měřitelnou množinu  $E \subset D$ , pak  $f \leq g$  s.v. na  $D$ .

**Důkaz:** a) Pro  $E^+ = \{x \in D \mid f(x) > 0\} \in \mathcal{S}$  máme

$$0 = \int_{E^+} f \, d\mu = \int_{E^+} f^+ \, d\mu = \int_{E^+} |f^+| \, d\mu.$$

To podle Tvzení 2.1,c) znamená, že funkce  $f^+ = 0$  s.v. na  $E^+$ . Přitom z definice  $E^+$  je funkce  $f^+$  na  $X \setminus E^+$  nulová. Celkem tak dostáváme  $f^+ = 0$  s.v. na  $D$ . Obdobně dokážeme  $f^- = 0$  s.v. na  $D$ .

b) Označme  $h = (f - g)^+$ . Chceme ukázat, že  $h = 0$  s.v. na  $D$ . Položme tentokrát  $E^+ = \{x \in D \mid h(x) > 0\} \in \mathcal{S}$ . Protože  $h \geq 0$ , máme při využití linearit integrálu (viz Věta 2.5 dále)

$$0 \leq \int_D |h| \, d\mu = \int_D h \, d\mu = \int_{E^+} h \, d\mu = \int_{E^+} (f - g) \, d\mu = \int_{E^+} f \, d\mu - \int_{E^+} g \, d\mu \leq 0, \quad \text{tj.} \quad \int_D |h| \, d\mu = 0.$$

To ale podle Tvzení 2.1,c) znamená, že  $h = 0$  s.v. na  $D$ , čili  $f \leq g$  s.v. na  $D$ .  $\square$

**Věta 2.3 (Leviho o monotonní konvergenci):** Nechtě  $(f_j)_{j=1}^\infty$  je posloupnost měřitelných funkcí na  $D \in \mathcal{S}$ ,  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  a  $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$ . Potom

$$\int_D f \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu.$$

**Poznámka:** Předpoklad  $0 \leq f_1$  ve Větě 2.3 lze nahradit předpokladem  $\int_D f_1 \, d\mu > -\infty$ .

**Důkaz:** Dokážeme jen jednodušší nerovnost

$$\int_D f \, d\mu \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu.$$

Protože  $f_j \nearrow f$ , kdykoliv pro  $s$  jednoduchou platí  $0 \leq s \leq f_j$  pro nějaké  $j$ , platí pro ni také  $0 \leq s \leq f_n$  pro každé  $n \geq j$  a  $0 \leq s \leq f$ . Tedy pro každé  $j$  a  $n > j$  máme

$$\int_D f_j \, d\mu \leq \int_D f_n \, d\mu \quad \text{a} \quad \int_D f_j \, d\mu \leq \int_D f \, d\mu$$

(v definici integrálu vždy bereme vlevo supremum přes obecně větší množinu). Vzhledem k první nerovnosti je posloupnost  $(\int_D f_j \, d\mu)_{j=1}^\infty$  neklesající, a má tak limitu. Z druhé nerovnosti pak dostáváme, že je tato limita nejvýše rovna  $\int_D f \, d\mu$ .  $\square$

**Důsledek 2.4 (Spojitá závislost na integračním oboru):** Nechtě  $D, E_k \in \mathcal{S}$ ,  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ ,  $\bigcup_{k=1}^\infty E_k = D$  a  $f$  je nezáporná měřitelná funkce na  $D$ . Potom

$$\int_D f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f \, d\mu.$$

**Důkaz:** Leviho větu 2.3 použijeme na funkce  $f_k = f \chi_{E_k}$ .  $\square$

**Věta 2.5 (Linearita integrálu):**

a) Nechtě funkce  $f$  a  $g$  jsou měřitelné na  $D \in \mathcal{S}$ . Potom

$$\int_D (f + g) \, d\mu = \int_D f \, d\mu + \int_D g \, d\mu,$$

má-li pravá strana smysl.

b) Nechtě  $f$  je měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ . Pokud má  $f$  integrál, pak

$$\int_D \tau f \, d\mu = \tau \int_D f \, d\mu.$$

**Důkaz:** Část a) dokážeme v několika krocích. Předpokládejme nejdříve, že  $f$  a  $g$  jsou nezáporné jednoduché funkce na  $D$ ,

$$f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i} \quad \text{a} \quad g = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{B_j},$$

kde  $\{A_1, \dots, A_m\}$ ,  $\{B_1, \dots, B_n\}$  tvoří rozklady množiny  $D$ . Systém množin  $\{A_i \cap B_j\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$  tvoří také rozklad množiny  $D$  a na množině  $D$  platí

$$f + g = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n \chi_{(A_i \cap B_j)} + \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^m \chi_{(A_i \cap B_j)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j) \chi_{(A_i \cap B_j)}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \int_D (f + g) d\mu &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \underbrace{\sum_{j=1}^n \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(A_i)} + \sum_{j=1}^n \beta_j \underbrace{\sum_{i=1}^m \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(B_j)} \\ &= \int_D f d\mu + \int_D g d\mu. \end{aligned}$$

Nechť jsou nyní  $f$  a  $g$  nezáporné měřitelné funkce na  $D$ . Podle Věty 1.19 existují posloupnosti  $(f_n)_{n=1}^\infty$ ,  $(g_n)_{n=1}^\infty$  nezáporných jednoduchých funkcí na  $D$  takových, že  $f_n \nearrow f$ ,  $g_n \nearrow g$  na  $D$ . Zřejmě  $(f_n + g_n) \nearrow (f + g)$  na  $D$ . Aplikací Leviho věty o monotonní konvergenci (Věta 2.3) dostáváme

$$\int_D f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\mu, \quad \int_D g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D g_n d\mu, \quad \int_D (f + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D (f_n + g_n) d\mu.$$

Protože jsou funkce  $f_n$  a  $g_n$  jednoduché, máme podle první části důkazu  $\int_D (f_n + g_n) d\mu = \int_D f_n d\mu + \int_D g_n d\mu$ , a tedy

$$\int_D (f + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_D f_n d\mu + \int_D g_n d\mu \right).$$

Integrály  $\int_D f_n d\mu$  a  $\int_D g_n d\mu$  jsou pro každé  $n \in \mathbb{N}$  nezáporné, tedy jsou nezáporné i jejich limity, které tím umíme sečíst a můžeme aplikovat větu o limitě součtu. Tím dostaneme požadovanou rovnost pro případ nezáporných měřitelných funkcí.

Uvažujme nyní obecné měřitelné funkce  $f$  a  $g$ , pro které má součet  $\int_D f d\mu + \int_D g d\mu$  smysl. Protože má součet integrálů smysl, jsou integrály  $\int_D f d\mu$  a  $\int_D g d\mu$  definovány a navíc jsou nutně oba  $> -\infty$  nebo oba  $< +\infty$ . Budeme předpokládat, že nastává první možnost. Z definice integrálu jsou pak oba integrály  $\int_D f^- d\mu$  a  $\int_D g^- d\mu$  konečné. To znamená, že funkce  $f^-$  a  $g^-$  jsou konečné skoro všude a funkce  $f$  a  $g$  nabývají skoro všude hodnot větších než  $-\infty$ . Tím je ovšem skoro všude definován součet  $f + g$  a tento součet je také skoro všude  $> -\infty$ . Protože integrály přes množiny, které se liší o množinu míry nula, jsou stejné, můžeme v dalším bez újmy na obecnosti pro jednoduchost předpokládat, že funkce  $f$ ,  $g$  a  $f + g$  mají výše zmíněné vlastnosti všude na  $D$ . Pro součet funkcí  $f$  a  $g$  platí  $f + g = (f + g)^+ - (f + g)^-$  a také  $f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$ . Tedy

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Podle našeho předpokladu nabývají funkce  $f^-$ ,  $g^-$  a  $(f + g)^-$  jen konečných hodnot, tedy je můžeme přičíst k oběma stranám uvedené rovnosti. Dostaneme tak

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f + g)^-.$$

Nyní máme na obou stranách rovnosti součty nezáporných měřitelných funkcí a pro ty už máme dokázáno, že integrál z jejich součtu je roven součtu jejich integrálů. Tedy

$$\int_D (f + g)^+ d\mu + \int_D f^- d\mu + \int_D g^- d\mu = \int_D f^+ d\mu + \int_D g^+ d\mu + \int_D (f + g)^- d\mu.$$

Integrály ze záporných částí funkcí  $f$ ,  $g$  a  $f + g$  jsou konečné, tedy je můžeme od obou stran poslední rovnosti odečíst. Dostaneme tak

$$\int_D (f + g)^+ d\mu - \int_D (f + g)^- d\mu = \left( \int_D f^+ d\mu - \int_D f^- d\mu \right) + \left( \int_D g^+ d\mu - \int_D g^- d\mu \right),$$

neboli

$$\int_D (f + g) d\mu = \int_D f d\mu + \int_D g d\mu,$$

což jsme potřebovali dokázat. Kdyby byly oba integrály  $\int_D f d\mu$  a  $\int_D g d\mu$  menší než  $+\infty$ , postupovali bychom analogicky. Tím je tvrzení **a)** dokázáno.

Podívejme se nyní na tvrzení **b)**. Pro  $\tau = 0$  rovnost triviálně platí. Uvažujme nyní  $\tau > 0$ ,  $f \geq 0$ . Nechť pro jednoduchou funkci  $s$  platí  $s = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{B_j}$  a  $0 \leq s \leq f$ . Pak pro jednoduchou funkci  $\tau s = \sum_{j=1}^n (\tau \beta_j) \chi_{B_j}$  máme  $0 \leq \tau s \leq \tau f$ , tedy

$$\int_D \tau f d\mu \geq \int_D \tau s d\mu = \sum_{j=1}^n (\tau \beta_j) \mu(B_j) = \tau \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j) = \tau \int_D s d\mu.$$

Odtud

$$\int_D \tau f d\mu \geq \sup_{\substack{0 \leq s \leq f \\ s \text{ jednoduchá}}} (\tau \int_D s d\mu) = \tau \sup_{\substack{0 \leq s \leq f \\ s \text{ jednoduchá}}} (\int_D s d\mu) = \tau \int_D f d\mu.$$

Opačnou nerovnost získáme tak, že výše uvedený postup použijeme pro  $\tilde{\tau} = \frac{1}{\tau}$  a  $\tilde{f} = \tau f$ . Dostaneme tím odhad

$$\tau \int_D f d\mu = \tau \int_D \tilde{\tau} \tilde{f} d\mu \geq \tau \tilde{\tau} \int_D \tilde{f} d\mu = \int_D \tilde{f} d\mu = \int_D \tau f d\mu.$$

Pokud bude  $\tau > 0$  a  $f$  obecná měřitelná funkce, využijeme toho, že

$$(\tau f)^+ = \tau f^+, \quad (\tau f)^- = \tau f^-,$$

přičemž funkce  $f^+$  a  $f^-$  jsou nezáporné měřitelné. Konečně případ  $\tau < 0$  převedeme pomocí vztahů

$$(\tau f)^+ = ((\underbrace{-\tau}_{>0})(-f))^+ = (-\tau)(-f)^+ = (-\tau)f^- \quad \text{a} \quad (\tau f)^- = \dots = (-\tau)f^+$$

na už vyřešený případ kladného násobku.  $\square$

**Tvrzení 2.6:** Nechť  $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$ ,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ,  $D_1 \cup D_2 = D$ . Pak

$$\int_D f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu,$$

pokud má některá strana smysl.

**Poznámka:** Všimněte si, že podle tohoto tvrzení existence integrálu vlevo stačí k tomu, aby existovaly oba integrály vpravo a byl definován jejich součet. V první části věty o linearitě integrálu existence integrálu součtu dvou funkcí ještě nezaručovala, že integrály obou funkcí budou existovat a že je bude možné sečíst. Věta o linearitě integrálu ale mluví o podstatně obecnějších funkcích, než na které ji budeme aplikovat v důkazu našeho tvrzení.

**Důkaz:** a) Nechť je nejdřív definován součet vpravo. Pak podle Věty 2.5 o linearitě integrálu

$$\begin{aligned} \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu &= \int_D f \chi_{D_1} d\mu + \int_D f \chi_{D_2} d\mu = \int_D (f \chi_{D_1} + f \chi_{D_2}) d\mu \\ &= \int_D f (\chi_{D_1} + \chi_{D_2}) d\mu = \int_D f \chi_D d\mu = \int_D f d\mu. \end{aligned}$$

Integrál vlevo je tedy definován a rovnost platí.

b) Nechť je nyní definován integrál  $\int_D f d\mu$ . Protože jsou funkce  $f^+$  a  $f^-$  nezáporné, jsou definovány integrály  $\int_{D_1} f^+ d\mu$ ,  $\int_{D_2} f^+ d\mu$ ,  $\int_{D_1} f^- d\mu$ ,  $\int_{D_2} f^- d\mu$  a jsou nezáporné. Tedy jsou podle části a) důkazu také definovány součty  $\int_{D_1} f^\pm d\mu + \int_{D_2} f^\pm d\mu = \int_D f^\pm d\mu$  a platí

$$\int_D f d\mu = \int_D f^+ d\mu - \int_D f^- d\mu \stackrel{\text{a)}}{=} \left( \int_{D_1} f^+ d\mu + \int_{D_2} f^+ d\mu \right) - \left( \int_{D_1} f^- d\mu + \int_{D_2} f^- d\mu \right).$$

Protože je výraz vpravo definován, musí být oba integrály funkce  $f^+$  nebo oba integrály funkce  $f^-$  konečné. Tedy integrály  $\int_{D_1} f \, d\mu$  a  $\int_{D_2} f \, d\mu$  existují a nejsou to nekonečna různých znamének. To ale znamená, že můžeme výraz vpravo přezávkovat, čímž dostaneme požadovanou rovnost

$$\int_D f \, d\mu = \left( \int_{D_1} f^+ \, d\mu - \int_{D_1} f^- \, d\mu \right) + \left( \int_{D_2} f^+ \, d\mu - \int_{D_2} f^- \, d\mu \right) = \int_{D_1} f \, d\mu + \int_{D_2} f \, d\mu.$$

□

Nyní nás budou zajímat funkce, jejichž integrály konvergují. Položme

$$(\mathcal{L}^1 =) \mathcal{L}^1(\mu) = \left\{ f \mid \int_X f \, d\mu \text{ konverguje} \right\}.$$

Pro  $\mathcal{L}^1(\mu)$  z předchozího dostáváme:

**Tvrzení 2.7 (Vlastnosti  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ):**

- a) Je-li  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , pak  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$  a  $\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$ .
- b) Je-li  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , pak  $|f| < \infty$  s.v. na  $X$ .
- c) Je-li  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , pak  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  (tj.  $\mathcal{L}^1(\mu)$  je lineární prostor) a platí

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu.$$

- d) Pro  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  je  $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .
- e) Je-li  $f$  měřitelná,  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ,  $|f| \leq g$  s.v., pak  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .

**Důkaz:** Části a), b), c) a e) jsou postupně důsledky Poznámky 1) za definicí integrálu, Tvrzení 2.1, b), Věty 2.5 a Tvrzení 2.1, e). K důkazu d) přepíšeme nejdříve  $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ ,  $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$  a pak použijeme vlastnosti a) a c) prostoru  $\mathcal{L}^1(\mu)$ . □

## 2.2 Záměna limity a integrálu

(Mezi tyto věty patří také Leviho věta o monotonní konvergenci – viz Věta 2.3)

**Vsuvka:** Limes superior a limes inferior posloupnosti  $(a_j)_{j=1}^\infty$  jsou definovány vztahy

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} a_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \inf_{i \geq j} \{a_i\} \right), \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} a_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \sup_{i \geq j} \{a_i\} \right).$$

Tedy zřejmě vždy platí

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} a_j \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} a_j$$

a rovnost nastává právě tehdy, když existuje limita posloupnosti  $(a_j)_{j=1}^\infty$ . V tom případě jsou jí  $\liminf_{j \rightarrow \infty} a_j$  a  $\limsup_{j \rightarrow \infty} a_j$  rovný, tedy

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} a_j = \liminf_{j \rightarrow \infty} a_j = a \quad \text{právě tehdy, když existuje } \lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a.$$

**Lemma 2.8 (Fatouovo):** Necht'  $D \in \mathcal{S}$  a  $(f_j)_{j=1}^\infty$  je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na  $D$ . Pak

$$\int_D \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \, d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu.$$

**Důkaz:** Funkce  $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$  je podle Věty 1.17 měřitelná. Pro  $j \in \mathbb{N}$  položme  $g_j = \inf\{f_i \mid i \geq j\}$ . Funkce  $g_j$  jsou nezáporné měřitelné, tedy mají integrál. Dále pro všechna  $l \geq j$  platí  $g_j \leq f_l$ , tedy z monotonie integrálu dostáváme

$$\int_D g_j \, d\mu \leq \int_D f_l \, d\mu \quad \text{pro každé } l \geq j.$$

To ale znamená, že

$$\int_D g_j \, d\mu \leq \inf_{l \geq j} \int_D f_l \, d\mu.$$

Protože pro posloupnost funkcí  $(g_j)_{j=1}^\infty$  platí  $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$  a z definice limes inferior máme

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g_j = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j,$$

můžeme použít Leviho větu 2.3 o monotonní konvergenci a dostaneme

$$\int_D \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \, d\mu = \int_D \lim_{j \rightarrow \infty} g_j \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_D g_j \, d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \inf_{l \geq j} \int_D f_l \, d\mu \right) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu.$$

Tím jsme lemma dokázali.  $\square$

**Věta 2.9 (Lebesgueova o majorizované konvergenci):** Nechť  $D \in \mathcal{S}$  a  $f, f_j, j = 1, 2, \dots$ , jsou měřitelné funkce na  $D$ . Nechť posloupnost  $(f_j)_{j=1}^\infty$  konverguje s.v. na  $D$  k  $f$  a existuje integrovatelná (na  $D$ ) funkce  $g$  (tzv. **majoranta**) tak, že

$$|f_j(x)| \leq g(x) \quad \text{pro každé } j \in \mathbb{N} \text{ a s.v. } x \in D.$$

Potom

$$\int_D f \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu.$$

**Důkaz:** a) Předpokládejme, že  $f_j \rightarrow f$  na  $D$  všude a že jsou funkce konečné. Podle Tvzení 2.1,e) jsou funkce  $f_j, f$  integrovatelné. Z předpokladů věty jsou funkce  $g + f_j, g - f_j$  nezáporné,  $(g + f_j) \rightarrow g + f, (g - f_j) \rightarrow g - f$ . Tedy podle Fatouova lemmatu 2.8 a vsuvky na začátku tohoto odstavce máme

$$\underbrace{\int_D \liminf_{j \rightarrow \infty} (g + f_j) \, d\mu}_{g + f} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \underbrace{\int_D (g + f_j) \, d\mu}_{\int_D g \, d\mu + \int_D f_j \, d\mu},$$

$$\int_D g \, d\mu + \int_D f \, d\mu \leq \int_D g \, d\mu + \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu$$

tedy

$$\int_D f \, d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu.$$

Podobně dostaneme

$$\underbrace{\int_D \liminf_{j \rightarrow \infty} (g - f_j) \, d\mu}_{g - f} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \underbrace{\int_D (g - f_j) \, d\mu}_{\int_D g \, d\mu - \int_D f_j \, d\mu},$$

$$\int_D g \, d\mu - \int_D f \, d\mu \leq \int_D g \, d\mu - \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu$$

odkud vyplývá, že

$$\int_D f \, d\mu \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu.$$

Kombinace obou předchozích výsledků a vztah mezi limes superior a limes inferior nám dávají

$$\int_D f \, d\mu \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu \geq \int_D f \, d\mu.$$

Tedy

$$\int_D f \, d\mu = \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu = \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu.$$

**b)** Pokud  $f_j \rightarrow f$ ,  $|f_j| \leq g$  na  $D' \in \mathcal{S}$ ,  $D' \subset D$ ,  $\mu(D \setminus D') = 0$  a  $|g| < \infty$  na  $D'' \in \mathcal{S}$ ,  $D'' \subset D$ ,  $\mu(D \setminus D'') = 0$  (z integrovatelnosti  $g$  taková  $D''$  existuje), pak  $f_j \rightarrow f$  na  $D' \cap D''$ ,  $|f_j| \leq g$  na  $D' \cap D''$ , kde  $\mu(D \setminus (D' \cap D'')) = \mu((D \setminus D') \cup (D \setminus D'')) = 0$ . Tedy podle **a)**

$$\int_D f \, d\mu = \int_{D' \cap D''} f \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{D' \cap D''} f_j \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu.$$

Tím jsme důkaz dokončili.  $\square$

**Poznámka:** Rovnost  $\int_D (\lim_{j \rightarrow \infty} f_j) \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \int_D f_j \, d\mu \right)$  obecně neplatí. Necht' například

$$D = (0, 1), \quad f_j = j^2 e^{-jx}.$$

Pak máme  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = 0$ , tedy

$$\int_D \lim_{j \rightarrow \infty} f_j \, d\mu = 0.$$

Přitom ale platí

$$\int_D f_j \, d\mu = \int_0^1 j^2 e^{-jx} \, dx \stackrel{y=jx}{=} -j \int_0^j e^{-y} \, dy = j \int_{-j}^0 e^y \, dy = j(1 - e^{-j}) \rightarrow \infty \quad \text{pro } j \rightarrow \infty.$$

Tedy

$$\int_D \lim_{j \rightarrow \infty} f_j \, d\mu \neq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu.$$

Problém je tu v tom, že zde nemáme ani monotonní, ani majorizovanou konvergenci.

**Věta 2.10 (Leviho pro řady):** Necht'  $D \in \mathcal{S}$  a  $g_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , jsou funkce měřitelné na  $D$ . Pak

$$\int_D \sum_{j=1}^{\infty} g_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_D g_j \, d\mu.$$

**Důkaz:** Označme

$$f_k = \sum_{j=1}^k g_j \geq 0 \quad \text{a} \quad f = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$$

(protože jsou funkce  $g_j$  nezáporné, jejich součet, tedy funkce  $f$ , existuje). Protože  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  a  $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ , máme podle Leviho věty 2.3 o monotonní konvergenci

$$\int_D \sum_{j=1}^{\infty} g_j \, d\mu = \int_D f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D f_k \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D \sum_{j=1}^k g_j \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_D g_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_D g_j \, d\mu. \quad \square$$

**Věta 2.11 (Lebesgueova pro řady):** Necht'  $(h_j)_{j=1}^{\infty}$  je posloupnost měřitelných funkcí na  $D \in \mathcal{S}$   $g$  je integrovatelná funkce na  $D$ . Jestliže

$$\left| \sum_{j=1}^n h_j(x) \right| \leq g(x) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

a řada  $\sum_{j=1}^{\infty} h_j$  konverguje s.v. na  $D$ , pak

$$\int_D \sum_{j=1}^{\infty} h_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_D h_j \, d\mu.$$

**Důkaz:** Postupujeme stejně jako v důkazu Leviho věty pro řady, jen převádíme na Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci.  $\square$

## 2.3 Střední hodnota náhodné veličiny

**Definice:** Necht'  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor (tj. je to prostor s mírou, v kterém  $P(\Omega) = 1$ ). Pak

- $\mathcal{A}$ -měřitelnou funkci  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme **náhodná veličina**,
- integrál z náhodné veličiny  $X$  vzhledem k míře  $P$  (pokud existuje) nazýváme **střední hodnota** náhodné veličiny  $X$  a značíme jej  $EX$ , tj.

$$EX = \int_{\Omega} X \, dP \quad \left( = \int_{\Omega} X(\omega) \, dP(\omega) \right),$$

- **distribuční funkci**  $F_X$  náhodné veličiny  $X$  definujeme vztahem

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) \quad \left( = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Věta 2.12\* (Čebyševova nerovnost):** Necht'  $X$  je náhodná veličina s konečným rozptylem  $\text{var } X = E(X - EX)^2$ . Pak pro libovolné  $\varepsilon > 0$  platí

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var } X}{\varepsilon^2}.$$

**Důkaz:** Označme si pro zpřehlednění zápisu  $Y = |X - EX|$ . Pak můžeme psát

$$\text{var } X = E(X - EX)^2 = EY^2 = \int_{\Omega} Y^2 \, dP \geq \int_{\{\omega \mid Y(\omega) \geq \varepsilon\}} Y^2 \, dP \geq \int_{\{\omega \mid Y(\omega) \geq \varepsilon\}} \varepsilon^2 \, dP = \varepsilon^2 P(Y \geq \varepsilon) = \varepsilon^2 P(|X - EX| \geq \varepsilon).$$

První nerovnost je tu důsledkem nezápornosti  $Y$ , druhá monotonie integrálu – viz Tvzení 2.1 a), d).  $\square$

### Střední hodnota diskrétní a absolutně spojitě náhodné veličiny

**Definice:** Řekneme, že náhodná veličina je **diskrétní** (má **diskrétní rozdělení**), pokud existují posloupnost reálných čísel  $(x_n)_{n \in \mathcal{N}_0}$  ( $\mathcal{N}_0 \subset \mathbb{N}$ ) a posloupnost kladných čísel  $(p_n)_{n \in \mathcal{N}_0}$  takové, že

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_0} p_n = 1$$

a

$$p_n = P(\{X = x_n\}) \quad \left( = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_n\}) \right).$$

**Poznámka:** Pro distribuční funkci diskrétní náhodné veličiny  $X$  zřejmě máme

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = \sum_{\substack{n \in \mathcal{N}_0 \\ x_n \leq x}} p_n.$$

**Platí:** Jestliže je  $X$  diskrétní náhodná veličina, pak

$$EX = \sum_{n \in \mathcal{N}_0} x_n p_n.$$

**Důkaz:** Pokud je  $X \geq 0$ , pak zřejmě

$$X = \sum_{n \in \mathcal{N}_0} x_n \chi_{\{X=x_n\}}.$$

Pro  $K \in \mathbb{N}$  položme

$$X_K = \sum_{\substack{n \in \mathcal{N}_0 \\ n \leq K}} x_n \chi_{\{X=x_n\}}.$$

Pak  $0 \leq X_K \nearrow X$  a podle Leviho věty 2.3 o monotónní konvergenci máme

$$\int_{\Omega} X \, dP = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_K \, dP = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n \in \mathcal{N}_0 \\ n \leq K}} x_n \int_{\Omega} \chi_{\{X=x_n\}} \, dP = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n \in \mathcal{N}_0 \\ n \leq K}} x_n \underbrace{P(\{X=x_n\})}_{p_n} = \sum_{n \in \mathcal{N}_0} x_n p_n.$$

Náhodnou veličinu  $X$ , která není nezáporná, si přepíšeme ve tvaru  $X = X^+ - X^-$  a na  $X^+$  a  $X^-$  aplikujeme předchozí postup.  $\square$

**Definice :** Řekneme, že náhodná veličina je **absolutně spojitá** (má **absolutně spojité rozdělení**), pokud existuje nezáporná borelovsky měřitelná funkce  $f$  taková, že

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Funkci  $f$  pak nazýváme **hustota** náhodné veličiny  $X$ .

**Platí:** Jestliže je  $X$  absolutně spojitá náhodná veličina, pak

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt.$$

**Důkaz:** Dá se ukázat, že pokud je  $X$  absolutně spojitá náhodná veličina, pak pro každou borelovskou funkci  $\Phi$  platí

$$\underbrace{\int_{\Omega} (\Phi \circ X) dP}_{\int_{\Omega} \Phi(X(\omega)) dP(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) f(t) dt.$$

(Funkce  $\Phi$  se nazývá borelovská, jestliže pro každou borelovskou množinu  $G$  je  $\Phi^{-1}(G)$  borelovská množina.) Tedy speciálně pro  $\Phi : t \mapsto t$  dostáváme

$$EX = \int_{\Omega} X dP = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt.$$

**Poznámka:** Podobně jako v předchozím důkazu dostaneme pro náhodnou veličinu  $Y = X^k$  a funkci  $\Phi : t \mapsto t^k$

$$EY = \int_{\Omega} Y dP = \int_{\Omega} X^k dP = \int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t) dt.$$

Tedy

$$EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t) dt.$$

□

## 2.4 Součin měr a Fubiniova věta

**Definice :** Nechtě  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou a míry  $\mu$  a  $\nu$  jsou  $\sigma$ -konečné. Označme

$$\mathcal{S} \times \mathcal{T} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}\}.$$

Prvky množiny  $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$  nazýváme **měřitelné obdélníky**. Na  $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$  definujeme množinovou funkci

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

$\sigma$ -algebru  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} = \sigma(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$  (tj.  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  je  $\sigma$ -algebra generovaná systémem množin  $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ ) nazýváme **součinnová  $\sigma$ -algebra**.

**Věta 2.15:** Nechtě  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou a míry  $\mu$  a  $\nu$  jsou  $\sigma$ -konečné. Potom existuje právě jedna míra  $\mu \otimes \nu$  na  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  (tzv. **součin měr**  $\mu$  a  $\nu$ ) taková, že

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \quad \text{pro každé } A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}.$$

Zúplnění míry  $(\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \nu)$  nazýváme **úplný součin měr** a značíme ho  $(\overline{\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}}, \overline{\mu \otimes \nu})$ .

**Značení:** Nechtě  $M \subset X \times Y$ . Množiny

$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in Y \mid (x, y) \in M\}, & x \in X \\ M^{*,y} &= \{x \in X \mid (x, y) \in M\}, & y \in Y \end{aligned}$$

nazýváme **řezy**.

**Tvrzení 2.16:** Necht'  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory se  $\sigma$ -konečnou mírou. Necht'  $M$  je  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ -měřitelná množina. Potom pro každé  $x \in X$  ( $y \in Y$ ) je množina  $M^{x,*}$   $\mathcal{T}$ -měřitelná (množina  $M^{*,y}$   $\mathcal{S}$ -měřitelná), funkce  $x \mapsto \nu(M^{x,*})$  ( $y \mapsto \mu(M^{*,y})$ ) je měřitelná a

$$(\mu \otimes \nu)(M) = \int_X \nu(M^{x,*}) \, d\mu \quad \left( = \int_Y \mu(M^{*,y}) \, d\nu \right).$$

**Věta 2.17 (Fubiniova):** Necht'  $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s úplnou  $\sigma$ -konečnou mírou. Necht'  $f$  je  $\overline{\mu \otimes \nu}$ -měřitelná funkce na  $\overline{\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}}$ -měřitelné množině  $M \subset X \times Y$ . Předpokládáme, že integrál

$$\int_M f(x, y) \, d\overline{\mu \otimes \nu}(x, y)$$

existuje. Potom pro  $\mu$ -skoro všechna  $x \in X$  existuje integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y) \, d\nu(y),$$

funkce  $g$  má integrál  $\int_X g \, d\mu$  a platí a platí

$$\int_M f(x, y) \, d\overline{\mu \otimes \nu}(x, y) = \int_X g \, d\mu,$$

neboli

$$\int_M f(x, y) \, d\overline{\mu \otimes \nu}(x, y) = \int_X \left( \int_{M^{x,*}} f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

**Poznámka:** Role prostorů  $X$  a  $Y$  ve Fubiniově větě lze vyměnit. Za předpokladu existence integrálu

$$\int_M f(x, y) \, d\overline{\mu \otimes \nu}(x, y)$$

tak máme také

$$\int_M f(x, y) \, d\overline{\mu \otimes \nu}(x, y) = \int_Y \left( \int_{M^{*,y}} f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

a můžeme zaměnit pořadí integrace

$$\int_X \left( \int_{M^{x,*}} f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_{M^{*,y}} f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

## Fubiniova věta v $\mathbb{R}^N$

**Věta 2.18:**  $n + k$ -rozměrná Lebesgueova míra je úplným součinem  $n$ -rozměrné a  $k$ -rozměrné Lebesgueovy míry (tj.  $\lambda_{n+k} = \overline{\lambda_n \otimes \lambda_k}$ ).

**Značení:** Necht'  $n, k \in \mathbb{N}$  a  $N = n + k$ .

- Pro  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  a  $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$  označíme

$$(x, y) := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^N.$$

- Je-li  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  měřitelná množina,  $f$  měřitelná funkce na  $M$ , pak používáme značení

$$\int_M f(x, y) \, dx \, dy := \int_M f \, d\lambda_{n+k}.$$

**Tvrzení 2.16\*:** Necht'  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  je  $\mathfrak{M}_{n+k}$ -měřitelná množina. Pak pro každá  $x \in \mathbb{R}^n$  a  $y \in \mathbb{R}^k$  je množina  $M^{x,*}$   $\mathfrak{M}_k$ -měřitelná a množina  $M^{*,y}$   $\mathfrak{M}_n$ -měřitelná, funkce  $x \mapsto \lambda_k(M^{x,*})$  a  $y \mapsto \lambda_n(M^{*,y})$  jsou měřitelné a

$$\lambda_{n+k}(M) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_k(M^{x,*}) \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_n(M^{*,y}) \, d\lambda_k.$$

**Poznámka:** V předchozím tvrzení integrujeme přes  $\mathbb{R}^n$  resp.  $\mathbb{R}^k$  a ne přes množinu  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid M^{x,*} \neq \emptyset\}$  resp.  $\{y \in \mathbb{R}^k \mid M^{*,y} \neq \emptyset\}$ , protože měřitelnost množiny  $M$  nám měřitelnost těchto množin nezaručuje.

**Věta 2.19 (Fubiniova v  $\mathbb{R}^N$ ):** Nechť  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  je měřitelná množina a  $f$  je funkce měřitelná na  $M$ , která má integrál  $\int_M f \, d\lambda_{n+k}$ . Potom pro skoro všechna  $x \in \mathbb{R}^n$  je definován integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y) \underbrace{d\lambda_k(y)}_{\text{píšeme: } dy}$$

a platí

$$\int_M f \, d\lambda_{n+k} = \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\lambda_n,$$

neboli

$$\int_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{M^{x,*}} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

**Poznámka:** Ve větě 2.19 není podstatné, že  $x_1, \dots, x_n$  je právě prvních  $n$  složek bodu z  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Stejným způsobem bychom za předpokladu existence integrálu  $\int_M f \, d\lambda_{n+k}$  (ten je ve Větě 2.19 podstatný) dostali také

$$\int_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{M^{*,y}} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Mohli bychom tedy zaměnit pořadí integrace:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{M^{x,*}} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left( \int_{M^{*,y}} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

**Poznámka:** Je-li  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$ ,  $M = M_1 \times \dots \times M_n$ , kde  $M_i$  jsou měřitelné množiny,  $f_i$  jsou funkce měřitelné na  $M_i$ , a existuje integrál  $\int_M f \, dx$ , pak z Fubiniovy věty dostáváme

$$\begin{aligned} \int_M f \, dx_1 \dots dx_n &= \int_{M_1} \left( \int_{M_2 \times \dots \times M_n} f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) \, dx_2 \dots dx_n \right) dx_1 \\ &= \int_{M_1} \left( f_1(x_1) \int_{M_2 \times \dots \times M_n} f_2(x_2) \dots f_n(x_n) \, dx_2 \dots dx_n \right) dx_1 = \int_{M_1} f_1(x_1) \, dx_1 \int_{M_2 \times \dots \times M_n} f_2(x_2) \dots f_n(x_n) \, dx_2 \dots dx_n \\ &= \dots = \int_{M_1} f_1(x_1) \, dx_1 \int_{M_2} f_2(x_2) \, dx_2 \dots \int_{M_n} f_n(x_n) \, dx_n \end{aligned}$$

## 2.5 Věta o substituci

**Definice:** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  má v bodě  $\tilde{x} \in G$  všechny (první) parciální derivace. Pak matici

$$\left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$$

se nazýváme **Jacobiho matice zobrazení  $\psi$**  v bodě  $\tilde{x}$ . Determinant této matice nazýváme **Jacobián zobrazení  $\psi$**  v bodě  $\tilde{x}$  a značíme ho  $J_\psi(\tilde{x})$ . Existuje-li lineární zobrazení  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(\tilde{x} + h) - \psi(\tilde{x}) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

řekneme, že  $\psi$  má v bodě  $\tilde{x}$  (**Frechetovu**) **derivaci**. V tomto případě je  $L$  reprezentováno Jacobiho maticí a značí se  $\psi'(\tilde{x})$ . Zobrazení  $\psi$  nazveme **regulární na  $G$** , jestliže má na  $G$  spojitou derivaci (tj. všechny jeho parciální derivace jsou na  $G$  spojité) a  $J_\psi(x) \neq 0$  pro každé  $x \in G$ .

**Věta 2.20 (O substituci):** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  je prosté regulární zobrazení. Nechť  $u$  je funkce na  $M \subset \psi(G)$ . Potom

$$\int_M u(x) \, dx = \int_{\psi^{-1}(M)} u(\psi(t)) |J_\psi(t)| \, dt,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

## Často používané substituce

### Polární souřadnice

$$G = \{(r, \varphi) \mid r > 0, \varphi \in (-\pi, \pi)\}$$

$$\begin{aligned} x &= \psi_1(r, \varphi) = r \cos \varphi \\ y &= \psi_2(r, \varphi) = r \sin \varphi \end{aligned} \quad \psi = (\psi_1, \psi_2)$$

**Platí:**

- $\psi(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$

- $J_\psi((r, \varphi)) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \neq 0$  na  $G$

Zobrazení  $\psi$  je tedy na  $G$  regulární.

- $\psi$  je prosté. Je-li totiž  $(x, y) = \psi(r, \varphi)$ , pak zřejmě  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . To nám ale dává pro  $\varphi$  podmínky  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ ,  $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , z kterých je možné získat pro  $\varphi$  vyjádření  $\varphi = 2 \arctg \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$

### Sférické souřadnice

$$G = \{(r, \varphi, \vartheta) \mid r > 0, \varphi \in (-\pi, \pi), \vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$$

$$\begin{aligned} x &= \psi_1(r, \varphi, \vartheta) = r \cos \varphi \cos \vartheta \\ y &= \psi_2(r, \varphi, \vartheta) = r \sin \varphi \cos \vartheta \\ z &= \psi_3(r, \varphi, \vartheta) = r \sin \vartheta \end{aligned} \quad \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$$

**Platí:**

- $\psi(G) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \leq 0 \wedge z \in \mathbb{R}\}$

- $J_\psi((r, \varphi, \vartheta)) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{vmatrix} = r^2 \cos \vartheta \neq 0$  na  $G$

(Ověřte jako cvičení.) Zobrazení  $\psi$  je tedy na  $G$  regulární.

- Zobrazení  $\psi$  je prosté. Dá se totiž ukázat, že  $(x, y, z) = \psi(r, \varphi, \vartheta)$ , kde  $(r, \varphi, \vartheta) \in G$ , právě když  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\varphi = 2 \arctg \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ ,  $\vartheta = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

**Poznámka:** Úhel  $\vartheta$  se někdy měří od kladné poloosy  $z$ . Pak

$$G = \{(r, \varphi, \vartheta) \mid r > 0, \varphi \in (-\pi, \pi), \vartheta \in (0, \pi)\}$$

$$\begin{aligned} x &= \psi_1(r, \varphi, \vartheta) = r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y &= \psi_2(r, \varphi, \vartheta) = r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= \psi_3(r, \varphi, \vartheta) = r \cos \vartheta \end{aligned} \quad J_\psi((r, \varphi, \vartheta)) = -r^2 \sin \vartheta \neq 0$$

## 2.6 Integrály závislé na parametru

**Věta 2.21 (Spojitost integrálu závislého na parametru):** Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor s mírou,  $D \in \mathcal{S}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  a  $U$  je okolí bodu  $a$ . Nechť funkce  $F : U \times D \rightarrow \mathbb{R}$  má tyto vlastnosti

- (a) pro s.v.  $x \in D$  je funkce  $F(\cdot, x)$  spojitá v  $a$ ,
- (b) pro všechna  $t \in U$  je funkce  $F(t, \cdot)$  měřitelná,
- (c) existuje  $g \in \mathcal{L}^1(D)$  tak, že pro všechna  $t \in U$  je  $|F(t, \cdot)| \leq g$  skoro všude na  $D$  (tj.  $|F(t, x)| \leq g(x)$  pro skoro všechna  $x \in D$ ).

Potom pro všechna  $t \in U$  je  $F(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(D)$  a funkce

$$G : t \mapsto \int_D F(t, \cdot) d\mu$$

je spojitá v  $a$ .

**Poznámka:** Spojitost funkce  $G$  v bodě  $a$  nám dává

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} G(t) &= G(a) \\ \parallel & \parallel \\ \lim_{t \rightarrow a} \int_D F(t, x) d\mu(x) &= \int_D F(a, x) d\mu(x) \end{aligned}$$

**Důkaz Věty 2.21:** Použijeme Heineovu větu, podle které má funkce  $h$  v bodě  $a$  limitu  $A$  právě tehdy, když pro každou posloupnost  $(u_n)_{n=1}^\infty \subset D(h)$  s  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(u_n) = A$ . Uvažujme tedy libovolnou posloupnost  $(t_n)_{n=1}^\infty \subset U$ , pro kterou je  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$ . Označme  $f_n(x) = F(t_n, x)$ ,  $f(x) = F(a, x)$ . Pak podle předpokladu (a) pro skoro všechna  $x \in D$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Dále z předpokladu (b) plyne, že všechny funkce  $f_n$  jsou měřitelné, a konečně na základě předpokladu (c) máme pro skoro všechna  $x \in D$  a každé  $n \in \mathbb{N}$  odhad  $|f_n(x)| \leq g(x)$ . Na posloupnost  $(f_n)_{n=1}^\infty$  tak můžeme použít Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (Věta 2.9) a dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D F(t_n, \cdot) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\mu \stackrel{\text{V2.9}}{=} \int_D f d\mu = \int_D F(a, \cdot) d\mu = G(a).$$

Protože  $(t_n)_{n=1}^\infty$  byla libovolná posloupnost v  $U$  s limitou  $a$ , je podle Heineovy věty  $G(a)$  limitou funkce  $G$  v bodě  $a$ , tedy funkce  $G$  je v bodě  $a$  spojitá.  $\square$

**Věta 2.22 (Derivace integrálu podle parametru):** Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  je prostor s mírou,  $D \in \mathcal{S}$  a  $I \subset \mathbb{R}$  je otevřený interval. Nechť funkce  $F : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$  má tyto vlastnosti:

- (a) pro s.v.  $x \in D$  je funkce  $F(\cdot, x)$  diferencovatelná na  $I$ ,
- (b) pro všechna  $t \in I$  je funkce  $F(t, \cdot)$  měřitelná
- (c) existuje  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  tak, že pro všechna  $t \in I$  je

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} F(t, \cdot) \right| \leq g \quad \text{s.v. na } D,$$

- (d) existuje  $t_0 \in I$  tak, že  $F(t_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .

Potom pro všechna  $t \in I$  je  $F(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , funkce

$$G : t \mapsto \int_D F(t, \cdot) d\mu$$

je diferencovatelná na  $I$  a platí vzorec

$$\begin{aligned} G'(t) &= \int_D \frac{\partial}{\partial t} F(t, \cdot) d\mu \\ \left( \text{tj.} \quad \frac{d}{dt} \int_D F(t, x) d\mu(x) &= \int_D \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) d\mu(x) \right). \end{aligned}$$