KAPITOLA 3: Prostory L^p

Definice: Nechť Y je lineární prostor. Pak zobrazení $\|.\| : Y \to \mathbb{R}$ nazveme **norma**, jestliže pro každé $u, v \in Y$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

(1) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$

(2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**trojúhelníková nerovnost**)

(3) a) $\|u\| \geq 0$
b) $\|u\| = 0 \;\Leftrightarrow\; u = \mathbf{0}$ (nulový prvek v Y)

Dvojici $(Y, \|.\|)$ pak nazveme **normovaný prostor**. (Obvykle píšeme pouze Y.)

Definice: Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, u je μ-měřitelná funkce na X. Pro $p \in \langle 1, \infty)$ definujeme

$$\|u\|_p \;=\; \Big(\int_X |u|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} .$$

Dále definujeme

$$\|u\|_\infty \;=\; \operatorname{ess\,sup} |u| := \inf\{C \in \mathbb{R} \,\big|\, |u| \leq C \;\text{ s.v. na } X\} .$$

Pro $p \in \langle 1, \infty\rangle$ položíme

$$\mathcal{L}^p(X) \;=\; \{u \mid \|u\|_p < \infty, \; u \text{ je } \mu\text{-měřitelná}\} .$$

Poznámka: Hodnotě $\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{C \in \mathbb{R} \mid f \leq C \;\text{ s.v. na } X\}$ se říká **podstatné** (esenciální) **supremum** funkce f na X. Je ho možné také vyjádřit ve tvaru $\operatorname{ess\,sup} f = \inf\limits_{\substack{E \in \mathcal{S} \\ \mu(E)=0}} \{ \sup\limits_{x \in X \setminus E} f(x) \}$.

Poznámka: Pro $p \in \langle 1, \infty\rangle$ $\|\,.\,\|_p$ zřejmě splňují podmínky (1) a (3a) z definice normy. Protože $|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, splňují $\|\,.\,\|_1$ a $\|\,.\,\|_\infty$ také trojúhelníkovou nerovnost. Dokázat trojúhelníkovou nerovnost v případě $p \in (1, \infty)$ je složitější. Budeme k tomu potřebovat několik dalších nerovností.

Lemma 3.1 (Youngova nerovnost): Nechť $a, b \geq 0$, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak

$$ab \;\leq\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} .$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $a^p = b^q$.

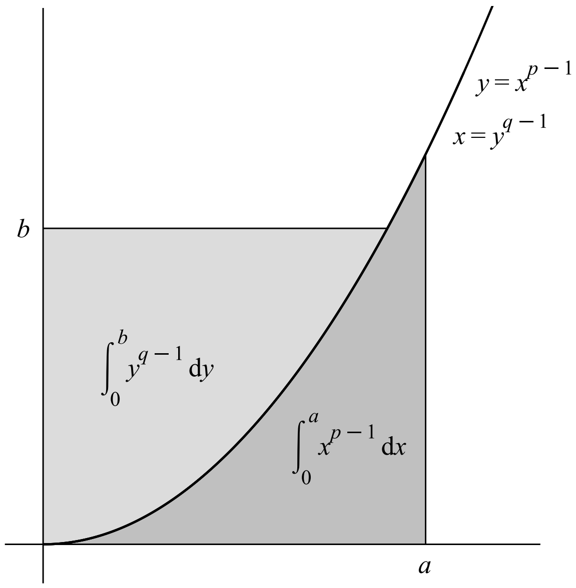
Důkaz: Předně si všimneme, že pro $p, q \in (1, \infty)$ platí rovnost $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ právě tehdy, když $\frac{1}{p-1} = q - 1$, nebo také $q = \frac{p}{p-1}$. Tedy pro $x, y \geq 0$ máme

$$x^{p-1} = y \quad \text{právě tehdy, když} \quad x = y^{q-1}.$$

Dále

$$\frac{a^p}{p} = \Big[\frac{x^p}{p}\Big]_0^a = \int_0^a x^{p-1} \, \mathrm{d}x,$$

$$\frac{b^q}{q} = \Big[\frac{y^q}{q}\Big]_0^b = \int_0^b y^{q-1} \, \mathrm{d}y.$$



Z obrázku je už nyní zřejmé, že platí

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} \, \mathrm{d}x + \int_0^b y^{q-1} \, \mathrm{d}y = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} .$$

Rovnost přitom nastává právě tehdy, když $b = a^{p-1}$. Pak ale

$$b^q = a^{q(p-1)} = a^{\frac{p}{p-1}(p-1)} = a^p.$$

Tím jsme lemma dokázali. $\square$

Věta 3.2 (Hölderova nerovnost): Nechť u, v jsou μ-měřitelné funkce na X, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q .$$

Pokud $\|uv\|_1 < \infty$, rovnost nastává, právě když existují čísla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, z nichž je alespoň jedno $\neq 0$, taková, že

$$c_1|u|^p = c_2|v|^q \quad \text{s.v. na } X.$$

Důkaz: Označme $s = \|u\|_p$, $r = \|v\|_q$. Pokud je $s \in \{0, \infty\}$ nebo $r \in \{0, \infty\}$, nerovnost zřejmě platí. Přitom v těchto případech může nastat rovnost (za našeho předpokladu $\|uv\|_1 < \infty$) jen tehdy, když $\|uv\|_1 = 0$ a $s = 0$ nebo $r = 0$. Pro $a \in \langle 0, \infty \rangle$ totiž máme $a \cdot \infty \in \{0, \infty\}$, přičemž nulu dostáváme jen pro $a = 0$. Je-li $s = 0$, pak $u = 0$ skoro všude, a tedy skoro všude platí $1 \cdot u = 0 \cdot v$. Analogicky, pokud $r = 0$, pak skoro všude $0 \cdot u = 1 \cdot v$.

Nechť nyní $s, r \in (0, \infty)$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že jsou funkce u a v nezáporné. Pak pro skoro všechna $x \in X$ dostáváme z Youngovy nerovnosti (Lemma 3.1)

$$\frac{u(x)}{s}\,\frac{v(x)}{r} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{u(x)}{s}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{v(x)}{r}\right)^q = \frac{(u(x))^p}{s^p\,p} + \frac{(v(x))^q}{r^q\,q}\,. \tag{1}$$

Nerovnost zintegrujeme a z monotonie integrálu dostaneme

$$\frac{1}{s\,r}\int_X u\,v\,\mathrm{d}\mu \leq \frac{s^p}{s^p\,p} + \frac{r^q}{r^q\,q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tedy

$$\|u\,v\|_1 = \int_X u\,v\,\mathrm{d}\mu \leq s\,r = \|u\|_p\|v\|_q.$$

Dokazovaná nerovnost je tedy splněna. Podívejme se ještě, jak je to s rovností. Ta nastává právě tehdy, když nastává rovnost v (1) pro skoro všechna $x \in X$, a to je podle Lemmatu 3.1 právě tehdy, když pro skoro všechna $x \in X$ platí

$$\left(\frac{u(x)}{s}\right)^p = \left(\frac{v(x)}{r}\right)^q.$$

Pak ale pro skoro všechna $x \in X$ máme

$$c_1(u(x))^p = c_2(v(x))^q,$$

kde $c_1 = \frac{1}{s^p}$, $c_2 = \frac{1}{r^q}$. Tím jsme větu dokázali. $\square$

Důsledek 3.3: Nechť $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u \in \mathcal{L}^p(X)$, $v \in \mathcal{L}^q(X)$. Pak $uv \in \mathcal{L}^1(X)$. Navíc

$$\left|\int_X uv\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \left(\int_X |u|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\left(\int_X |v|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

Důkaz: Důsledek je kombinací Hölderovy nerovnosti s odhadem $|\int_X f\,\mathrm{d}\mu| \leq \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu$. $\square$

Důsledek 3.4: Nechť $\mu(X) < \infty$ a $1 \leq p < q \leq \infty$. Pak $\mathcal{L}^q(X) \subset \mathcal{L}^p(X)$ a existuje konstanta C taková, že

$$\|f\|_p \leq C\,\|f\|_q \qquad \text{pro každé } f \in \mathcal{L}^q(X).$$

Důkaz: Uvažujme nejprve $q < \infty$. Nechť $f \in \mathcal{L}^q(X)$. Položíme-li $\tilde{p} = \frac{q}{p}$, pak $\tilde{p} > 1$ a $1 - \frac{1}{\tilde{p}} = 1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$. Z Hölderovy nerovnosti tak dostáváme

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f|^p \cdot 1 \, \mathrm{d}\mu \overset{V3.2}{\leq} \left(\int_X \left(|f|^p\right)^{\frac{q}{p}} \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_X |1|^{\frac{q}{q-p}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{q-p}{q}} =$$

$$= \left(\left(\int_X |f|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p \left(\mu(X) \right)^{\frac{q-p}{q}} = \|f\|_q^p \left(\mu(X) \right)^{\frac{q-p}{q}}.$$

Pokud tedy položíme $C = \left(\mu(X)\right)^{\frac{q-p}{pq}}$, máme pro každé $f \in \mathcal{L}^q(X)$

$$\|f\|_p \leq C \, \|f\|_q < \infty,$$

což ale znamená, že $f \in \mathcal{L}^p(X)$.

Nechť je nyní $q = \infty$. Pak

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X |\operatorname{ess\,sup} f|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X \|f\|_\infty^p \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty^p \, \mu(X).$$

Tedy pro každé $f \in \mathcal{L}^q(X)$ platí

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_\infty < \infty,$$

kde $C = \left(\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$, a tím také $f \in \mathcal{L}^p(X)$. $\square$

Věta 3.5 (Minkowského nerovnost): Jsou-li u, v μ-měřitelné funkce na X, $p \in (1, \infty)$, pak

$$\|u + v\|_p \;\leq\; \|u\|_p + \|v\|_p \, .$$

Důkaz: Pro $\|u\|_p = 0$ nebo $\|v\|_p = 0$ je příslušná funkce nulová skoro všude, tedy nerovnost platí. Pokud je $\|u\|_p = \infty$ nebo $\|v\|_p = \infty$, je součet vpravo roven ∞, tedy nerovnost opět platí. Konečně, je-li $\|u + v\|_p = 0$, nerovnost zřejmě také platí. Budeme tedy v dalším předpokládat, že $0 < \|u\|_p < \infty$, $0 < \|v\|_p < \infty$, $0 < \|u + v\|_p$.

Nejdříve ukážeme, že $\|u + v\|_p < \infty$. Pro skoro všechna $x \in X$ zřejmě máme

$$|u(x)| \leq \Big(|u(x)|^p + \underbrace{|v(x)|^p}_{\geq 0} \Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad |v(x)| \leq \Big(\underbrace{|u(x)|^p}_{\geq 0} + |v(x)|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Pokud nerovnosti sečteme a umocníme na p, dostaneme

$$|u(x) + v(x)|^p \leq \left(|u(x)| + |v(x)|\right)^p \leq \left(2\left(|u(x)|^p + |v(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \leq 2^p \left(|u(x)|^p + |v(x)|^p\right).$$

Odtud už integrací přes X dostáváme

$$\|u + v\|_p^p \leq 2^p \left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p \right) < \infty.$$

Položíme $q = \frac{p}{p-1}$. Pak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $(p-1)q = p$. Protože $|u + v|^p = |u + v|^{p-1}|u + v| \leq |u + v|^{p-1}\left(|u| + |v|\right)$, máme z Hölderovy nerovnosti

$$\|u + v\|_p^p = \int_X |u + v|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X |u + v|^{p-1} |u| \, \mathrm{d}\mu + \int_X |u + v|^{p-1} |v| \, \mathrm{d}\mu$$

$$\leq \left(\int_X |u + v|^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |u|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |u + v|^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |v|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_X |u + v|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_X |u|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |u + v|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_X |v|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\|u + v\|_p^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\|u\|_p + \|v\|_p \right) = \|u + v\|_p^{p-1} \left(\|u\|_p + \|v\|_p \right).$$

Protože $0 < \|u + v\|_p < \infty$, máme odtud

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

Důsledek 3.6: Jestliže $u, v \in \mathcal{L}^p(X)$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$, pak též $u + v \in \mathcal{L}^p(X)$.

Důkaz: Jde o bezprostřední důsledek Minkowského nerovnosti. $\square$

Ekvivalence na $\mathcal{L}^p(X)$, prostor $L^p(X)$

Pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ splňuje $\|.\|_p$ na $\mathcal{L}^p(X)$ podmínky (1), (2), (3a) z definice normy. Nemusí ale splňovat podmínku (3b), protože pro každou funkci f, která je nulová skoro všude, platí $\|f\|_p = 0$. Na $\mathcal{L}^p(X)$ proto uvažujme ekvivalenci

$$u \sim v, \quad \text{jestliže} \quad u = v \quad \text{s.v. na } X$$

(zřejmě $u \sim v \Rightarrow \|u\|_p = \|v\|_p$). Pro $u \in \mathcal{L}^p(X)$ označme jemu odpovídající třídu ekvivalence

$$[u] = \{v \in \mathcal{L}^p(X) \mid u \sim v\}$$

a položme

$$L^p(X) = \{[u] \mid u \in \mathcal{L}^p(X)\}.$$

Na $L^p(X)$ definujeme operace

$$[u] + [v] = [u + v]$$
$$\alpha[u] = [\alpha u] \qquad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Měli bychom ověřit, že definice součtu a násobku jsou korektní, tj. jejich výsledek nezávisí na výběru reprezentantů jednotlivých tříd ekvivalence. Mějme pro případ součtu $\tilde{u} \in [u]$, $\tilde{v} \in [v]$. Pak existují množiny M, N míry nula takové, že $u = \tilde{u}$ na $X \setminus M$ a $v = \tilde{v}$ na $X \setminus N$. Tedy na $X \setminus (M \cup N)$, kde $\mu(M \cup N) = 0$, je $u + v = \tilde{u} + \tilde{v}$, tj. $[u + v] = [\tilde{u} + \tilde{v}]$. Podobně ověříme i korektnost definice násobku.

S výše uvedenými operacemi je $L^p(X)$ lineární prostor. Jeho nulovým prvkem je třída ekvivalence odpovídající funkci, která je na X identicky rovná nule. Budeme ho tedy značit $[0]$. Položíme-li pro $[u] \in L^p(X)$

$$\|[u]\|_p = \|u\|_p,$$

dostaneme normu na $L^p(X)$. Abychom ukázali, že jde opravdu o normu, stačí ověřit, že $\|[u]\|_p = 0$, pouze když $[u]$ je nulový prvek v $L^p(X)$. Ostatní vlastnosti normy jsou totiž přímým důsledkem vlastností $\|.\|_p$ na $\mathcal{L}^p(X)$. Nechť tedy $\|[u]\|_p = 0$. Pak $\|u\|_p = 0$, což nastává podle Tvrzení 2.1,c) právě tehdy, když funkce $|u|^p$ je skoro všude nulová, tedy u je ekvivalentní funkci identicky rovné nule na X. To ale přesně znamená, že $[u] = [0]$, což jsme potřebovali dokázat.

Na $L^p(X)$ můžeme také zavést (částečné) uspořádání, a to tak, že položíme

$$[u] \le [v] \quad \text{právě tehdy, když } u \le v \text{ skoro všude na } X.$$

Platí přitom, že $[u] \le [v]$ právě tehdy, když existují funkce $\tilde{u} \in [u]$ a $\tilde{v} \in [v]$ takové, že $\tilde{u} \le \tilde{v}$ všude na X. (Dokažte jako cvičení.)

Poznámka: Pro jednoduchost formulací se prvky prostorů $\mathcal{L}^p(X)$ a $L^p(X)$ obvykle nerozlišují zápisem ani pojmenováním. Mluvíme-li tedy o funkci $f \in L^p(X)$, máme na mysli třídu $[f]$ ekvivalence $\sim$ odpovídající funkci $f \in \mathcal{L}^p(X)$.

Důležitou vlastností prostorů $L^p(X)$ je jejich úplnost. Než si zformulujeme patřičnou větu, musíme si ještě zavést některé pojmy.

Definice: Nechť Y je normovaný prostor. Řekněme, že posloupnost $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prvků z Y je **cauchyovská**, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall m, n \in \mathbb{N},\ m, n \ge n_0 \quad \text{platí} \quad \|y_m - y_n\| < \varepsilon.$$

Řekněme, že posloupnost $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konverguje v normě** k prvku $y \in Y$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0,$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0 \quad \text{platí} \quad \|y_n - y\| < \varepsilon.$$

Definice : Normovaný prostor se nazývá **úplný**, jestliže je v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní (tj. konverguje v normě k nějakému *jeho* prvku).

Poznámka : Zřejmě každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Ne v každém normovaném prostoru však jsou všechny cauchyovské posloupnosti konvergentní.

Věta 3.7 (Úplnost prostorů L^p) : Nechť $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ je posloupnost prvků z $L^p(X)$, která je cauchyovská v normě $\|.\|_p$. Pak existuje $f \in L^p(X)$ tak, že $\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\| = 0$. Navíc existuje posloupnost $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vybraná z $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ taková, že $g_k \to f$ skoro všude na X.

Poznámka (prostory l^p) : Je-li $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost reálných (příp. komplexních) čísel, položme pro $p \in \langle 1, \infty)$

$$\|(a_n)\|_{l^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}$$

a

$$\|(a_n)\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Pro $p \in \langle 1, \infty\rangle$ definujeme

$$l^p = \{(a_n) \mid \|(a_n)\|_{l^p} < \infty\}.$$

Platí : $(l^p, \|.\|_{l^p})$ je úplný normovaný prostor.

Důkaz: Uvažujme prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \alpha)$, kde α je aritmetická míra na $\mathbb{N}$. Protože je každá množina $B \subset \mathbb{N}$ měřitelná, je každá funkce $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) měřitelná. Měřitelná je tedy i funkce $|g|^p$ pro každé $p \geq 1$. Dále pro každou nezápornou funkci f (pro kterou je jistě definován integrál) platí

$$\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Položíme-li totiž

$$f_k = f \cdot \chi_{\{1,\ldots,k\}} \ \Big(= f \sum_{n=1}^{k} \chi_{\{n\}} = \sum_{n=1}^{k} f(n)\, \chi_{\{n\}} \Big),$$

pak zřejmě $f_k \geq 0$ a $f_k \nearrow f$, tedy podle Leviho věty 2.3

$$\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\alpha = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_k \, \mathrm{d}\alpha = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{k} f(n)\, \alpha(\{n\})}_{\sum_{n=1}^{k} f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Pro $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ a $p \in \langle 1, \infty)$ tak máme

$$\|g\|_p = \big(\sum_{n=1}^{\infty} |g(n)|^p\big)^{\frac{1}{p}}.$$

V případě aritmetické míry pojmy *všude* a *skoro všude* splývají (nulovou míru má totiž jen prázdná množina). Splývají tak i pojmy *supremum* a *podstatné supremum* a platí

$$\|g\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |g(n)|.$$

Kromě toho všechny třídy ekvivalence $\sim$ jsou jednoprvkové, takže pokud ztotožníme každou třídu ekvivalence s jejím jediným prvkem, máme pro $p \in \langle 1, \infty\rangle$ rovnost $L^p(\mathbb{N}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{N})$.

Nyní už stačí jen ztotožnit posloupnosti s funkcemi na $\mathbb{N}$ a dostaneme

$$(l^p, \|.\|_{l^p}) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \alpha).$$

Protože prostory L^p jsou úplné, je též prostor $(l^p, \|.\|_{l^p})$ je úplný. $\square$

Poznámka : Ztotožníme-li pro $p \in \langle 1, \infty)$ stejně jako výše prostory $(l^p, \|.\|_{l^p})$ s prostory $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \alpha)$, dostaneme diskrétní varianty Hölderovy a Minkowského nerovnosti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \text{(Hölderova nerovnost)}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad \text{(Minkowského nerovnost)}$$

Speciálně pro $p = q = 2$ můžeme Hölderovu nerovnost zapsat ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2}\,.$$