Základní pojmy kombinatoriky.

Velmi stručně řečeno, kombinatorika je počítání prvků dané konečné množiny. To vypadá jako jednoduchý úkol, ale množiny, jejichž prvky chceme spočítat jsou často velmi velké a složité. (Např. kolik variant má sudoku?) Výhodou je, že kombinatorické problémy nevyžadují příliš abstraktní matematické pojmy a jsou snadno srozumitelné. Na druhou stranu, některé z nich se mohou ukázat jako velmi (a to až frustrujícím způsobem) obtížně řešitelné.

Multiplikační pravidlo.

Protože každá teorie je vždy zpočátku motivována příklady, začneme i my příkladem.

Příklad 1. U fotografa se postaví n svatebčanů do řady vedle sebe.
(a) Kolika způsoby je možné tuto řadu vytvořit, má-li ženich a nevěsta stát vedle sebe?
(b) Kolika způsoby je možné tuto řadu vytvořit, má-li nevěsta stát kdekoli nalevo od ženicha?
(c) Kolika způsoby je možné rozsadit n svatebčanů kolem kulatého stolu tak, aby nevěsta s ženichem seděli vedle sebe?

Pro získání odpovědi budeme potřebovat následující jednoduché, ale velmi důležité *multiplikační pravidlo*:

Vytváříme uspořádané k-tice vyhovující následujícím dvěma podmínkám.

- Na první místo v k-tici máme na výběr z n_1 možností, na druhé místo z n_2 možností a tak dále, až na posledním k-tém místě máme výběr z n_k možností.
- Počet možností v každém kroku je nezávislý na předešlých výběrech.

Pak počet všech takových k-tic je $N = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Ilustrujme si toto pravidlo několika příklady.

Příklad 2. Kolik je přirozených čísel mezi 10^6 a 10^7 takových, že se v jejich zápise neopakuje žádná číslice? A kolik je takových přirozených čísel mezi 10^6 a 10^7, kde v jejich zápise nestojí dvě stejné číslice vedle sebe?

Nejprve si uvědomíme, že čísla, o která se nám jedná jsou sedmiciferná. K odpovědi na první otázku si vyjasníme, kolik možností máme při výběru číslice na každém ze sedmi míst. Na prvním místě máme $n_1 = 9$ možností. Jsou to číslice $1, 2, \ldots, 9$, neboť číslo 0 zde nemůžeme použít. (Vytvořené číslo by bylo menší než 10^6.) Na druhém místě už můžeme použít všech deset číslic s výjimkou té, kterou použili na místě prvním. Tedy $n_2 = 9$ možností. Na třetím místě máme teoreticky k dispozici všech deset číslic, pouze musíme vynechat ty, stojící na prvních dvou místech, tj. $n_3 = 8$ možností. Projdeme-li takto všech sedm pozic, dostaneme, že počet hledaných čísel je

$$N_r = n_1 \cdot n_2 \cdots n_7 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 544\ 320.$$

Odpověď na druhou otázku je podobná. Na první místo máme $n_1 = 9$ možností jako výše. Na druhé místo rovněž $n_2 = 9$ možností, neboť z deseti číslic nesmíme použít jen tu, která stojí na prvním místě. Na třetí pozici může být jakákoli z deseti cifer kromě té, která stojí na místě druhém, tedy opět $n_3 = 9$ možností. Po projití všech sedmi pozic máme výsledek

$$N_s = 9^7 = 4\ 782\ 969.$$

Podívejme se na podobnou úlohu, ve které budeme na dané číslo klást více požadavků.

Příklad 3. Kolik je lichých čtyřciferných čísel, kde se číslice neopakují a navíc neobsahuje číslici 2?

Jako v předchozím příkladu vyšetříme, kolik je možností na každém ze čtyř míst. Nejprve ale zjistíme kolik je možností na posledním místě: Má-li být číslo liché, máme $n_4 = 5$ možností (1 nebo 3 nebo 5 nebo 7 nebo 9). Nyní se vrátíme k prvnímu místu. Tam máme $n_1 = 7$ možností: Nesmí tam být 0 ani 2 a ani číslice, kterou jsme už použili na posledním místě. Druhé místo dovoluje opět $n_2 = 7$ možností, neboť 0 je již povolená, ale musíme se vyhnou dvojce a dvěma již použitým číslicím. A konečně poslední $n_3 = 6$ (vyhýbáme se dvojce a třem již dříve zvoleným číslicím). Výsedek je

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1470.$$

V tomto příkladu *nemůžeme* začít vybírat číslice od prvního místa. Při takovém postupu bychom zjistili, že $n_1 = 8$ (mimo 0 a 2), $n_2 = 8$ (mimo 2 a první zvolenou číslici), $n_3 = 7$ (mimo 2 a dvou již zvolených číslic). U poslední volby ale nastane problém. Musí tam stát liché číslo, jenže jejich počet závisí na tom, jestli jsme už nějaké liché číslo v prvních třech krocích použili nebo nikoli. To odporuje druhému požadavku v multiplikačním pravidle, a proto ho nelze takto použít.

Příklad 4. Přístupové heslo k jisté webové stránce se skládá ze 6 až 8 znaků a musí obsahovat alespoň jednu číslici. Kolik takových hesel existuje?

Uvažujme abecedu o 26 písmenech. Protože užíváme jak velká, tak malá písmena, máme k dispozici 52 písmen. Navíc ještě 10 číslic. Celkový počet znaků je 62. Hledaný počet hesel bude

$$H = H_6 + H_7 + H_8,$$

kde H_k je počet k-znakových hesel. Počet hesel obsahujících alespoň jednu číslici získáme tak, že od počtu všech hesel odečteme hesla složená pouze z písmen.

$$H_6 = 62^6 - 52^6, \quad H_7 = 62^7 - 52^7, \; H_8 = 62^8 - 52^8.$$

Výsledek je $H = H_6 + H_7 + H_8 = 167\ 374\ 455\ 885\ 920$.

Příklad 5. Mějme v rovině n bodů, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Kolik různých přímek je určeno těmito body?

Protože každá přímka je určena dvěma body, je otázka počtu přímek ekvivalentní s otázkou počtu dvojic bodů, které lze z dané množiny vybrat. První bod můžeme zvolit n způsoby. Pro druhý máme pouze $n-1$ možností, neboť body musí být různé. Počet uspořádaných dvojic bodů je tak $n(n-1)$. Protože dvojice bodů (A, B) a (B, A) určují tutéž přímku, je počet přímek poloviční než počet dvojic, tj. $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Příklad 6. Jistá fakulta má 4 katedry s postupně 6, 35, 12 a 7 členy. Děkan chce vytvořit tříčlenný výbor z pracovníků kateder pro řešení různých studentských záležitostí. Členové musí být z různých kateder a navíc se denně obměňují. Zasedá-li výbor během akademického roku (předpokládejme 165 dní), kolik let může uběhnout, než se složení výboru zopakuje?

Označíme si V_i, $i = 1, 2, 3, 4$, počet složení tříčlenného výboru, kde chybí zástupce i-té katedry. Pak

$$\begin{array}{ll} V_1 = 35 \cdot 12 \cdot 7 = 2940 & V_3 = 6 \cdot 35 \cdot 7 = 1470 \\ V_2 = 6 \cdot 12 \cdot 7 = 504 & V_4 = 6 \cdot 35 \cdot 12 = 2520. \end{array}$$

počet všech možných složení výboru je $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 7434$. Počet let je tak

$$\frac{7434}{165} = 45.05.$$

Z multiplikačního pravidla plyne i následující rovnost pro počet prvků kartézského součinu množin. Mějme konečné množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Pak

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Slovy to znamená, že počet prvků kartézského součinu množin je součin jejich velikostí.

Permutace a binomické koeficienty.

Připomeneme si několik označení.

Číslo $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ se nazývá n faktoriál. Platí, že $0! = 1$. Dále,

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{pro } 0 \le k \le n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

je kombinační číslo, které čteme „n nad k“. Nazýváme jej také *binomický koeficient.* K výpočtu je výhodné užívat první tvar uvedený v definici. Např.

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35.$$

Z definice rovněž vidíme, že

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Důležité jsou významy těchto dvou čísel.

- Číslo $n!$ udává počet všech uspořádání n různých objektů do řady. K odůvodnění použijeme multiplikační pravidlo: Na prvním místě máme výběr z n objektů, na druhém místě z $(n-1)$ objektů a tak dále, a na poslední místo nám zbývá poslední objekt, a tedy jediná možnost výběru.

  Prosté zobrazení n-prvkové množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ samu na sebe se nazývá *permutace*. Označíme-li takovou permutaci f,

$$f\colon \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\},$$

  pak výpis jejích hodnot, $f(1), f(2), \dots, f(n)$, je vlastně přerovnání původní množiny. Název permutace se proto používá i pro přerovnání n-prvkové množiny. V této terminologii je $n!$ počet permutací n-prvkové množiny. Jiná interpretace permutace je možná zobrazením jejího grafu, tj. množiny bodů $(i, f(i))$, $i = 1, \dots, n$. Takový graf je odpovídá rozmístění n věží na šachovnici $n \times n$ tak, aby se věže vzájemně neohrožovaly. Proto je $n!$ počet všech možných rozmístění věží na šachovnici $n \times n$ tak, že se vzájemně nenapadají. Pro standardní šachovnici je to $8! = 40\,320$.

  Funkce $f(n) = n!$ roste velmi rychle. Její chování pro $n \to \infty$ je dáno Stirlingovým vzorcem,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

  Zde jsme užili označení $f(n) \sim g(n)$, které znamená, že podíl $f(n)/g(n)$ má limitu v nekonečnu rovnou 1. Navíc je známo, že se podíl těchto dvou výrazů liší od jedničky maximálně o $1/(10n)$:

$$\left|\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} - 1\right| < \frac{1}{10n}.$$

- Podívejme se na význam součinu $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Jedná se o k činitelů a podle multiplikačního pravidla udává tento součin počet uspořádaných k-tic vytvořených z různých prvků dané n-prvkové množiny. Někdy je vhodné zapisovat tento součin ve tvaru

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \binom{n}{k}k!.$$

- Důsledek předchozího bodu je, že samotné číslo $\binom{n}{k}$ udává počet všech k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny: Protože u vybrané k-prvkové množiny nehraje její uspořádání roli, musíme počet uspořádaných k-tic vydělit počtem možných uspořádání takové k-tice, což je $k!$. Výsledný počet podmnožin je tak

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Vrátíme se nyní k příkladu o rozestavení n svatebčanů do řady. Počet všech možných uspořádání n lidí do řady, je právě permutace n prvků, a tedy $n!$. Nás zajímají taková uspořádání, kde ženich a nevěsta stojí vedle sebe. Počet pozic v řadě, kde může stát dvojice ženich-nevěsta v je $n-1$. Rovněž dvojice ženich-nevěsta může vypadat dvěma způsoby, podle toho je-li ženich nalevo od nevěsty nebo naopak. A konečně, zbývajících

$n-2$ svatebčanů rozmístíme na zbývajících $n-2$ míst libovolně, tj. $(n-2)!$ způsoby. Odpověď na otázku (a) je tak

$$N_a = (n-1)\cdot 2\cdot (n-2)! = 2\cdot (n-1)!.$$

Pro otázku (b) si uvědomíme, jak může vypadat požadované rozestavení svatebčanů. Nejprve si zvolíme dvě místa v řadě pro ženicha a nevěstu a postavíme je na tato místa tak, aby nevěsta stála nalevo od ženicha. Výběr těchto dvou míst můžeme provést $\binom{n}{2}$ způsoby. Pak už zbývající svatebčany rozestavíme libolně.

$$N_b = \binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2}.$$

Tvar výsledku naznačuje, že jsme mohli otázku (b) řešit i jinak. Víme, že všech uspořádání n lidí do řady je $n!$. V každém takovém uspořádání je buď nevěsta nalevo od ženicha nebo naopak napravo od ženicha. Z důvodu symetrie nastane první možnost v polovině všech případů. Odpověď je proto $\frac{1}{2}n!$.

I když to pro řešení otázky (c) není nutné, je užitečné si uvědomit, jaký je rozdíl v počtech možností postavit n lidí do řady nebo je posadit kolem kulatého stolu. Začneme tím, že postavíme n lidí do řady. Pak je budeme posazovat ke stolu tak, že si sedají od pevně zvolené židle v kladném smyslu. Tím vznikne jedno rozesazení kolem stolu. Vrátíme-li pak lidi do původní řady a prvního v řadě pošleme na konec, budeme mít novou řadu. Posadíme-li tuto řadu stejným způsobem od stejné pevně zvolené židle v kladném smyslu, bude rozesazení stejné jako před tím. Pouze se všichni posunuli o jednu židli doprava. Budeme-li takto pokračovat a prvního v řadě vždy posílat na konec, zjistíme, že tímto způsobem získaných n různých řad vytvoří jediné rozesazení kolem stolu. Jinými slovy počet uspořádání do řady je n krát větší než počet rozesazení kolem kulatého stolu. Odtud plyne, že n lidí lze posadit kolem kulatého stolu $n!/n = (n-1)!$ způsoby.

Aby nevěsta s ženichem seděli vedle sebe, máme v prvním kroku dvě možnosti: buď ženich sedí po levici nevěsty nebo naopak. Máme-li už ženicha a nevěstu usazené, zbylých $n-2$ míst obsadíme libovolně $n-2$ osobami, tj. $(n-2)!$ možnostmi. Celkově počet rozesazení, kdy ženich a nevěsta sedí vedle sebe je

$$N_c = 2(n-2)!,\ \ n\geq 3.$$

Následující dva příklady se týkají losování Sportky.

Příklad 7. Při tahu Sportky se losuje 6 čísel ze 49. Označíme symbolem A_k jev, že jsme uhodli k čísel, $k=0,1,\dots,6$. Jak jsou pravděpodobné jevy A_k?

Všech losovaných šestic je $\binom{49}{6}$. Zjistíme, kolik je šestic, ve kterých jsme uhodli právě k z tažených čísel.

Z našich šesti vsazených čísel lze vybrat k správných (tj. vylosovaných) čísel $\binom{6}{k}$ způsoby. Zbylých $6-k$ čísel vylosováno nebylo. Jsou tedy vybrána ze 43 nevylosovaných. Počet takových výběrů je $\binom{43}{6-k}$. Hledaná pravděpodobnost je proto

$$P(A_k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}.$$

Uveďme si přibližné výsledky do tabulky.

k	$P(A_k)$
0	0.4359
1	0.4130
2	0.1324
3	0.0176
4	10^{-3}
5	$1.8 \cdot 10^{-5}$
6	$7.2 \cdot 10^{-8}$

Příklad 8. Náhodně losovaná čísla si intuitivně představujeme, že by měla být rozprostřena v celém oboru $\{1, 2, \ldots, 49\}$ a nikoli nahromaděna u sebe. Zjistíme, nakolik je tato intuice správná tím, že vypočteme kolik je šestic vylosovaných z $\{1, 2, \ldots, 49\}$ takových, že neobsahují dvě po sobě jdoucí čísla.

Označíme si $n_1 < n_2 < \cdots < n_6$ šestici vylosovaných čísel. Za každým z čísel $n_1, \ldots, n_5$ máme jedno zakázané číslo. Tím se nám počet 49 možností snížil na 44. Z nich tedy vybereme 6, a to

$$\binom{44}{6} = 7\ 059\ 052$$

způsoby. Můžeme to porovnat s celkovým počtem všech losovaných šestic:

$$\frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{7\ 059\ 052}{13\ 983\ 816} = 0.5048015506.$$

Vidíme, že zhruba v polovině případů jsou čísla od sebe separovaná a v polovině případů jsou vždy alespoň dvě z nich těsně za sebou.

Následující věta uvádí vztah mezi binomickými koeficienty, který se objevuje v tzv. Pascalově trojúhelníku. (O něm se zmíníme za větou.)

vet9 **Věta 9.** *Pro* $1 \le k \le n$ *platí, že*

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Důkaz. Pravá strana rovnosti udává počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zjistíme, jaký význam má levá strana rovnice.

k-prvkové podmnožiny si rozdělíme do dvou skupin podle toho, jestli daná podmnožina obsahuje číslo n či nikoli. Neobsahuje-li číslo n, pak je taková podmnožina vybraná pouze z $(n-1)$-prvkové množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Takových podmnožin je $\binom{n-1}{k}$. Obsahuje-li naopak podmnožina číslo n, pak vznikla jako $(k-1)$-prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, ke které jsme přidali prvek n. Takto vzniklých podmnožin je $\binom{n-1}{k-1}$. Součtem získáváme počet všech k-prvkových podmnožin, což je přesně rovnice ve větě. $\square$

Pascalův trojúhelník je schéma, které vytvoříme tak, že na n-tý řádek vypíšeme postupně $n+1$ čísel

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}.$$

Vznikne nám následující trojúhelník.

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Každé číslo v Pascalově trojúhelníku je součtem dvou čísel, která jsou v předchozím řádku přímo nad ním (viz Větu vet9 9). Proto můžeme číslo $\binom{n}{k}$ také zjistit postupným vyčíslováním řádků od 0-tého do n-tého. Výhodou tohoto postupu je, že užívá pouze operaci sčítání, na rozdíl od přímého výpočtu $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$, kde je třeba dělit jeden velký faktoriál jiným.

Podívejme se blíže na to, jak se mění hodnoty binomických koeficientů $\binom{n}{k}$ pro pevné n a měnící se $k = 0, 1, \ldots, n$. K tomu účelu vyřešíme nerovnost

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}.$$

Definice binomického koeficientu nám dá

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} < \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Vydělením $n!$ a vynásobením $k!(n-k+1)!$ se nerovnost zjednoduší na

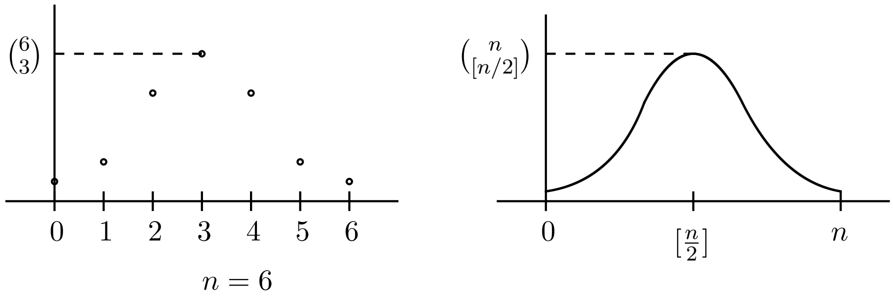
$$k < n-k+1, \quad \text{tj.} \quad k < \frac{n+1}{2}.$$

Protože k je celé číslo, je poslední nerovnost to samé jako $k \le [n/2]$, kde hranaté závorky značí celou část čísla $n/2$. Vidíme, že hodnoty koeficientu rostou pro $k \le [n/2]$. Úplně stejně (jen s obrácenou nerovností) zjistíme, že od $[n/2]$ hodnoty klesají. Maximum nastává pro $k = [n/2]$, tj, platí

$$\binom{n}{k} \le \binom{n}{[n/2]}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Jinými slovy, podmnožin o velikosti $[n/2]$ je nejvíce.

Obrázek 1 vpravo ukazuje hodnoty $\binom{6}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$. Pro velké n je závislost $k \to \binom{n}{k}$ na obrázku vlevo. Ve skutečnosti to není spojitá křivka, neboť hodnoty jsou definovány jen na nezáporných celých číslech, ale při velkém počtu vynesených hodnot se body „slijí“ do spojitého grafu. Graf se blíží (pro $n \to \infty$) ke Gaussově křivce $y = e^{-x^2/2}$.



Obr. 1

Vraťme se ještě k Větě vet9 9. Opakovaným užitím vzorce z této věty dostaneme následující identitu.

diag **Věta 10.** *Pro* $k, n \geq 1$ *platí*

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Důkaz. Uvedeme dva důkazy.
První je matematickou indukcí podle hodnoty $n = 1, 2, \ldots$
Krok 1: pro $n = 1$ rovnost zřejmě platí, neboť se redukuje na

$$\binom{0}{0} = \binom{1}{1}.$$

Krok 2: Předpokládáme, že rovnost platí pro n, tj. tak, jak je uvedená ve větě. Uvažujme součet s jedním sčítancem navíc,

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{k-1}.$$

Použijeme-li indukční předpoklad, dostaneme

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

kde v poslední rovnosti jsme použili Větu vet9 9.

Druhý důkaz bude kombinatorický. Pravá strana rovnice ve větě je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tyto k-prvkové podmnožiny si rozdělíme do skupin podle toho, jaký je jejich poslední prvek. Předpokládejme, že poslední prvek podmnožiny je číslo i. To může nabývat hodnot od k do n. Je-li poslední číslo k-prvkové množiny i, zbylých $k-1$ prvků bylo vybráno z množiny $\{1, 2, \ldots, i-1\}$, tj. z $i-1$ prvků. To lze učinit $\binom{i-1}{k-1}$ způsoby. Proto počet k-prvkových podmnožin je součet

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1}.$$

□

Součty mocnin přirozených čísel

Pomocí Věty diag 10 můžeme zjišťovat hodnoty součtů $\sum_{k=1}^{n} k^p$, $p = 1, 2, \dots$ Zatím účelem si přepíšeme Větu diag 10 pro $k+1$ a $n+1$:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Pro hodnotu $k = 1$ dostáváme

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Je-li $k = 2$, máme $\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3}$. Protože $\binom{i}{2} = \frac{i^2 - i}{2}$, platí

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

S využitím předchozího výsledku $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ dostaneme, že

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pro ilustraci ještě zjistíme vzorec udávající součet třetích mocnin, tj. $k = 3$. Pro tuto hodnotu máme $\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{3} = \binom{n+1}{4}$. Protože

$$\binom{i}{3} = \frac{i(i-1)(i-2)}{6} = \frac{i^3 - 3i^2 + 2i}{6},$$

dostaneme pro součet třetích mocnin rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i = 6\binom{n+1}{4}.$$

Využijeme nyní znalosti součtu prvých a druhých mocnin a úpravou získáme výsledný vzorec

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Často používaný a užitečný vztah je známá *binomická věta* pro umocnění dvojčlenu na n-tou. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ má název binomický koeficient právě podle této věty.

bin **Věta 11.** *(Binomická věta) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Důkaz. Rozepíšeme si mocninu na součin závorek

$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}^{n\text{-krát}}.$$

Po roznásobení každé závorky s každou se podíváme, jaký je koeficient u výrazu $x^k y^{n-k}$. Tento součin vznikne tak, že v k závorkách zvolíme x a ve zbylých $n-k$ závorkách y. Vybrat k závorek z celkového počtu n závorek lze $\binom{n}{k}$ způsoby, a proto se při roznásobení objeví výraz $x^k y^{n-k}$ přesně $\binom{n}{k}$-krát. □

Mějme např. výraz $(2a-7)^9$. Jaký je koeficient u a^5? Použijeme binomickou větu pro $x = 2a$ a $y = -7$. Dostaneme

$$(2a-7)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (2a)^k (-7)^{9-k}.$$

Mocnina a^5 vznikne pro $k = 5$. Její koeficient je

$$\binom{9}{5} 2^5 (-7)^4 = 9\ 680\ 832.$$

Další použití binomické věty si ukážeme na několika příkladech.

Příklad 12. Kolik podmnožin má n-prvková množina?

Sečteme počet všech 0-prvkových, 1-prvkových, …, až n-prvkových podmnožin a podle binomické věty dostaneme

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} &= \binom{n}{0} 1^0 1^n + \binom{n}{1} 1^1 1^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} 1^n 1^0 \\ &= (1+1)^n = 2^n.\end{aligned}$$

Příklad 13. Mějme n-prvkovou množinu. Je počet jejích podmnožin se sudým počtem prvků stejný jako počet podmnožin s lichým počtem prvků?

Podle binomické věty platí

$$\begin{aligned}0 = (1-1)^n &= \binom{n}{0} 1^n (-1)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} (-1)^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} (-1)^2 + \cdots + \binom{n}{n} 1^0 (-1)^n \\ &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}.\end{aligned}$$

Převedeme-li záporné členy na levou stranu, dostaneme

$$\sum_{k \text{ liché}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ sudé}} \binom{n}{k},$$

tj. lichých podmnožin je vždy stejný počet jako sudých podmnožin nezávisle na čísle n.

Obtížnější je úloha zjistit kolik podmnožin n-prvkové množiny má počet prvků dělitelný třemi. Výsledek je

$$N = \frac{1}{3}\Big(2^n + 2\cos\frac{\pi n}{3}\Big),$$

a vyplyne z porovnání reálné části obou stran rovnice $e^{\pi n i/3} = (1 + e^{2\pi i/3})^n$.

Příklad 14. Kolika způsoby lze vybrat dvě podmnožiny $A, B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že

(i) $B \subset A$;

(ii) A a B jsou disjunktní.

(i) Uvažujme případ, že větší množina ve dvojici má k prvků. Takových množin je $\binom{n}{k}$ a už víme, že každá má 2^k podmnožin. Sečteme všechny možnosti pro $k = 0, 1, \ldots, n$ a podle binomické věty máme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2 + 1)^n = 3^n.$$

(ii) Má-li jedna z množin k prvků, druhou množinu vybíráme ze zbylých $n - k$ prvků. Počet takových podmnožin je 2^{n-k}. Dohromady je $\binom{n}{k}2^{n-k}$ způsobů, jak vybrat k-prvkovou množinu a k ní disjunktní množinu. Číslo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1 + 2)^n = 3^n$$

je počet uspořádaných dvojic disjunktních podmnožin. Nás však nezajímá počet uspořádaných dvojic, ale kolika způsoby můžeme dvě takové množiny zvolit. V čísle 3^n je každá dvojice započtena dvakrát (dvojice (A, B) i (B, A)) s jedinou výjimkou dvojice $(\emptyset, \emptyset)$. Tuto výjimku odečteme od celkového počtu 3^n, výsledek vydělíme dvěma a pak výjimečnou dvojici $(\emptyset, \emptyset)$ opět přičteme. Správný počet výběrů dvou disjunktních množin je

$$\frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^n + 1}{2}.$$

Příklad 15. Sečteme-li velikosti (tj. počty prvků) všech podmnožin n-prvkové množiny, jakou bude mít součet hodnotu? Stručně zapsáno, kolik je

$$\sum_{A \subset \{1,\ldots,n\}} |A|?$$

Víme, že k-prvkových podmnožin je $\binom{n}{k}$, takže odpověď je

$$\sum_{A \subset \{1,\ldots,n\}} |A| = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Můžeme se na situaci podívat i jinak. Ke každé množině $A \subset \{1, \ldots, n\}$ přidáme její doplněk $A^c = \{1, \ldots, n\} \setminus A$. Tato dvojice má dohromady n prvků. Takových dvojic je polovina počtu všech podmnožin, tj. $2^n/2 = 2^{n-1}$. Sečtením velikostí všech takových dvojic dostaneme

$$\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} |A| = n2^{n-1}.$$

Jako důsledek jsme dostali vztah

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Binomický koeficient můžeme interpretovat také následujícím způsobem. Mějme abecedu $\mathcal{A}$ skládající se ze dvou písmen, např. $\mathcal{A} = \{a, b\}$, a vytváříme z ní slova. (Slovo je konečná posloupnost symbolů z abecedy.) Kolik je slov délky n, která obsahují přesně k písmen a? Je jich tolik, kolika způsoby si lze vybrat z n míst v daném slově k pozic pro písmeno a. Což je $\binom{n}{k}$.

Mějme nyní abecedu $\mathcal{A}$ skládající se z p symbolů,

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\},$$

a vytváříme z ní slova. Kolik je slov délky n, ve kterých se a_1 objeví k_1-krát, a_2 se objeví k_2-krát, ... a a_p se objeví k_p-krát, $k_1 + r_2 + \cdots + k_p = n$?

Symbol a_1 obsadí k_1 míst ve slově délky n, což lze vybrat $\binom{n}{k_1}$ způsoby. Ze zbývajících $n - k_1$ míst vybereme k_2 míst pro a_2, a to $\binom{n-k_1}{k_2}$ způsoby. Tak pokračujeme dále až v posledním p-tém kroku obsadíme zbývajících $n - k_1 - \cdots - k_{p-1} = k_p$ míst symbolem a_p, a to jedním způsobem. Počet možností je

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-\cdots-k_{p-1}}{k_p} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_p!}$$

Toto číslo, udávající počet slov s předepsanými četnostmi výskytu jednotlivých symbolů, nazýváme *multinomický koeficient* a značíme

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_p!} & 0 \le k_1, k_2, \dots, k_p, \quad k_1 + \cdots + k_p = n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Výše uvedené odvození si ilustrujme na příkladu.

Příklad 16. Uvažujme abecedu $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ a vytváříme slova délky 4, která obsahují jedno a, dvě b a jedno c. Počet takových slov je

$$\binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{4!}{1!\,3!}\,\frac{3!}{2!\,1!}\,\frac{1!}{1!\,1!} = \frac{4!}{2!} = 12.$$

V tomto jednoduchém případě si jako zkoušku můžeme všechna hledaná slova vypsat:

abbc, *abcb*, *acbb*, *babc*, *bacb*, *bbac*, *bbca*, *bcab*, *bcba*, *cabb*, *cbab*, *cbba*.

Zobecnění binomické věty se nazývá *multinomická věta.*

`multi` **Věta 17.** *(Multinomická věta) Pro každé* $x_1, x_2, \dots x_p \in \mathbb{R}$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_p=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_p} x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}.$$

Důkaz. Postupujeme analogicky jako při důkazu binomické věty. Rozepíšeme si mocninu na součin závorek

$$(x_1 + \cdots + x_p)^n = \overbrace{(x_1 + \cdots + x_p) \cdots (x_1 + \cdots + x_p)}^{n\text{-krát}}.$$

Po roznásobení každé závorky s každou se podíváme, jaký je koeficient u výrazu $x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$. Tento součin vznikne tak, že v k_1 závorkách zvolíme x_1, v k_2 závorkách zvolíme x_2 atd. Zápis takového posupného vybírání proměnných z jednotlivých závorek je slovo délky n z abecedy $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_p\}$ s předepsanými četnostmi výskytu jednotlivých proměnných. Počet těchto slov je $\binom{n}{k_1 \dots k_p}$, a proto se při roznásobení objeví výraz $x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$ přesně $\binom{n}{k_1 \dots k_p}$-krát. □

Příklad 18. Jakou hodnotu má absolutní člen výrazu $(3x + 1 - 1/x)^5$?

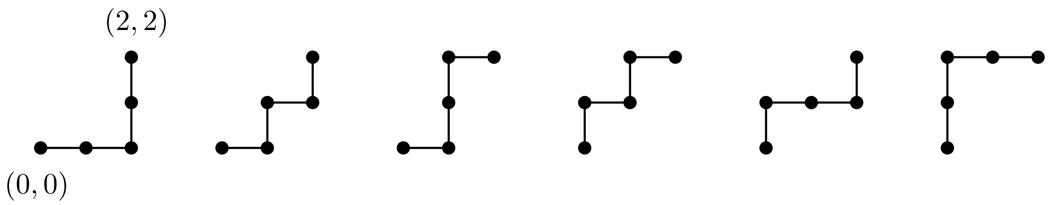
Absolutní člen je koeficient u mocniny x^0. Označíme jej a_0. Podle multinomické věty je

$$(3x + 1 - 1/x)^5 = \sum_{r_1+r_2+r_3=5} \binom{5}{k_1, k_2, k_3} (3x)^{k_1} 1^{k_2} (-1/x)^{k_3}.$$

Aby vznikla nultá mocnina proměnné x, musí platit $k_1 = k_3$. Protože také $k_1 + k_2 + k_3 = 5$, dostáváme tyto tři možnosti pro mocniny (k_1, k_2, k_3): $(0, 5, 0)$, $(1, 3, 1)$ a $(2, 1, 2)$. Tím

$$a_0 = \binom{5}{0,5,0} 3^0 1^5 (-1)^0 + \binom{5}{1,3,1} 3^1 1^3 (-1)^1 + \binom{5}{2,1,2} 3^2 1^1 (-1)^2 = 1 - 60 + 270 = 211.$$

Binomický a multinomický koeficient mají rovněž geometrickou interpretaci ve formě počtu cest uzlovými body množiny $\mathbb{Z}^2$ a $\mathbb{Z}^p$. Obrázek 2 ukazuje možné cesty množinou $\mathbb{Z}^2$ z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2, 2)$, které smějí používat jen kroky typu $\vec{e_1} = (1, 0)$ a $\vec{e_2} = (0, 1)$.



Obr. 2

Zjistíme počet cest v $\mathbb{Z}^2$ začínajících v počátku a končících v bodě (k, n). Abychom se dostali do koncového bodu (k, n) musíme udělat k kroků typu $\vec{e_1}$ a n kroků typu $\vec{e_2}$. Celkem $n + k$ kroků. Kroky typu $\vec{e_1}$ mohou být učiněny kdykoli v průběhu cesty, tj. kdekoli mezi všemi $n + k$ kroky. To lze vybrat $\binom{n+k}{k}$ způsoby. Počet cest je tak

$$N = \binom{n + k}{k}.$$

Pro obecnou p-dimenzionální celočíselnou mříž $\mathbb{Z}^p$ máme následující výsledek.

Věta 19. *Označíme si* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p$ *vektory tvořící standardní ortonormální bázi prostoru* $\mathbb{R}^p$*. Počet cest mřížovými body množiny* $\mathbb{Z}^p$*, které začínají v počátku, končí v bodě* $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ *a používají kroky typu* $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots, \vec{e}_p$ *je roven*

$$N = \binom{k_1 + k_2 + \cdots + k_p}{k_1, k_2, \ldots, k_p}.$$

Důkaz. Při cestě z počátku do bodu $(k_1, \ldots, k_p)$ je zapotřebí učinit k_i kroků ve směru vektoru $\vec{e}_i$, $i = 1, \ldots, p$. Pokud si budeme směry jednotlivých kroků postupně zapisovat, vznikne posloupnost délky $k_1 + \cdots + k_p$ skládající se ze symbolů $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p$. Což je slovo v abecedě $\mathcal{A} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$, jehož délka je $k_1 + \cdots + k_p$ a každý symbol $\vec{e}_i$ se vyskytuje k_i-krát. Počet takových slov je

$$N = \binom{k_1 + k_2 + \cdots + k_p}{k_1, k_2, \ldots, k_p}.$$

□

Typy výběrů.

Zastavíme se na chvíli u otázky, kolika způsoby můžeme vybrat k objektů z množiny velikosti n. Odpověď se liší podle toho, jaká kriteria pro výběr uplatníme: Záleží nám na pořadí v jakém prvky do k-tice vybíráme nebo nezáleží? Může se stejný prvek ve výběru vyskytnou více než jednou nebo nikoli? Kombinováním těchto dvou kriterií dostaneme čtyři typy výběrů. S nimi je často spojena následující terminologie. Uspořádaná k-tice vybraná z n-prvkové množiny se nazývá *variace k-té třídy z n prvků*. k-prvkovou podmnožinu n-prvkové množiny nazýváme *kombinací k-té třídy z n prvků*. Pokud připouštíme opakování prvků ve výběrech, připojujeme k oběma názvům obrat „s opakováním“.

- Variace k-té třídy z n prvků, tj. prvky se neopakují a na pořadí záleží. Podle multiplikačního pravidla je počet variací

  $$N = n(n-1)\cdots(n-k+1),$$

  neboť první prvek volíme z n možností, druhý z $n-1$ možností, ... až poslední, k-tý prvek z $n-(k-1)$ možností.

- Variace k-té třídy z n prvků s opakováním, tj. prvky se mohou opakovat a na pořadí záleží. V každém kroku máme na výběr stále n možností. Aplikací multiplikačního pravidla je počet takových variací

  $$N = n^k.$$

- Kombinace k-té třídy z n prvků, tj. prvky se neopakují a na pořadí nezáleží. V tomto případě je to přesně počet k-prvkových podmnožin,

  $$N = \binom{n}{k}.$$

Zbývá případ kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním, tj. dovolíme opakování a uspořádání ve výběru ignorujeme. Zde je situace o něco složitější. Řešení vyplyne z následující věty.

vet3 **Věta 20.** *Počet nezáporných celočíselných řešení rovnice* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ *je roven*

$$\binom{n+k-1}{n-1}.$$

Důkaz. Zavedeme nové proměnné

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + x_1,\\
y_2 &= 2 + x_1 + x_2,\\
y_3 &= 3 + x_1 + x_2 + x_3,\\
&\vdots\\
y_{n-1} &= n - 1 + x_1 + x_2 \cdots + x_{n-1},\\
y_n &= n + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n + k.
\end{aligned}$$

Pro ně platí, že $1 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} \leq n + k - 1$. Navíc, známe-li hodnoty všech $y_1, \ldots, y_{n-1}$, dopočteme z nich hodnoty původních $x_1, \ldots, x_n$. Proto počet nezáporných celočíselných řešení $x_1, \ldots, x_n$ je stejný jako počet výběrů $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Ty vybíráme z množiny $\{1, 2, \ldots, n + k - 1\}$, a proto je počet takových výběrů $\binom{n+k-1}{n-1}$. □

Teď lze doplnit poslední, čtvrtý typ výběru.

- Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním, tj. prvky se mohou opakovat a na pořadí nezáleží. Vybraná k-tice je jednoznačně určená, udáme-li kolikrát se daný prvek v ní vyskytuje. Označíme-li x_i počet výskytu i-tého prvku v k-tici, pak čísla x_i splňují podmínky z Věty vet3 20. Počet takových kombinací je proto roven počtu nezáporných celočíselných řešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$, tj. $\displaystyle\binom{n+k-1}{n-1}$.

Příklad 21. V obchodě mají košile sedmi barev. Zákazník si jich koupí 10. Kolika způsoby může prodej dopadnout? Kolika způsoby může prodej dopadnout, má-li mít zákazník košile všech barev?

V prvním případě jde o výběr velikosti 10 ze 7-prvkové množiny. Odpověď je

$$N = \binom{7+10-1}{7-1} = 8008.$$

V druhém případě nejprve zařadíme do výběru košile všech barev, tj. 7 kusů a zbylé tři košile vybereme jakkoli. Půjde tak o výběr velikosti 3 ze 7-prvkové množiny.

$$N = \binom{7+3-1}{7-1} = 84.$$

Příklad 22. Kolik nezáporných celočíselných řešení má rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$, chceme-li, aby všechna řešení byla sudá čísla?

Proměnné x_i napíšeme ve tvaru sudého čísla, tj. $x_i = 2t_i$, kde t_i je celé nezáporné. Rovnice dostane tvar

$$2t_1 + 2t_2 + \cdots + 2t_n = k, \quad \text{tj.} \quad t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \tfrac{1}{2}\,k.$$

Podle Věty 20 je počet hledaných řešení $N = \binom{n+k/2-1}{n-1}$.

Příklad 23. Rozdělíme k stejných objektů do n očíslovaných krabic. Kolika způsoby to lze učinit?

V první krabici bude x_1 objektů, ve druhé x_2 objektů, atd. Součet všech objektů je k, takže platí $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$. Podle Věty 20 je počet takových rozdělení $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Příklad 24. Rozdělíme k stejných dárků n dětem tak, že každé dítě má alespoň jeden dárek. Kolika způsoby to lze učinit?

V prvním kroku dáme každému z dětí po jednom dárku. Zbylých $k - n$ už rozdělíme způsoby, popsanými ve Větě 20, kde místo k máme nyní $k - n$. Počet je tak $\binom{k-1}{n-1}$. Tato úvaha říká přesně to, že počet *kladných* celočíselných řešení rovnice $x_1 + x_1 + \cdots + x_n = k$ je $\binom{k-1}{n-1}$.

Dirichletův princip.

Tento princip zobecňuje jednoduchá pozorování následujícího typu.

- Máme-li rozdělit 5 míčků do 4 krabic, musí nějaká krabice obsahovat alespoň 2 míčky.
- Mezi 367 lidmi musí být alespoň 2 se stejným datem narozenin.
- Zobrazení z alespoň $(k + 1)$-prvkové množiny do k-prvkové množiny není nikdy prosté.

Společný tvar takových tvrzení se nazývá *Dirichletův princip:*

> Rozložíme-li konečnou množinu o n prvcích na k částí, pak nějaká z částí nutně obsahuje alespoň n/k prvků.
>
> Speciálně, rozložíme-li konečnou množinu o n prvcích na méně než n částí, pak nějaká z částí nutně obsahuje více než jeden prvek.

Uveďme si několik příkladů na použití Dirichletova principu. Začneme jednoduchým příkladem.

Příklad 25. Zkouška je hodnocena $0 - 100$ body. Kolik studentů se musí účastnit zkoušky, aby bylo zaručeno, že alespoň dva mají stejný počet bodů?

Protože je 101 možných ohodnocení zkoušky, je třeba, aby se zúčastnilo alespoň 102 studentů.

Některá použití Dirichletova principu jsou překvapivá.

Příklad 26. Ukažte, že každé přirozené číslo n má násobek, který používá ve svém zápise pouze nuly a trojky.

Mějme n a utvořme seznam $n+1$ čísel $3,\ 33,\ 333,\ \dots,\ \overbrace{33\cdots3}^{n+1}$. Jejich zbytky po vydělení číslem n jsou prvky množiny $\{0,1,\dots,n-1\}$. Čísel je o jedno víc než zbytků po dělení. Existují tak alespoň dvě čísla ze seznamu, která mají stejný zbytek po dělení číslem n. Jejich rozdíl je hledaný násobek. (Číslo 3 v zadání je zcela nepodstatné může být nahrazeno jakoukoli nenulovou číslicí.)

Příklad 27. Z každé množiny obsahující n přirozených čísel (nikoli nutně různých) lze vždy vybrat několik čísel, jejichž součet je dělitelný n.

Označíme si prvky takové množiny jako $\{a_1, a_2 \dots, a_n\}$. Uvažujme n čísel

$$a_1,\ a_1+a_2,\ \dots,\ a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

Není-li žádné z nich dělitelné n, pak každé z nich má nenulový zbytek po dělení číslem n. Takových nenulových zbytků je $n-1$, a proto podle Dirichletova principu jsou alespoň u dvou čísel zbytky stejné. Nechť to jsou čísla

$$a_1+a_2+\cdots+a_i \ \text{ a } \ a_1+a_2+\cdots+a_j, \quad i<j.$$

Jejich odečtením získáme číslo dělitelné n.

obdelnik **Příklad 28.** Body množiny $\mathbb{N}^2$ obarvíme dvěma barvami zcela libovolně. Pak existuje vždy obdélník s jednobarevnými vrcholy ležícími v $\mathbb{N}^2$.

Mějme např. barvy modrou a bílou a uvažujme první řádek, tj. $\{(n,1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alespoň jedna barva, řekněme modrá, je v prvním řádku použita pro nekonečně mnoho bodů. Tuto množinu modrých bodů si zapíšeme jako

$$\{(n,1) \mid n \in M\}, \quad M \subset \mathbb{N},\ \text{nekonečná}.$$

Nyní se dívejme na druhý řádek, ale jen na ty body, které leží nad množinou M, tj. na množinu $\{(n,2) \mid n \in M\}$. Pokud se mezi těmito body vyskytnou alespoň 2 modré, lze vytvořit pomocí prvního řádku obdélník. Pokud je mezi nimi nejvýše jeden modrý bod, jsou zbylé body červené a je jich nekonečně mnoho. Zapíšeme si tuto množinu červených bodů jako

$$\{(n,2) \mid n \in B\}, \quad B \subset M,\ \text{nekonečná}.$$

Podívejme se na řádek třetí, ale jen na body typu $(3,n)$, $n \in B$. Tyto body leží nad červenými body z druhého řádku a je jich nekonečně mnoho. Proto se tam musí alespoň jedna z barev vyskytovat nekonečně krát. Je-li to modrá, utvoříme obdélník s prvním řádkem, je-li to červená, utvoříme obdélník s druhým řádkem.

Princip inkluze a exkluze.

Máme-li zjistit, kolik prvků má sjednocení několika množin, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, tak v případě po dvou disjunktních množin je to snadné:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|,$$

sečteme velikosti všech. Umíme najít vzorec i v případě, kdy se množiny obecně navzájem protínají? Odpověď je v následující větě, která se nazývá Princip inkluze a exkluze.

vet4 **Věta 29.** *Mějme konečné množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Pak platí*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{j<k} |A_j \cap A_k| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n|.$$

Před důkazem se podívejme na případ dvou množin. Vzorec má pro $n = 2$ tvar

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Intuitivně je jasné, že součet $|A_1| + |A_2|$ nadhodnocuje velikost sjednocení, neboť prvky v průniku $A_1 \cap A_2$ jsou započteny dvakrát. Abychom to opravili, musíme velikost průniku jednou odečíst. Přesně to, jen pro více množin a tedy složitěji, se děje i ve Větě 29. Odtud je i její název, inkluze znamená zahrnutí a exkluze vyjmutí.

Důkaz. Zvolme libovolný prvek $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Na levé straně rovnice ve Větě 29 je x započteno jednou. Ověříme, že je započteno na pravé straně rovnice také právě jednou.

Prvek x leží obecně v m množinách. Můžeme pro usnadnění zápisu předpokládat, že to jsou množiny $A_1, \ldots, A_m$. V první sumě je prvek x započten m-krát. Ve druhé sumě je započten $\binom{m}{2}$-krát, neboť leží ve všech průnicích dvojic množin vybraných z $A_1, \ldots, A_m$. Stejně tak máme, že ve třetí sumě je prvek x započten $\binom{m}{3}$-krát, atd. Naposledy se prvek x objeví v m-té sumě, kde je započten $\binom{m}{m}$-krát, tj. jednou. Dohromady dostáváme, že na pravé straně je dané x započteno

$$m - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m}.$$

Přičtením a odečtením jedničky a s využitím binomické věty dostaneme

$$\begin{aligned} &= -1 + \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} + 1 \\ &= -\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^i + 1 = -(1-1)^m + 1 = 1. \end{aligned}$$

Ověřili jsme, že každý prvek ze sjednocení je na pravé straně započítám právě jednou, a tedy výraz na pravé straně se rovná počtu prvků ve sjednocení. $\square$

Obecná strategie pro použití Principu inkluze a exkluze je situace, kdy máme zjistit počet objektů mající alespoň jednu z několika (dobrých?) vlastností. Do množiny A_1 zahrneme objekty s první vlastností, do A_2 objekty s druhou vlastnosti atd. Podívejme se na příklady.

Příklad 30. Kolik je přirozených čísel $n \leq 10\,000$, která jsou dělitelná 7 nebo 29.

Označíme si A_1 množinu čísel v daném intervalu dělitelných 7 a podobně A_2 množinu čísel dělitelných 29. Pak

$$|A_1| = \left[\frac{10000}{7}\right] = 1428, \quad |A_2| = \left[\frac{10000}{29}\right] = 344, \quad |A_1 \cap A_2| = \left[\frac{10000}{7 \cdot 29}\right] = 49,$$

kde $[x]$ označuje celou část čísla x. Podle Věty vet4 29 máme $|A_1 \cup A_2| = 1428 + 344 - 49 = 1723$.

Pomocí Věty vet4 29 můžeme řešit úlohy objevující se v nedělních přílohách novin.

Příklad 31. V chatové osadě žije 28 lidí a každý z nich je členem nějakého z následujících spolků: filatelistický (7 členů), tenisový (10 členů), šachový (7 členů) a divadelní. Víme, že nikdo není členem tří spolků, dvojí členství má 8 obyvatel a žádný tenista nehraje šachy ani nesbírá známky. Kolik členů má divadelní spolek?

Symboly F, T, S a D postupně označují množiny členů spolků filatelistického, tenisového, šachového a divadelního. Pak $|F| = |S| = 7$, $|T| = 10$, $|F \cup T \cup S \cup D| = 28$. Dále $T \cap S = \emptyset$ a $T \cap F = \emptyset$. Podle Věty vet4 29,

$$28 = 7 + 10 + 7 + |D| - 8, \quad \text{tj.} \quad |D| = 12.$$

A ještě jedna aplikace Principu inkluze a exkluze.

pri29 **Příklad 32.** Kolik je uspořádání (tj. permutací) řady čísel $1, 2, \ldots, n$ takových, aby žádné číslo nezůstalo na místě?

Od celkového počtu $n!$ permutací odečteme počet permutací, kdy alespoň jedno číslo zůstalo na svém místě. Označíme si A_k množinu permutací, kde k-té číslo zůstalo na místě. Hledaná odpověď je pak číslo

$$D_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Pro použití Věty vet4 29 musíme spočítat následující hodnoty:

$$\begin{aligned}
|A_k| &= (n-1)! \\
|A_j \cap A_k| &= (n-2)! \\
|A_i \cap A_j \cap A_k| &= (n-3)! \\
&\vdots \\
|A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n| &= (n-n)! = 1.
\end{aligned}$$

Tak dostáváme

$$\begin{aligned}
D_n &= n! - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\
&= n! - n\,(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3) - \cdots + (-1)^n \\
&= n!\,\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\Big).
\end{aligned}$$

Pro výpočet je tento tvar nevhodný. Nalezneme lepší vyjádření pro D_n. Rozvoj exponenciální funkce e^x v řadu má tvar $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, což pro $x = -1$ dává

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots .$$

Proto platí, že

$$\frac{n!}{e} - D_n = n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \cdots\Big).$$

Výraz v závorce je v absolutní hodnotě menší než 1, a tak máme, že

$$\Big|\frac{n!}{e} - D_n\Big| < \frac{1}{2}.$$

Protože číslo D_n je přirozené, je tak D_n nejbližší přirozené číslo k $n!/e$, tj.

$$D_n = \Big[\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\Big],$$

kde $[x]$ značí celou část čísla x. Pro ilustraci uveďme několik hodnot D_n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_n	0	1	2	9	44	265	1854	14 833	133 496

Obecná verze Principu Inkluze a Exkluze.

Z abstraktního pohledu je Princip inkluze a exkluze vyjádření inverze k jistému lineárnímu zobrazení.

apie **Věta 33.** *Mějme n-prvkovou množinu M a označíme L lineární prostor dimenze 2^n všech zobrazení $f\colon 2^M \longrightarrow \mathbb{R}$. Je-li $Q\colon L \longrightarrow L$ lineární operátor daný*

$$Qf(I) = \sum_{J \supset I} f(J), \quad I \subset M,$$

pak inverzní operátor je

$$Q^{-1}f(J) = \sum_{I \supset J} (-1)^{|I \setminus J|} f(I), \quad J \subset M.$$

Důkaz. Ověříme, že $Q^{-1}Q = \mathrm{id}$. Nechť $f \in L$ a $J \subset M$.

$$\begin{aligned} Q^{-1}Qf(J) &= \sum_{I \supset J} (-1)^{|I \setminus J|} Qf(I) = \sum_{I \supset J} (-1)^{|I \setminus J|} \sum_{K \supset I} f(K) \\ &= \sum_{K \supset J} f(K) \sum_{K \supset I \supset J} (-1)^{|I \setminus K|} = \sum_{K \supset J} f(K) \sum_{i=0}^{|K \setminus J|} (-1)^i \binom{|K \setminus J|}{i}. \end{aligned}$$

Protože

$$\sum_{i=0}^{|K\setminus J|}(-1)^i\binom{|K\setminus J|}{i}=\begin{cases}0 & \text{pro } K\setminus J\neq\emptyset;\\ 1 & \text{pro } K=J,\end{cases}$$

dostáváme, že $Q^{-1}Qf(J)=f(J)$. □

Obvyklá interpretace výše uvedené Věty je, že M označuje množinu vlastností, které prvky z jisté konečné množiny T mohou, ale nemusí mít. Pak pro $I\subset M$ položíme

$$f(I)=\left|\{t\in T \mid t \text{ má všechny vlastnosti z } I \text{ a žádné jiné}\}\right|.$$

Význam $Qf(I)$ je počet prvků v T, které mají vlastnosti obsažené alespoň v I, což lze obvykle zjistit lépe než $f(I)$. Podle Věty 33 platí

$$f(I)=\sum_{J\supset I}(-1)^{|J\setminus I|}Qf(J).$$

Mějme množiny $A_1,A_2,\dots,A_n$, které jsou podmnožinami nějaké pevné množiny X. Pro $I\subset[n]$ položíme

$$A_I=\bigcap_{i\in I}A_i\cap\bigcap_{i\in[n]\setminus I}(X\setminus A_i)\quad\text{a}\quad f(I)=|A_I|.$$

Protože $A_I\cap A_J=\emptyset$ pro $I\neq J$, máme

$$Qf(I)=\Big|\bigcap_{i\in I}A_i\Big|.$$

Věta 33 dává

$$\begin{aligned}\Big|X\setminus\bigcup_{i\in[n]}A_i\Big|&=\Big|\bigcap_{i\in[n]}(X\setminus A_i)\Big|=f(\emptyset)=Q^{-1}Qf(\emptyset)=\sum_{I\subset[n]}(-1)^{|I|}Qf(I)\\&=\sum_{I\subset[n]}(-1)^{|I|}\Big|\bigcap_{i\in I}A_i\Big|=|X|+\sum_{\emptyset\neq I\subset[n]}(-1)^{|I|}\Big|\bigcap_{i\in I}A_i\Big|\\&=|X|+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\sum_{|I|=j}\Big|\bigcap_{i\in I}A_i\Big|.\end{aligned}$$

Přerovnáním dostaneme Větu 29:

$$\Big|\bigcup_{i\in[n]}A_i\Big|=|X|-\Big|X\setminus\bigcup_{i\in[n]}A_i\Big|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\sum_{|I|=j}\Big|\bigcap_{i\in I}A_i\Big|.$$

Cvičení.

Příklady označené $*$ jsou o něco náročnější.

(1) Mezi městy A a B vede 7 různých cest, mezi městy B a C vede 5 různých cest a mezi městy A a C vedou dvě různé cesty. Označíme slovem *putování* takové procházení cest, při kterém se do žádného z měst nevracíme.

-7a (a) Kolik je putování z A do C?

-7b (b) Kolika způsoby lze projít z A do C a zpět tak, že na putování z A do C naváže putování z C do A?

-7c (c) Kolika způsoby lze projít z A do C a zpět jako v bodě (b), chceme-li projít městem B alespoň jednou?

-7d (d) Kolika způsoby lze projít z A do C a zpět jako v bodě (b), když neužijeme žádnou cestu dvakrát?

-6 (2) Kolika způsoby je možné vybrat dvojici muž-žena z n manželských párů tak, aby netvořili manželský pár?

0 (3) Mějme v prostoru n bodů, z nichž žádné čtyři neleží v rovině. Kolik rovin určuje tato množina bodů?

(4) V čele místnosti je dlouhý stůl, kde na každé ze dvou dlouhých stran je m míst k sezení a u krátkých stran místa k sezení nejsou.

3.3a (a) Kolika způsoby lze rozsadit $2m$ lidí?

3.3b (b) Zajímá-li nás u rozesazení jen to, které dvojice sedí naproti sobě, kolik nyní bude možností?

(5) Uvažujme čtyřciferná čísla.

-6a (a) Kolik z nich obsahuje číslici 1?

-6b (b) Kolik z nich začíná a končí sudou číslicí?

-6c (c) Kolik z nich začíná lichou číslicí, je dělitelné 5 a neobsahuje ani 6 ani 7?

-6d (d) Kolik z nich je sudých obsahujících 5, ale ne 2?

-6e (e) Kolik z nich má v zápise alespoň jednu číslici vícekrát?

-6f (f) Kolik z nich je takových, že součet cifer je lichý? (První číslice nesmí být 0.)

-6g (g)$*$ Kolik z nich obsahuje dvě (ale ne tři) různé číslice?

-3 (6) Kolik je pěticiferných čísel, která mají uprostřed 6 a jsou dělitelná 3?

(7) Obchodní cestující má během týdne navštívit 4 firmy a každou z nich 5-krát.

-4a (a) Kolika způsoby to lze provést?

-4b (b) Kolika způsoby to lze provést, nemá-li začít a skončit u stejné firmy?

-2 (8) Ukažte, že číslo $\binom{2n}{n}$, $n \geq 1$, je vždy sudé.

(9) Mějme abecedu sestávající z n písmen a vytváříme slova délky 4. (Slovo je posloupnost symbolů z abecedy.)

-1a (a) Kolik je slov délky 4, kde nestojí dvě stejná písmena vedle sebe?

-1b (b) Kolik z nich splňuje požadavek z (a), ale navíc chceme, aby i první a poslední písmena byla různá?

-1c (c)$*$ Stejná otázka jako v (b), ale pro slova délky 5.

(10) Společnost se skládá z n mužů a n žen.

2a (a) Kolika způsoby je možné utvořit řadu, kde se muži a ženy střídají?

2b (b) Kolika způsoby je možné všechny usadit okolo kulatého stolu tak, že se muži a ženy střídají? Rozesazení, která se liší pouze pootočením, pokládáme za stejná.

(11) Mějme balíček karet očíslovaných $1, 2 \ldots, n$.

7a (a) Kolik je různých uspořádání balíčku takových, že při snímání přijde karta číslo 1 dříve než karta číslo 2?

7b (b) Kolik je různých uspořádání balíčku takových, že při snímání je mezi kartou číslo 1 a kartou číslo 2 právě k dalších karet?

7c (c) Kolika způsoby je možné balíček uspořádat, aby pro každé $k = 1, \ldots, n$ platilo, že na k-tém místě v balíčku je karta s číslem alespoň $k + 1$?

7d (d) Kolika způsoby je možné balíček uspořádat, aby pro každé $k = 1, \ldots, n$ platilo, že na k-tém místě v balíčku je karta s číslem nejvýše $k + 4$?

(12) Uvažujme množinu $M = \{1, 2, \ldots, n\}$.

-5a (a) Kolik podmnožin množiny M obsahuje právě jedno z čísel 1 a 2?

-5aa (b) Kolik podmnožin množiny M obsahuje alespoň jedno z čísel 1 a 2?

-5b (c) Kolika způsoby lze M uspořádat, aby 1 přecházela 2 a 3 předcházela 4?

-5c (d) Kolika způsoby lze M uspořádat, aby 1 přecházela 2 i 3?

-5d (e) Kolika způsoby lze M uspořádat, aby součet každých dvou sousedních čísel byl lichý?

-9.2 (13) Kolik je 7-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 20\}$, které neobsahují žádnou dvojici po sobě jdoucích čísel?

0.1 (14) Obdélník je rozdělený vodorovnými a svislými úsečkami na $m \times n$ čtverců velikosti 1×1. Kolik různých obdélníků je tímto dělením určeno?

(15) Z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ zvolíme čtyři čísla.

3a (a) Kolik je takových výběrů, že největší ze zvolených čísel je alespoň 11?

3b (b) Kolik je takových výběrů, že druhé největší ze zvolených čísel je alespoň 11?

(16) Z čísel $\{1, \ldots, n\}$ tvoříme posloupnosti délky k.

6a (a) Kolik existuje různých klesajících posloupností?

6b (b) Kolik existuje různých nerostoucích posloupností?

8 (17) V místní cukrárně mají 10 druhů zmrzliny a tři druhy polev. Jestliže zmrzlinový pohár má tři kopečky zmrzliny a každý kopeček může mít (nebo nemusí) na sobě nějakou z polev, kolik různých zmrzlinových pohárů lze vytvořit?

1.1 (18) Kolik kladných celočíselných řešení má rovnice $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ požadujeme-li, aby řešení byla lichá čísla.

-7 (19) Monomial v n proměnných je výraz tvaru $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$. Stupeň monomialu je $k_1+k_2+\cdots+k_n$. Kolik je monomialů stupně k? Kolik je monomialů stupně nejvýše k?

-8 (20) Kolik je celočíselných řešení rovnice $x_1+x_2+\cdots+x_5=23$ vyhovujících podmínce $x_i \geq i$ pro všechna $i=1,2,\ldots,5$?

-9 (21)$*$ Kolik je celočíselných nezáporných řešení rovnice $x_1+x_2+\cdots+x_7=k$ takových, že x_1 je sudé a $x_2 \in \{0,1\}$?

-9.1a (22) (a) Kolika způsoby lze k stejných míčků rozmístit do n očíslovaných krabic, když nemusíme nutně použít všechny míčky?

-9.1b (b) Stejná situace jako v případě (a), ale navíc chceme, aby žádná krabice nezůstala prázdná.

-9.1c (c) Stejná situace jako v případě (a), ale nyní jsou míčky očíslované.

(23) Mějme v krabici n míčků očíslovaných $1,2,\ldots,n$. Postupně je vytahujeme všechny ven.

1a (a) Nechť k je pevně zvolené číslo, $1 \leq k \leq n$. Kolik je případů takových, že k-tý vytažený míček má číslo právě k?

1b (b) Kolik je takových vytažení všech míčků, že při nich alespoň v $n-1$ případech souhlasí pořadí taženého míčku s jeho číslem?

1c (c) Kolik je případů, kdy pro všechny tažené míčky platí, že pořadí vytažení je různé než jejich číslo?

(24) Na šachovnici 8×8 rozestavíme 8 věží.

3.1a (a) Kolika způsoby je to možné udělat tak, aby se věže navzájem nenapadaly?

3.1b (b)$*$ Kolika způsoby je to možné udělat tak, aby se věže navzájem nenapadaly a navíc aby žádná věž nestála na diagonále z černých políček?

(25) Máme k dispozici p nul a q jedniček.

5a (a) Kolik různých posloupností délky $p+q$ lze sestavit?

5b (b) Kolik lze sestrojit posloupností délky $p+q$ takových, aby se v nich nevyskytovali dvě nuly vedle sebe?

5c (c)$*$ Kolik je posloupností délky $p+q$ je takových, že obsahuje právě tři bloky nul? (Blok je posloupnost za sebou stojících stejných symbolů, může mít i délku jedna.)

(26)$*$ Máme k dispozici 6 nul, 5 jedniček a 4 dvojky. Kolika způsoby je lze seřadit, aby

4.2a (a) První nula předcházela první jedničce?

4.2b (b) První nula předcházela první jedničce a ta předcházela první dvojce?

4.1 (27)∗ Kolem kulatého stolu je p míst, kde p je prvočíslo. Ke každému místu připravíme jeden talíř. Talíře máme k dispozici v n různých barvách. Kolik je rozmístění talířů kolem kulatého stolu takových, při kterém se použijí talíře alespoň dvou barev? (Řešení této úlohy je jeden z možných důkazů tzv. malé Fermatovy věty, která říká, že pro každé přirozené číslo n a prvočíslo p platí vztah $n^p \equiv n \bmod p$.)

1n (28) Letiště odbavilo během jednoho dne 1500 odletů. Pomocí Dirichletova principu ukažte, že alespoň dvě letadla musela odlétat během jedné minuty.

9 (29) Na ostrově žije 510 tuleňů a každý má počet vousů mezi 10 a 30. Pomocí Dirichletova principu dokažte, že na ostrově je alespoň 25 tuleňů se stejným počtem vousů.

2n (30) Fotbalové mužstvo vstřelilo za sezónu 40 branek, na kterých se podílelo 9 hráčů týmu. Pomocí Dirichletova principu ukažte, že alespoň dva hráči vstřelili stejný počet branek.

3n (31) Čísla $1, 2, \ldots, 10$ náhodně rozmístíme na kružnici. Pomocí Dirichletova principu ukažte, že musí existovat trojice sousedních čísel se součtem alespoň 17.

10 (32)∗ Z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ vybereme jakýchkoli $n + 1$ čísel (mohou se i opakovat). Pomocí Dirichletova principu ukažte, že mezi vybranými čísly musí být dvě takové, že jedno je násobkem druhého.

11 (33)∗ Pomocí Dirichletova principu ukažte, že každá posloupnost $n^2 + 1$ různých reálných čísel musí obsahovat monotónní posloupnost délky $n + 1$.

Řešení:

-7a (1a) $N = 7 \cdot 5 + 2 = 37$.

-7b (1b) $N = 37^2$.

-7c (1c) $N = 37^2 - 4$.

-7d (1d) Procházení je tří typů: Buď se městu B zcela vyhneme, nebo ho projdeme jednou nebo ho projdeme dvakrát. V prvním případě je počet možností $N_1 = 2$.V druhém případě je počet možností $N_2 = 2(7 \cdot 5 \cdot 2) = 140$. Ve třetím případě je počet možností $N_3 = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 = 840$. Celkem je 982 možností.

-6 (2) $N = n(n-1)$.

0 (3) Rovina je určena třemi body, proto počet rovin je $\binom{n}{3}$.

3.3a (4a) Zvolíme m lidí z celkového počtu $2m$, což lze $\binom{2m}{m}$ způsoby a posadíme do zadní řady $m!$ způsoby. Zbylých m rozesadíme rovněž $m!$ způsoby. Celkově $N = \binom{2m}{m} m!\, m! = (2m)!$.

3.3b (4b) Tato otázka je ekvivalentní otázce na počet možností, jak rozdělit $2m$ lidí do dvojic. To je $N = \binom{2m}{m}\binom{2m-2}{m}\binom{2m-4}{m} \cdots \binom{2}{2} = \frac{(2m)!}{2^m}$.

-6a (5a) Od všech možností odečteme čísla neobsahující 1, $N = 9 \cdot 10^3 - 8 \cdot 9^3$.

-6b (5b) $N = 4 \cdot 10^2 \cdot 5$.

-6c (5c) $N = 4 \cdot 8^2 \cdot 2$.

-6d (5d) Od všech sudých čísel neobsahujících 2 odečteme ta sudá čísla, která neobsahují ani 2 ani 5: $N = 8 \cdot 9^2 \cdot 4 - 7 \cdot 8^2 \cdot 4$

-6e (5e) Od všech čísel odečteme ta, kde se číslice neopakují: $N = 9 \cdot 10^3 - 9^2 \cdot 8 \cdot 7$.

-6f (5f) Součet je lichý, je-li jeden sčítanec lichý a tři sudé nebo naopak. V prvním případě je počet $N_1 = 5^4 + 4 \cdot 3 \cdot 5^3$, kde 5^4 odpovídá případu, že liché číslo stojí na začátku a $4 \cdot 3 \cdot 5^3$ případu, že liché číslo je na 2., 3. nebo 4. pozici. Podobně pro druhý případ: $N_2 = 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^4$, kde $4 \cdot 5^3$ odpovídá případu, kdy je sudé číslo na začátku a $3 \cdot 5^4$ zbylému případu. Dohromady $N = N_1 + N_2 = 4500$.

-6g (5g) Začneme tím, že počet čtveřic vytvořený dvěma různými symboly je 2^4 neboť na každé místo máme dvě možnosti. Protože chceme, aby se ve čtveřici objevily oba symboly, musíme odečíst dvě čtveřice typu $aaaa$ obsahující pouze jeden symbol. Nyní je počet $2^4 - 2$. Vybereme dva symboly z $\{1, 2, \dots, 9\}$ což lze $\binom{9}{2}$ způsoby. Číslo $\binom{9}{2}(2^4 - 2)$ je počet čtyřciferných čísel hledaného typu, ale jen těch, které nemají v zápise 0. Zbývá přidat ta čísla, mající v zápise 0. Na začátku stojí nenulová číslice a, kterých je 9. Zbylá tři místa zaplníme touto nenulovou číslicí a 0, což je $2^3 - 1$ možností, neboť opět odečítáme číslo tvaru $aaaa$. Tento případ dává $9(2^3 - 1)$ možností. Dohromady $N = \binom{9}{2}(2^4 - 2) + 9(2^3 - 1)$.

-3 (6) Číslo je dělitelné třemi právě, když je ciferný součet je dělitelný třemi. Protože hledaná čísla jsou tvar $ab6cd$, je dělitelnost zaručena pokud $a + b + c + d$ je dělitelné třemi tj. pokud je číslo $abcd$ dělitelné třemi. Čtyřciferných čísel je 9000 ($= 9999 - 999$) a dělitelné třemi je každé třetí. Hledaný počet je tak $N = 3000$.

-4a (7a) Návštěv je celkem 20 a každé rozdělení návštěv během týdne je popsáno slovem délky 20 používající čtyřpísmennou abecedu (každé písmeno odpovídá jedné firmě.) $N = \binom{20}{5,5,5,5} = 11\ 732\ 745\ 024$

-4b (7b) Od celkového počtu odečteme ta slova mající stejný začátek a konec, $N = \binom{20}{5,5,5,5} - 4\binom{18}{3,5,5,5} = 9\ 262\ 693\ 440$.

-2 (8) Jeden způsob je numerický: $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$. Jiný způsob je kombinatorický: $\binom{2n}{n}$ je počet n-prvkových podmnožin množiny s $2n$ prvky. Doplněk každé takové množiny je opět n-prvková množina. Proto je celý soubor n-prvkových podmnožin složen z dvojic (množina, její doplněk), a tedy musí mít sudý počet prvků.

-1a (9a) $N = n(n-1)^3$.

-1b (9b) Od možností z (a) odečteme slova, kde stejná písmena nestojí vedle sebe, ale první a poslední písmeno je stejné. Tato slova mají prostřední dvě písmena navzájem různá a navíc různá od prvního (a tedy i posledního) písmene. $N = n(n-1)^3 - n(n-1)(n-2)$.

-1c
(9c) Zde je situace složitější v porovnání s (b). Opět odečteme od všech možností, kterých je $n(n-1)^4$, slova se stejným začátkem a koncem. Tato slova si rozdělíme do dvou skupin. První typ je $a*a*a$, kde $*$ je jakékoli písmeno odlišné od a. Takových slov je $N_1 = n(n-1)^2$. Druhý typ je $a***a$, kde $*$ je opět písmeno odlišné od a, ale navíc musíme dodržovat to, že stejná písmena nestojí vedle sebe. $N_2 = n(n-1)(n-2)^2$. Dohromady $N = n(n-1)^4 - n(n-1)^2 - n(n-1)(n-2)^2$.

2a
(10a) Začíná-li řada mužem, stojí muži na lichých místech a počet jejich rozmístění je $n!$. Doplnit ženy na sudá místa lze také $n!$ způsoby, a tedy $(n!)^2$ možností. Začíná-li řada ženou, je situace stejná, takže výsledek je $N = 2(n!)^2$.

2b
(10b) Rozsadíme ženy kolem kulatého stolu, aby mezi nimi bylo vždy jedno volné místo. To je možné $(n-1)!$ způsoby. Na zbylá prázdná místa posadíme n mužů $n!$ způsoby, takže počet všech rozmístění je $N = n!\,(n-1)!$.

7a
(11a) Ze symetrie vyplývá, že polovina všech uspořádání balíčku je taková, že 1 předchází 2 a ve zbytku naopak. Hledaný počet je $N = n!/2$.

7b
(11b) Blok začínající 1 a končící 2, mezi kterými je k dalších karet, může být v balíčku umístěn $n-k-1$ způsoby. Kromě karet 1 a 2 můžeme zbylých $n-2$ karet v balíčku uspořádat $(n-2)!$ způsoby. Protože ještě celý blok může začínat 2 a končit 1, dostaneme, že počet je $N = 2(n-k-1)\cdot(n-2)!$.

7c
(11c) Neexistuje žádné takové uspořádání, protože poslední karta by musela mít číslo $n+1$.

7d
(11d) Pro první kartu máme 5 možností. Rovněž i pro druhou, třetí atd., až dojdeme ke kartě čtvrté od konce, tj. s pořadovým číslem $n-3$. Pro tu už máme jen 4 možnosti. Pro další karty pak jen postupně 3, 2 a 1 možnost. $N = 5^{n-4}4!$

-5a
(12a) Množiny obsahující 1 a ne 2 mají tvar $A = \{1\} \cup A_0$, kde $A_0 \subset \{3, 4, \dots, n\}$. Je jich 2^{n-2}. Stejný počet je i množin obsahující 2 a ne 1. Celkem $N = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

-5aa
(12b) Od všech podmnožin odečteme ty, které neobsahují ani 1 ani 2, $N = 2^n - 2^{n-2}$.

-5b
(12c) Vybereme dvě místa pro 1 a 2 ve správném pořadí, to lze $\binom{n}{2}$ způsoby. Ze zbylých míst vybereme opět dvě pro 3 a 4, to lze $\binom{n-2}{2}$ způsoby. Zbylých $n-4$ míst vyplníme libovolně. $N = \binom{n}{2}\binom{n-2}{2}(n-4)! = \frac{1}{4}\,n!$.

-5c
(12d) Vybereme tři místa pro 1, 2 a 3, což lze $\binom{n}{3}$ způsoby. Do těchto tří pozic umístíme čísla ve dvou pořadích $1, 2, 3$ nebo $1, 3, 2$. Zbytek doplníme jakkoli. $N = 2\binom{n}{3}(n-3)! = \frac{1}{3}\,n!$.

-5d
(12e) Podmínka znamená, že se musí sudá a lichá čísla střídat. Uspořádávat lze tedy sudá čísla mezi sebou nebo lichá čísla mezi sebou. Je-li n sudé, je počet permutací sudých i lichých čísel stejný a je roven $(n/2)!$. Protože uspořádání může začínat sudým nebo lichým číslem, je $N = 2(n/2)!(n/2)!$. Je-li n liché, je počet lichých čísel $(n+1)/2$ a sudých $(n-1)/2$. Uspořádání celé mnžiny zde musí začínat pouze lichým číslem, proto $N = (\frac{n+1}{2})!(\frac{n-1}{2})!$.

(13) Jsou-li $n_1 < n_2 < \cdots < n_7$ vybraná čísla, pak za prvními šesti je číslo, které být vybráno nesmělo. Obor použitelných čísel se tím zmenšil o 6 na 14. Z tohoto počtu vybíráme 7, $N = \binom{14}{7}$.

(14) Každý obdélník je určen dvěma vodorovnými úsečkami a dvěma svislými. Prvních je $m+1$ a druhých je $n+1$. Počet možných obdélníků je $N = \binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2}$.

(15a) Je-li $n \le 10$, pak výběr neexistuje. Pro $n \ge 11$ ode všech výběrů čtyř čísel odečteme ty výběry, kde jsou všechna čísla menší než 11, $N = \binom{n}{4} - \binom{10}{4}$.

(15b) Je-li $n \le 11$, pak výběr neexistuje. Pro $n \ge 12$ ode všech výběrů odečteme ty, kde jsou všechna čísla menší než 11 a pak také ty výběry, kde tři z čísel jsou menší než 11, ale jedno je alespoň 11. $N = \binom{n}{4} - \binom{10}{4} - \binom{10}{3}(n-10)$.

(16a) Každému výběru k různých čísel odpovídá právě jedno uspořádání těchto čísel do klesající posloupnosti, tj. máme $N = \binom{n}{k}$ klesajících posloupností.

(16b) V nerostoucí posloupnosti se mohou hodnoty opakovat, proto vybíráme k-tice s opakováním, $N = \binom{n+k-1}{n-1}$.

(17) Označíme si dvojicí (z,p) typ jedné kopičky zmrzliny s polevou: z nabývá hodnot $1, 2, \dots, 10$ a znamená jeden z druhů zmrzliny a p nabývá hodnot $0, 1, 2, 3$ a označuje jednu z použitých polev (čísla $1, 2, 3$) nebo bez polevy (číslo 0). Takových dvojic je 40. Pohár se skládá ze tří těchto dvojic, přičemž připouštíme opakování. Odtud máme, že počet pohárů je $\binom{40+3-1}{40-1} = 11\,480$.

(18) Pišme hledané řešení ve tvaru $x_i = 2t_i + 1$, kde t_i je celé nezáporné číslo. Po dosazení a úpravě dostaneme rovnici $t_1 + \cdots + t_n = \frac{1}{2}(k-n)$. Podle Věty 20 je $N = \binom{(n+k)/2-1}{n-1}$, mají-li n, k stejnou paritu; jinak řešení neexistuje.

(19) Podle Věty 20 je počet monomialů stupně k roven $N = \binom{n+k-1}{n-1}$. Počet monomialů stupně nejvýše k je stejný jako počet celočíselných nezáporných řešení nerovnosti $k_1 + \cdots + k_n \le k$. Tento počet je dále stejný jako počet celočíselných nezáporných řešení rovnice $k_1 + \cdots + k_n + q = k$, kde jsme přidali pomocnou proměnnou q. Věta 20 dává $N = \binom{n+k}{n}$.

(20) Proměnné si napíšeme ve tvaru $x_i = t_i + i$, $i = 1, 2, \dots, 5$, kde t_i jsou celá nezáporná čísla. Dosazením a úpravou dostaneme rovnici $t_1 + \cdots + t_5 = 8$. Podle Věty 20 je $N = \binom{12}{4}$.

(21) Označíme si $y = x_1 + x_2$. Budeme-li znát hodnotu y, pak pro sudé y položíme $x_1 = y$ a $x_2 = 0$, pro liché y položíme $x_1 = y - 1$ a $x_2 = 1$. Počet hledaných řešení se zredukoval na počet řešení rovnice $y + x_3 + \cdots + x_7 = k$. Podle Věty 20 je $N = \binom{k+5}{5}$.

(22a) Symbol x_i označuje počet míčků v i-té krabici. Hledáme počet celočíselných nezáporných řešení nerovnice $x_1 + \cdots + x_n \le k$. Stejným postupem jako při druhé otázce ve cvičení 19 dostaneme $N = \binom{n+k}{n}$.

(22b) Označíme si počet míčků v i-té krabici $x_i = t_i + 1$, $i = 1, \dots n$, kde t_i jsou celá nezáporná čísla. Hledaný počet rozmístění je pak stejný jako počet řešení nerovnosti $t_1 + \cdots + t_n \le k - n$. Analogickým postupem jako v (a) dostaneme $N = \binom{k}{n}$.

-9.1c
(22c) Rozdělit m očíslovaných míčků do n očíslovaných krabic lze n^m způsoby: První míček dáme do jedné z n krabic, druhý opět do jedné z n krabic atd. Nemusíme-li použít všech k míčků, je počet rozmístění roven $N = \sum_{m=0}^{k} n^m = (n^{k+1} - 1)/(n - 1)$ pro $n > 1$ a $N = k + 1$ pro $n = 1$.

1a
(23a) Umístíme-li míček s číslem k na k-té místo, bude zbylých $n - 1$ míčků rozmístěno $N = (n - 1)!$ způsoby.

1b
(23b) V tomto případě jen jeden způsob vyhovuje zadání, u všech míčků souhlasí jeho pořadí s číslem na míčku.

1b
(23b) To je situace řešená v textu, v Příkladu pri29 32, $N = D_n$.

3.1a
(24a) V první řádku šachovnice máme 8 možností pro umístění věže. Ve druhém řádku už jen 7 neboť jeden sloupec je již obsazen, ve třetím jen 6 atd. Počet rozmístění je $N = 8!$.

3.1b
(24b) Označme A_k množinu všech rozmístění 8 věží, že se vzájemně nenapadají a přitom jedna věž stojí na k-tém políčku diagonály, $k = 1, 2, \ldots 8$. Počet hledaných rozmístění je pak $8! - |A_1 \cup \cdots \cup A_8|$. Dále, $|A_k| = 7!$, $|A_j \cap A_k| = 6!, \ldots, |A_1 \cap \ldots A_7| = 1 = |A_1 \cap \ldots A_8|$. Podle Prinicpu inkluze a exkluze (Věta vet4 29) dostaneme výsledek $N = 8! - \sum_{k=1}^{8} (-1)^{k-1} \binom{8}{k} (8 - k)! = D_8 = 14\,833$, kde D_n je číslo z Příkladu pri29 32.

5a
(25a) Z celkového počtu $p + q$ míst v posloupnosti vybereme q míst pro jedničky a zbytek doplníme nulami. Počet je $N = \binom{p+q}{q}$.

5b
(25b) Posloupnost vypadá tak, že bloky jedniček jsou oddělené nulami a pouze první a poslední blok jedniček může být prázdný. Označíme x_i počet jedniček v i-tém bloku. Pak $x_1 + \cdots x_{p+1} = q$, kde $x_1 \geq 1$, $x_{p+1} \geq 1$. Nahrazením $x_i = t_i + 1$ pro $i = 2, 3, \ldots, p$ dostaneme $x_1 + t_2 + \cdot + t_p + x_{p+1} = q - (p - 1)$. Počet nezáporných celočíselných řešení je $N = \binom{q+1}{p}$.

5c
(25c) Označíme pro chvíli a, b, c tři bloky nul. Máme tak uspořádat do posloupnosti q jedniček spolu se třemi symboly a, b, c tak, aby žádné dva symboly nestály těsně za sebou. To lze $\binom{q+1}{3}$ způsoby. Zbývá rozdělit p nul mezi tři neprázdné bloky a, b, c. Označíme x_a, x_b, x_c počty nul v blocích a, b, c, pak platí $x_a + x_b + x_c = p$. Počet kladných celočíselných řešení je $\binom{p-1}{2}$, viz Příklad pri22 24. Celkem $N = \binom{q+1}{3}\binom{p-1}{2}$.

4.2a
(26a) Číslo 2 nehraje v uspořádání žádnou roli, neboť může stát kdekoli. Máme tak 6 nul a 5 jedniček, tj. 11 symbolů. Uspořádáme je podle požadavku: na první místo dáme 0 a zbylých deset míst obsadíme 0 a 1 jakkoli. To lze $\binom{10}{5}$ způsoby. Zbývá do vytvořené posloupnosti z 0 a 1 délky 11 libovolně rozmístit čtyři 2. Míst pro možné umístění 2 je 12. Označíme x_i počet dvojek na i-tém místě. Platí $x_1 + \cdots + x_{12} = 4$. Počet celočíselných nezáporných řešení je $\binom{15}{4}$. Dohromady $N = \binom{10}{5}\binom{15}{4}$.

4.2b
(26b) Na prvním místě musí stát 0. V uspořádání zbytku posloupnosti tak už 0 nehraje žádnou roli, může stát kdekoli. 5 jedniček a 4 dvojky uspořádáme podle požadavku. Jako v případě 4.2a (26a) to lze $\binom{8}{4}$ způsoby. Do této posloupnosti libovolně rozmístíme zbylých 5 nul. Míst pro umístění je 10. Označíme x_i počet 0 na i-tém místě. Pak

$x_1 + \cdots + x_{10} = 5$. Počet celočíselných nezáporných řešení je $\binom{14}{5}$. Dohromady tak máme $N = \binom{8}{4}\binom{14}{5}$.

4.1 (27) Představme si nejprve, že talíře rovnáme do řady: Na každé místo máme výběr z n barev, tedy n^p možností. Musíme ale odečíst ta rozmístění, kde se vyskytují všechny talíře stejné barvy. Pro uspořádání do řady bychom tak dostali $n^p - n$ možností. Protože p je prvočíslo nemůže se takové rozmístění talířů skládat s periodicky se opakujících stejných bloků. Proto každé jedno rozmístění do kruhu odpovídá p různým rozmístěním do řady. Odtud máme, že hledaný počet je $(n^p - n)/p$.

1n (28) Počet minut během 24 hodin je 1440. Množina 1500 odletů je rozložena na 1400 částí, proto alespoň dvě letadla musela vzlétnou během jedné minuty.

9 (29) Porotože je 21 různých počtů vousů, máme, že existuje alespoň $510/21 = 24.285$ tuleňů se stejným počtem vousů.

2n (30) Předpokládejme, že každý z devíti hráčů vstřelil odlišný počet branek. Nejmenší počet takto vstřelených branek je $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$. Protože branek je jen 40, museli dva hráči vstřelit stejný počet branek.

3n (31) Trojic sousedních čísel je 10 a každé číslo leží ve třech trojicích. Kdyby součet u všech trojic sousedních čísel byl nejvýše 16, pak sečtením těchto součtů dostaneme nejvýše 160. Tento součet je ale zároveň trojnásobkem součtu $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$, což je 165.

10 (32) Vybraná čísla napíšeme ve tvaru $2^{k_1}m_1, \ldots 2^{k_{n+1}}m_{n+1}$, kde m_i jsou lichá čísla. Protože $m_i < 2n$ je jejich počet nejvýše n. Existují proto $i \neq j$, že $m_i = m_j$. Pak $2^{k_i}m_i$ a $2^{k_j}m_j$ je hledaná dvojice čísel.

11 (33) Mějme členy posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$. Ke každému a_i přiřadíme dvojici čísel (r_i, u_i), kde r_i je maximální délka neklesající podposloupnosti začínající v a_i a u_i je maximální délka nerostoucí podposloupnosti začínající v a_i. Kdyby neexistovala monotonní podposloupnost délky $n + 1$, pak r_i a u_i jsou nejvýše rovny n. Možných dvojic (r_i, u_i) je pak n^2. Podle Dirichletova principu musí existovat dvě stejné dvojice $(r_i, u_i) = (r_j, u_j)$, $i < j$. Je-li $a_i < a_j$, pak existuje neklesající podposloupnost začínající v a_i a mající $r_i + 1$ členů - spor. Je-li $a_i > a_j$, pak existuje nerostoucí podposloupnost začínající v a_i délky $d_i + 1$ - spor.