Teorie grafů.

Teorie grafů se stala velmi užitečným nástrojem při analýze situací, kdy jsou dvojice prvků dané množiny vázané nějakým vztahem. Příkladem je např. propojení mezi prvky rozvodné sítě, struktura telekomunikačního systemu, cestovní plány apod. Rovněž množiny s logickou nebo hierarchickou strukturou jako počítačová data, evoluční stromy v biologii nebo rozvržení postupu a úkolů v komplikovaném projektu mají přirozený tvar grafu.

Základní pojmy.

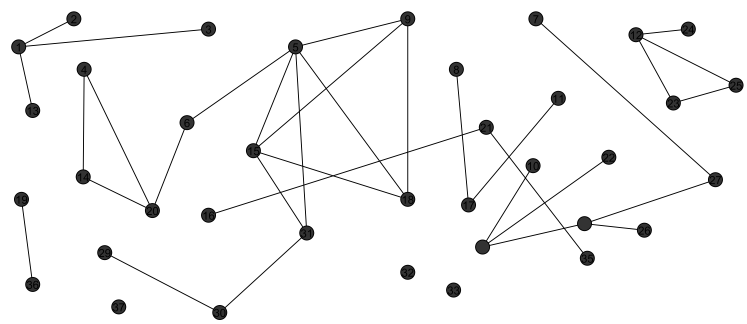
Jako motivace k základním definicím nám poslouží následující úloha.

Příklad 1. Na party je 37 lidí. Pak tam musí být někdo, kdo byl představen sudému počtu přítomných účastníků.

První, co nás napadne, je otázka, zda číslo 37 hraje v této úloze nějakou roli. Kdyby účastníků bylo např. jen 36 a každý byl představen každému, pak každý účastník byl představen 35 ostatním. Nikdo tak nemohl být představen sudému počtu lidí. Tento argument ukazuje, že počet všech účastníků nesmí být sudý. Přeformulujeme příklad na následující silnější tvrzení.

Příklad 2. Na party je lichý počet lidí. Pak tam musí být někdo, kdo byl představen sudému počtu přítomných účastníků.

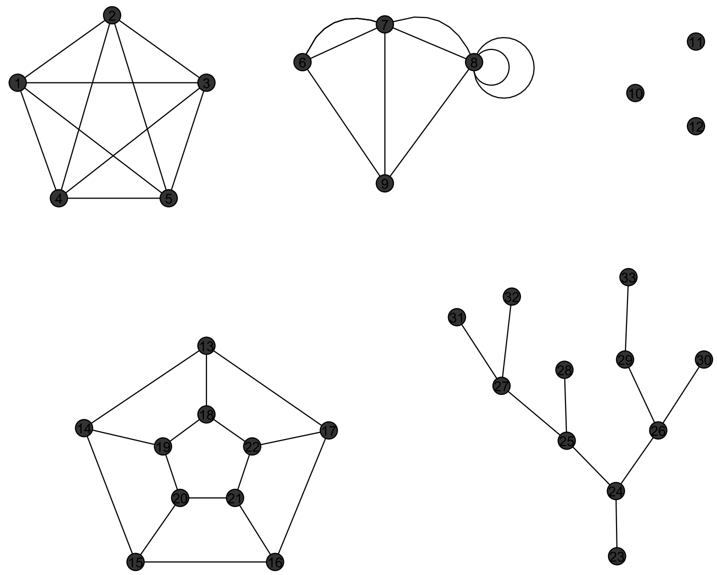
Než si dokážeme platnost tvrzení v příkladu, znázorníme si graficky situaci lidí na party s ohledem na jejich vzájemné představení. Na obrázku body označují účastníky a spojnice mezi nimi vyznačuje fakt, že si byli navzájem představeni. Nespojené body znamenají, že tito účastníci si představeni nebyli.



Formalizací výše nakresleného obrázku je definice grafu.

Definice. *Graf $G = (V, E)$ se skládá z neprázdné množiny V, jejíž prvky nazýváme vrcholy a konečného souboru E dvojic $\{u, v\}$, $u, v \in V$ (nemusí být nutně $u \neq v$), které se nazývají hrany grafu G.*

Předchozí obrázek je tedy graf, jehož vrcholy jsou účastníci party a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě, když odpovídající účastníci si byli představeni. Na dalším obrázku jsou ukázky jiných možných grafů.



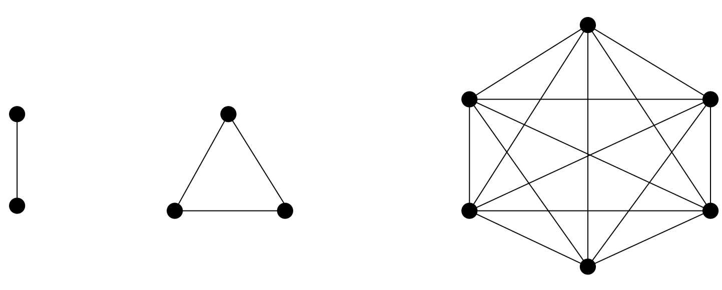
Jsou-li $u, v \in V$ dva vrcholy, pak hrana, která je spojuje, je $e = \{u, v\}$. Pro jednoduchost budeme kroucené závorky vynechávat a hranu mezi vrcholy u, v značit $e = uv$.

Mezi dvěma vrcholy může vést více hran nebo hrana může vycházet a končit v témže vrcholu (tzv. smyčka), jak je to vidět u druhého grafu na předchozím obrázku. Graf, který neobsahuje smyčky a kde dva různé vrcholy mohou být spojeny nejvýše jednou hranou, se nazývá *jednoduchý*.

Definice. *Mějme graf $G = (V, E)$. Stupeň vrcholu $v \in V$ je počet hran obsahujících vrchol v. Značí se $d(v)$.*

Smyčka ve vrcholu v přispívá ke stupni $d(v)$ hodnotou 2. Má-li jednoduchý graf n vrcholů, pak maximální stupeň každého vrcholu je $n - 1$. Graf, u něhož je této maximální hodnoty stupně dosaženo ve všech vrcholech se nazývá *úplný* a budeme ho značit K_n. Na obrázku níže jsou grafy K_2, K_3 a K_6. Je-li G jednoduchý graf s n vrcholy, $|V| = n$, pak pro počet hran platí odhad $|E| \leq \binom{n}{2}$ a rovnost nastává právě, když $G = K_n$. Je to proto, že hrana je určena dvojicí různých vrcholů a počet hran je tak omezen počtem dvouprvkových podmnožin n-prvkové množiny, což je $\binom{n}{2}$.

Doplněk (komplement) G^c grafu G je graf se stejnými vrcholy, kde dva vrcholy jsou spojeny hranou v grafu G^c právě, když nejsou spojeny v původním grafu G. Doplněk K_n^c úplného grafu je graf tvořený pouze vrcholy. Někdy se takový graf nazývá *diskrétní*. Na předchozím obrázku je K_3^c třetí graf v horní řadě.



S následující větou se s velkou pravděpodobností setkáme na začátku jakéhokoli kurzu z teorie grafů. Byla známa už Leonhardovi Eulerovi (1707-1783), který přispěl mnoha základními výsledky do celé řady různých oblastí matematiky: teorie grafů, teorie čísel, kombinatorika nebo analýza. Jeho jméno se v našem textu ještě objeví.

Věta 3. *Mějme graf $G = (V, E)$. Součet stupňů všech vrchlů grafu je roven dvojnásobku počtu hran, tj.*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Důkaz. Sčítáme-li stupně všech vrcholů grafu, počítáme vlastně, kolik je konců hran. Každá hrana má dva konce, proto počet konců všech hran je dvojnásobek počtu hran. □

Nyní se vrátíme k příkladu o účastnících party. Vzájemné představování máme znázorněno pomocí grafu a pro něj platí tvrzení Věty 3. V našem případě má suma lichý počet sčítanců, ale hodnota součtu je zřejmě sudá. Proto nemohou být všechny členy v sumě lichá čísla. Odtud vyplývá, že alespoň jeden sčítanec je sudý, a tedy v grafu existuje vrchol se sudým stupněm. A tento vrchol reprezentuje hledaného účastníka party, který byl představen sudému počtu účastníků.

I když je Věta 3 velmi jednoduchá, má mnoho použití. Úplný graf K_5 má pět vrcholů a každý je spojen se čtyřmi zbylými vrcholy. Představme si, že bychom chtěli počet hran u každého vrcholu snížit o jednu: nakreslit graf s pěti vrcholy, ale každý vrchol by byl spojen jen se třemi ostatními. Mohli bychom se chvíli pokoušet o kreslení, ale bez úspěchu. Takový graf neexistuje. Součet stupňů všech vrcholů by totiž byl $5 \cdot 3 = 15$, ale podle Věty 3 to má být sudé číslo.

Příklad 4. O grafu $G = (V, E)$ máme tyto informace: počet vrcholů je $|V| = 14$, počet hran je $|E| = 27$, stupně vrchlů jsou 3, 4 a 5, přičemž počet vrcholů se stupněm 4 je šest. Kolik je vrcholů stupně 3 a kolik je vrcholů stupně 5?

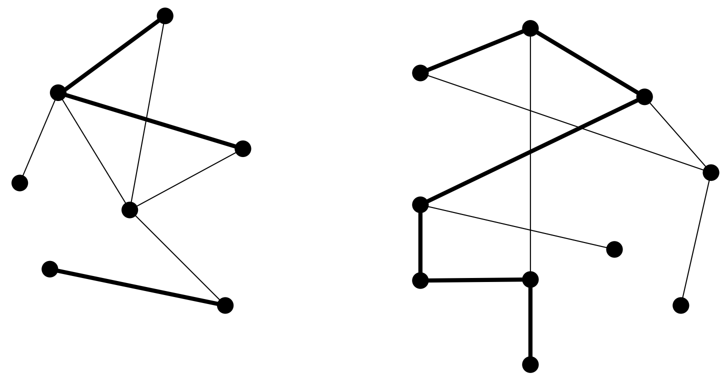
Označíme-li si x počet vrcholů stupně 3, pak počet vrcholů se stupněm 5 je $8 - x$. Podle Věty 3 platí

$$3x + 4 \cdot 6 + 5(8 - x) = 2 \cdot 27,$$

odkud plyne, že $x = 5$. Vrcholů se stupněm 3 je pět a tři vrcholy mají stupeň 5.

Definice. *Graf $G' = (V', E')$ nazýváme podgraf grafu $G = (V, E)$, jestliže $V' \subset V$ a $E' \subset E$. Zapisujeme $G' \subset G$.*

Příklady podgrafů jsou na následujícím obrázku.



Druhý podgraf je velmi speciální neboť tvoří jakousi cestu přísušným grafem od jednoho vrcholu ke druhému. Dva druhy takových podgrafů si označíme jménem.

Definice. *Cesta P v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost střídajících se vrcholů a hran,*

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k),$$

kde $e_i = v_{i-1}v_i$ jsou hrany a $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subset V$ jsou navzájem různé vrcholy. Přidáme-li k P navíc hranu v_kv_0, vznikne uzavřená cesta nazývaná kružnice nebo také cyklus.

Tah W v grafu G je posloupnost střídajících se vrcholů a hran,

$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k),$$

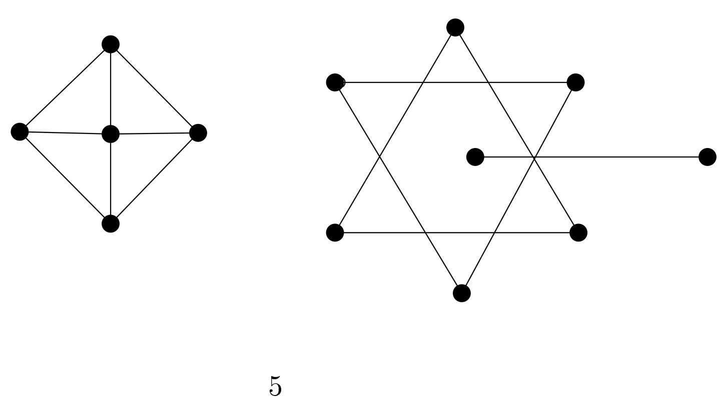
kde $e_i = v_{i-1}v_i$ jsou navzájem různé hrany.

Protože cesta v grafu prochází navzájem různými vrcholy, nemůže použít žádnou hranu dvakrát. Každá cesta je tedy i tah.

Pomocí pojmu cesta v grafu můžeme zavést jinou důležitou charakteristiku, a to je souvislost grafu.

Definice. *Graf G je souvislý, jestliže pro každé dva vrcholy existuje cesta v G, která je spojuje. Každý maximální souvislý podgraf grafu G se nazývá komponenta souvislosti.*

Na obrázku je příklad souvislého a nesouvislého grafu. Nesouvislý graf má tři komponenty souvislosti.



Aby graf byl souvislý, musí mít dostatečný počet hran. Položme si otázku, jaký je vztah mezi souvislostí grafu a počtem jeho hran. Jsou dvě možné varianty. Je-li graf souvislý, kolik musí mít nutně hran? A naopak, jaký počet hran grafu si vynutí jeho souvislost? Odpovědi jsou v následující Větě 5.

Věta 5. *Mějme graf $G = (V, E)$ s n vrcholy, $|V| = n$.*

(i) *Je-li G souvislý, pak $|E| \geq n - 1$.*

(ii) *Je-li G jednoduchý a má-li počet hran $|E| > \binom{n-1}{2}$, je souvislý.*

Důkaz. (i) Důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu hran.

Krok 1. Je-li $|E| = 1$, pak souvislý graf o jedné hraně zřejmě nemůže mít více než dva vrcholy. Tedy $n \leq 2$ a platí $|E| \geq n - 1$.

Krok 2. Předpokládejme, že pro souvislé grafy s počtem hran $|E| = k$ platí, že počet n jeho vrcholů splňuje nerovnost $k \geq n - 1$. Chceme tuto nerovnost dokázat i pro souvislé grafy s $|E| = k + 1$.

Mějme souvislý graf s $k + 1$ hranami. Základní myšlenka postupu bude, že z grafu odebereme jednu hranu a na takto redukovaný graf použijeme indukční předpoklad. Potíž je však v tom, že redukovaný graf musí zůstat souvislý, jinak pro něj indukční předpoklad neplatí. Proto je třeba hranu odebírat velmi opatrně. Uvážíme dva případy:

(1) Graf obsahuje kružnici. Odebereme z grafu G hranu, která byla součástí kružnice. Vzniklý graf tak zůstane souvislý, bude mít stejný počet vrcholů, ale jen k hran. Podle indukčního předpokladu je

$$n - 1 \leq k \leq k + 1 = |E|.$$

(2) Graf neobsahuje kružnici. Označme si symbolem P nejdelší cestu v grafu a nechť u je počáteční vrchol cesty P. Pak stupeň vrcholu u musí být 1: v opačném případě by existovala hrana $e = uv$ z vrcholu u do nějakého vrcholu v taková, že není součástí cesty P, $e \notin P$. Jejím přidáním bychom vytvořili buď cestu, která je o krok delší než P (pokud $v \notin P$) nebo kružnici (pokud $v \in P$). Obojí vede ke sporu. Proto stupeň počátečního vrcholu u musí být roven jedné.

Odstraněním vrcholu u spolu s jedinou hranou, která do něj vede, vznikne opět souvislý graf s $n - 1$ vrcholy a s k hranami. Podle indukčního předpokladu pro něj platí

$$(n - 1) - 1 \leq k, \quad \text{tj.} \quad n - 1 \leq k + 1 = |E|.$$

(ii) Předpokládejme, že počet hran je $|E| > \binom{n-1}{2}$, a přesto graf není souvislý, tj. existují alespoň dvě komponenty souvislosti. Označme si V_1 vrcholy jedné z komponent souvislosti a $V_2 = V \setminus V_1$. Pak žádná hrana nespojuje vrcholy z V_1 s vrcholy z V_2. Je-li $|V_1| = k$ a $|V_2| = n - k$, kde $1 \leq k \leq n - 1$, pak v komponentě souvislosti je nejvýše $\binom{k}{2}$ hran a ve druhé části grafu $\binom{n-k}{2}$ hran. Celkově,

$$|E| \leq \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = k^2 - kn + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Poslední výraz je kvadratický v k a nabývá svého maxima v krajních bodech intervalu $1 \le k \le n-1$. Pro $k=1$ i pro $k=n-1$ má stejnou hodnotu a to $\binom{n-1}{2}$. Tím dostáváme odhad $|E| \le \binom{n-1}{2}$, což je spor. $\square$

Je dobré si uvědomit, že tvrzení Věty 5(i) není ve tvaru ekvivalence mezi souvislostí grafu $G=(V,E)$ a platností nerovnosti $|E| \ge |V|-1$. V souvislém grafu nerovnost nutně platí, ale její platnost nezaručuje, že graf je souvisý. Příkladem je graf vpravo na obrázku před Větou 5.

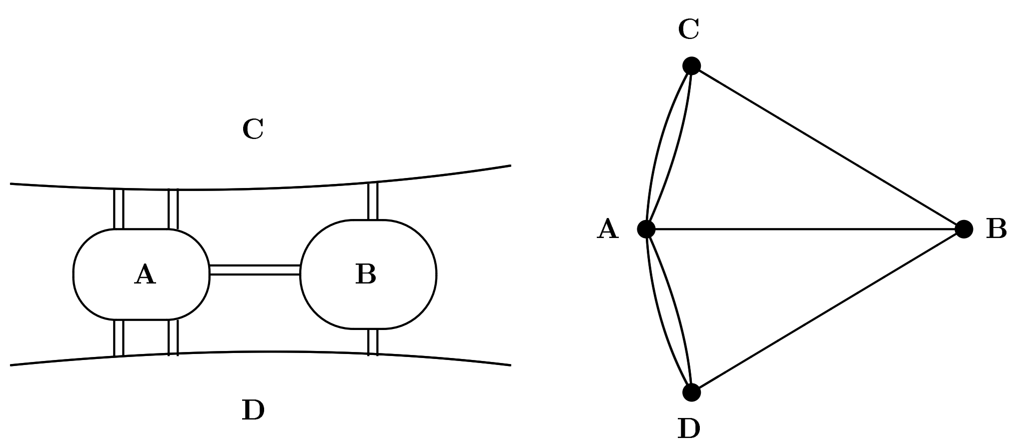
Důkaz tvrzení (ii) předešlé věty dává jistou informaci navíc. Číslo $\binom{n-1}{2}$ je přesná hranice, kterou musí počet hran převýšit, aby byl jednoduchý graf s n vrcholy souvislý. Graf, který by měl počet hran pouze $\binom{n-1}{2}$ ještě nemusí být souvislý: v konci důkazu jsme objevili graf mající za komponenty K_{n-1} a izolovaný vrchol. To je příklad nesouvislého grafu s n vrcholy a $\binom{n-1}{2}$ hranami.

Eulerovské grafy.

Definice. *Graf nazveme eulerovský, jestliže v něm existuje tah obsahující všechny hrany. Takový tah někdy označujeme jako eulerovský tah.*

Eulerovský graf si můžeme intuitivně představit jako graf, který lze nakreslit jedním tahem, aniž bychom nějakou hranu museli projít vícekrát.

Eulerovský graf je nazván po Leonhardu Eulerovi, který v roce 1736 charakterizoval právě takové grafy. K této otázce ho přivedla hádanka o sedmi mostech v městě Königsberg. V řece protékající městem jsou dva ostrovy a mezi nimi a břehy je sedm mostů. Měšťané Königsbergu se snažili zjistit, zda je možné si naplánovat procházku po všech mostech tak, aby prošli všechny mosty právě jednou. Situace je na obrázku níže, vlevo „reálná“ situace a vpravo schématické znázornění, kde hrany reprezentují mosty mezi břehy a ostrovy.



Řešení této hádanky je obsaženo v následující větě.

Věta 6. *Souvislý graf je eulerovský právě, když všechny vrcholy mají sudý stupeň s jedinou možnou výjimkou dvou vrcholů.*

Důkaz. Mějme graf, ve kterém existuje tah obsahující všechny hrany. Je-li tento tah uzavřený, tj. začíná-li a končí ve stejném vrcholu, pak při každém průchodu jakýmkoli vrcholem jednou hranou vstupujeme a druhou vystupujeme. Stupeň takového vrcholu je tedy sudý. Má-li tah začátek a konec v různých vrcholech, pak to jsou právě ty jediné vrcholy mající lichý stupeň, neboť v prvním vrcholu je o jeden výstup víc (= počáteční krok) a v posledním o jeden vstup víc (= koncový krok).

Důkaz opačné implikace provedeme nejprve pro případ souvislého grafu, který má všechny vrcholy sudého stupně. Vezmeme si v tomto grafu tah

$$W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$$

maximální možné délky. Protože tah W již nelze prodloužit, musí obsahovat všechny hrany vycházející z posledního vrcholu v_k. Uvědomíme si, že W je uzavřený: Kdyby tah W nebyl uzavřený, pak stupeň vrcholu v_k by byl lichý díky poslednímu kroku v tahu W. To však nelze, protože všechny stupně jsou sudé. Tah W je tedy nutně uzavřený, $v_0 = v_k$. Zbývá ukázat poslední věc, že W je eulerovský, tj. že obsahuje všechny hrany grafu. Představme si, že by existovala hrana, která nenáleží tahu W. Díky souvislosti grafu pak musí existovat hrana opět mimo W, která navíc vychází z nějakého vrcholu v_i ležícímu na W. Nazvěme ji $e = uv_i$. Pak ovšem tah

$$(u, e, v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, e_k, v_k = v_0, e_1, \ldots, e_i, v_i)$$

je o jeden krok delší než W, což je spor. Ukázali jsme existenci eulerovského tahu v případě, že stupně všech vrcholů jsou sudé.

Předpokládejme nyní, že souvislý graf má kromě dvou vrcholů u, v všechny ostatní vrcholy sudého stupně. Přidáme ke grafu navíc hranu $e = uv$. Tento nový graf má všechny vrcholy sudého stupně a podle dokázané předchozí části v něm existuje uzavřený eulerovský tah W. Odebereme-li od W uměle přidanou hranu e, dostaneme eulerovský tah v původním grafu. □

Odpověď na hádanku o procházce po sedmi mostech v Königsbergu je negativní, neboť příslušný graf má vrcholy pouze lichého stupně. Chceme-li se projít po všech mostech, musíme přes jeden jít dvakrát. (Můžeme si ho dokonce předem určit.)

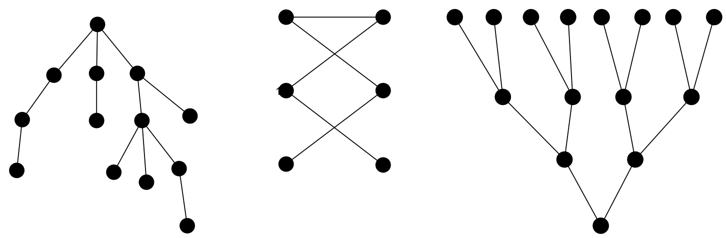
Stromy

Stromy tvoří důležitou třídu grafů mající široké použití nejen v computer science. Běžný příklad stromu je tzv. genealogický strom, který zachycuje posloupnost a rozvětvování členů rodiny od zakladatele k potomkům. Rovněž se tímto grafem mohou modelovat výherní či rozhodovací strategie při studiu jistých typů her, procesů apod.

Název strom je odvozen od vzhledu, který tento graf obvykle má. Definice stromu je jednoduchá.

Definice. *Strom je souvislý graf bez kružnic.*

Někdy se grafům bez kružnic říká acyklické, ale terminologie není zcela ustálená. Příklady stromů jsou na následujícím obrázku.



Můžeme si povšimnout, že graf G, který neobsahuje kružnice a není souvislý, má za komponenty souvislosti stromy. Plyne to z toho, že komponenta jako podgraf grafu bez kružnic nemůže obsahovat kružnici a přitom je souvislá. Takový graf G se pak nazývá les.

Strom lze ekvivalentě popsat i jinými vlastnostmi, které jsou o něco názornější.

Věta 7. *Mějme graf $G = (V, E)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *G je strom.*

(ii) *G je minimální souvislý, tj. G je souvislý a vynecháním jakékoli hrany vznikne nesouvislý graf.*

(iii) *Mezi každými dvěma vrcholy existuje jediná cesta, která je spojuje.*

(iv) *G je maximální graf bez kružnic, tj. G neobsahuje kružnice a přidáním jakékoli nové hrany vznikne kružnice.*

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Protože strom je z definice souvislý graf, k ověření (ii) zbývá ukázat, že odebráním jakékoli hrany vznikne nesouvislý graf. Odeberme hranu $e = uv$ z grafu G. Kdyby zůstal souvislý, pak v něm existuje cesta P spojující vrcholy u a v. Tato cesta s přidanou hranou e by v původním grafu G vytvořila kružnici, což nelze.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Předpokládejme, že graf má vlastnost (ii), a přesto v něm existují vrcholy u a v spojené dvěma různými cestami P_1 a P_2. Označme w první vrchol, ve kterém se při postupu z u cesty P_1 a P_2 rozejdou, tj. existují hrany e_1 a e_2 vycházející z w, $e_1 \neq e_2$ a $e_1 \in P_1$ a $e_2 \in P_2$. Pak vynecháním hrany e_1 z grafu G neporušíme jeho souvislost, což je ve sporu s vlastností (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Je zřejmé, že graf mající vlastnost (iii) nemůže obsahovat kružnici, neboť libovolné dva vrcholy ležící na této kružnici by bylo možné spojit dvěma různými způsoby. Zbývá si uvědomit, že přidáním jakékoli hrany do grafu G kružnice vznikne. Přidejme tedy do G novou hranu $e = uv$ spojující vrcholy u a v. Protože G má vlastnost (iii), vrcholy u, v byly v původním grafu spojeny nějakou cestou P. Dodáme-li k P novou hranu e, vznikne kružnice.

(iv) $\Rightarrow$ (i) O grafu G víme, že neobsahuje kružnice, stačí tedy dokázat jeho souvislost. Předpokládejme, že G není souvislý a zvolme vrcholy u a v z různých komponent grafu G. Přidáním hrany $e = uv$ nemůže vzniknout kružnice, neboť k tomu by byla třeba ještě jiná hrana $e' \neq e$, která vede mezi těmito komponentami. Taková hrana tam není, a proto G je souvislý. $\square$

K předchozí větě přidáme ještě jednu vlastnost stromu, která je sice snadno odvoditelná, nicméně patří k velmi důležitým.

Věta 8. *Ve stromu s alespoň dvěma vrcholy existují alespoň dva vrcholy se stupněm jedna.*

Důkaz. Uvažujme ve stromu cestu P maximální délky. Pak její koncové vrcholy jsou právě hledané vrcholy stupně jedna. K tomu si stačí uvědomit, že kdyby např. koncový vrchol měl stupeň víc než jedna, pak musí existovat hrana $e \notin P$, jejímž přidáním k P bychom dostali buď cestu o krok delší nebo by vznikla kružnice. Ani jedno však není možné. □

Nakonec si položme otázku, kolik má strom hran? Jako u každého souvislého grafu, počet hran závisí samozřejmě na počtu vrcholů, viz Větu 5, ale i na dalších vlastnostech grafu. U stromu, poněkud překvapivě, počet hran závisí *pouze* na počtu vrcholů.

Věta 9. *Každý strom s n vrcholy má $n - 1$ hran.*

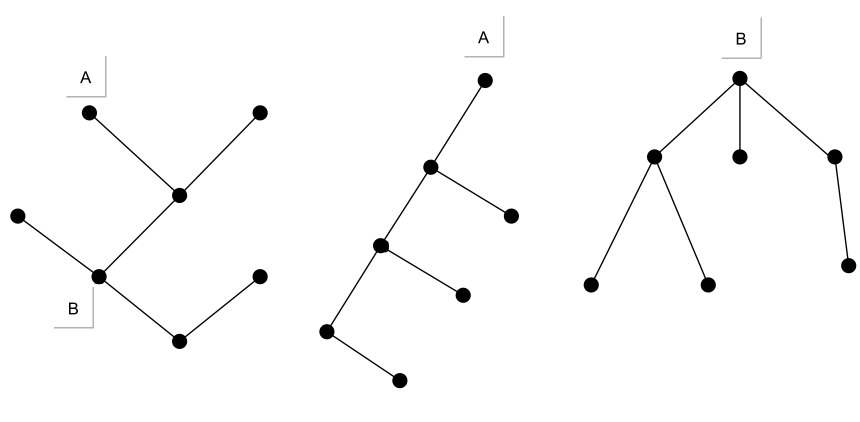
Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle počtu vrcholů. Má-li strom pouze jeden vrchol, pak nemůže mít žádnou hranu, neboť jediná hrana přicházející v úvahu je smyčka, a ta by vytvořila kružnici.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro stromy s n vrcholy a mějme strom G s $n + 1$ vrcholy. Podle Věty 8 existuje vrchol u, jehož stupeň je jedna. Odebráním vrcholu u spolu s hranou, které do něj vede, dostaneme opět souvislý graf bez kružnice, tj. strom. Protože má n vrcholů, podle indukčního předpokladu ma $n - 1$ hran. Odtud plyne, že původní strom G má n hran a důkaz je uzavřen. □

V mnoha aplikacích se jeden z vrcholů stromu vybere jako vyjímečný a nazve se kořen. Tak vznikne kořenový strom.

Definice. *Kořenový strom je strom, u kterého je jeden vrchol označen jako kořen.*

Tím, že označíme jeden vrchol za kořen, zavádíme automaticky do stromu následující uspořádání mezi vrcholy. Protože podle Věty 7(iii) vede z kořene do jakéhokoli vrcholu právě jediná cesta, máme mezi vrcholy na této cestě zavedeny pojmy *následník* vrcholu a *předchůdce* vrcholu. Obvykle pak kreslíme kořenové stromy tak, že kořen umístíme nahoru a hrany směřují od něj dolů. Vrchol, který nemá následníka se nazývá list. Je třeba podotknout, že různými volbami kořene v témže stromě vznikají různé kořenové stromy, viz obrázek.



Kořenové stromy slouží jako modely v mnoha situacích. Nejběžnější jsou např. struktura organizace, kde vrchol označuje pozici v dané organizaci a hrany pak nadřízenost či podřízenost těchto pozic. Jiný příklad je uspořádání souborů v paměti počítače. Kořen odpovídá hlavnímu adresáři, vrcholy podadresářům a listy jednotlivým souborům.

Definice. *Kořenový strom se nazývá n-ární, jestliže každý vrchol má nejvýše n následníků. Má-li každý vrchol, který není list, přesně n následníků, nazýváme takový strom plně n-ární.*

Mezi počtem vrcholů a počtem listů plně n-árního stromu je jednoduchý vztah.

Věta 10. *Plně n-ární strom s l listy má $v = (nl - 1)/(n - 1)$ vrcholů.*

Důkaz. Počet vrcholů je označen v. Každý vrchol, který není list má n následníků. Počet následníků je tak $n(v - l)$. Přidáme-li k následníkům ještě kořen, dostneme celkový počet vrcholů $v = n(v - l) + 1$. Odtud vypočteme v. □

Příklad 11. Jistý člověk pošle 5 lidem dopis žádající je, aby ho okopírovali a poslali dalším 5. Někteří to učiní, jiní ho hodí do koše.

(i) Kolik lidí dostalo takový dopis, víme-li, že celý řetěz skončil po té, co 73 lidí hodilo dopis do koše a předpokládáme-li, že nikdo nedostal takový dopis dvakrát.

(ii) Jestliže 10 000 lidí poslalo dopisy dál během trvání celého posílacího řetězce, kolik lidí obdrželo dopis a kolik se jich rozhodlo dopisy dále neposílat? (Stále předpokládáme, že nikdo nedostal více než jeden dopis.)

(i) Situaci modelujeme pomocí plně 5-árního stromu, o kterém víme, že má $l = 73$ listů. Podle Věty 10 je počet vrcholů $v = 91$. Odečteme-li prvního člověka, tj. kořen stromu, pak máme, že dopis dostalo 90 lidí.

(ii) Číslo 10 000 je počet vrcholů v příslušném 5-árním stromu, které mají jak předchůdce (dopis obdrželi) tak následníka (dopis poslali dál). Tedy

$$10\,000 = v - 1 - l.$$

Vztah mezi počtem vrcholů v a listů l je $v = n(v - l) + 1$. Dosadíme za $v - l = 10\,001$ a dostaneme, že $v = 50\,006$. Počet lidí, kteří dopis obdrželi je tak 50 005. Přerušit řetěz se jich rozhodlo $l = v - 10\,000 - 1 = 40\,005$. (V tomto příkladu vlastně nepotřebujeme používat vzorec z Věty 10. Jestliže 10 000 lidí poslalo dopis dál, tak ho od nich obdrželo 50 000 dalších +5, kteří dostali dopis od prvního člověka v řetězci.)

Představme si silniční síť mezi obcemi daného okresu. Při dlouhotrvajícím sněžení je třeba cesty prohrnovat. Jaké cesty k prohrnování vybrat, aby se minimalizoval počet upravovaných cest a přitom upravené cesty spojovali každé dvě obce? Celou situaci si můžeme znázornit grafem, jehož vrcholy jsou obce a hrany označují silnice mezi nimi. V této reprezentaci našeho problému hledáme podgraf, který obsahuje všechny vrcholy původního grafu, je souvislý a má co nejmenší počet hran. Stručně řečeno, má obsahovat vrcholy původního grafu a být minimální souvislý. Z Věty 7(ii) víme, že takový podgraf je strom. Budeme ho nazývat kostra grafu.

Definice. *Kostra grafu G je každý strom $T \subset G$ obsahující všechny vrcholy grafu G.*

Snadno vidíme, že pokud G má kostru, je nutně souvislý. Obráceně, máme-li souvislý graf G pak nejmenší (tj. s minimálním počtem hran) souvislý podgraf T obsahující všechny vrcholy je hledaná kostra. Shrnuto: graf G má kostru právě, když je souvislý.

Kostra představuje nejekonomičtější propojení všech vrcholů grafu. Takových koster je v grafu více a jsou v zásadě rovnocené. Situace se změní, pokud každé hraně $e \in E$ grafu připíšeme jisté ohodnocení, tj. nezáporné číslo $w(e)$, a budeme chtít nalézt kostru pro níž je součet ohodnocení jejích hran minimální. Praktický význam takové situace je zřejmý: v předešlém příkladu může hodnota $w(e)$ znamenat náklady na prohrnutí silnice e. Obecně mohou vrcholy grafu představovat komunikační uzly a ohodnocení hran náklady vynaložené k vybudování jejich propojení. Matematický popis je v následující definici.

Definice. *Mějme graf $G = (V, E)$. Zobrazení $w\colon E \longrightarrow \langle 0, \infty)$ se nazývá ohodnocení grafu G a číslo*

$$w(G) = \sum_{e \in E} w(e)$$

váhou grafu G. Kostru grafu G s minimální váhou budeme nazývat minimální kostra.

Existence minimální kostry je jasná, neboť v grafu G je pouze konečně mnoho koster a jedna (nebo i více) z nich musí mít minimální váhu. Co však není jasné je důležitá optimalizační úloha, jak v daném souvislém grafu minimální kostru nalézt.

Věta 12. (Kruskalův algoritmus) *Mějme souvislý graf $G = (V, E)$ s ohodnocením w. Následující algoritmus vytváří minimální kostru T grafu G.*

(1) *Zvol jakoukoli hranu e_0 s minimálním ohodnocením, která netvoří smyčku.*

(2) *Jsou-li vybrány hrany $e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}$, vyber mezi zbývajícími $E \setminus \{e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ hranu e_k s minimálním ohodnocením takovou, aby jejím přidáním k vybraným hranám nevznikla kružnice.*

(3) *Aplikuj bod (2) dokud to lze.*

Důkaz. Nechť $T \subset G$ je graf zkonstruovaný podle algoritmu. Je zřejmé, že T neobsahuje kružnici, neboť hrany se do T přidávaly tak, aby kružnice nevznikla. Konstrukce končí v okamžiku, když už nelze provést krok (2), což specielně znamená, že T obsahuje všechny vrcholy grafu G. Vidíme, že T je maximální graf bez kružnic, tj. podle Věty 7 (iv), T je strom, a tedy kostra grafu G. Naším úkolem zůstává ukázat, že je minimální.

Vybereme mezi minimálními kostrami grafu G takovou T', která se kostrou T shoduje v nejvíce hranách. Dokážeme, že $T = T'$.

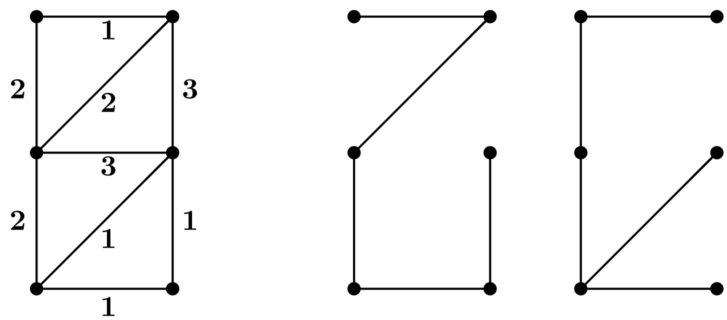
Předpokládejme, že $T \neq T'$. Hrany v T jsme vybírali postupně podle algoritmu a nechť $e = uv$ je první hrana v T, která nepatří do T', $e \notin T'$. Kdybychom hranu e do stromu T' přidali, musí podle Věty 7 (iv) vzniknout kružnice C. Avšak tato kružnice nemůže být celá obsažena ve stromě T, neboť žádný strom kružnici neobsahuje. Existuje tak na C hrana, nazvěme ji e', která naopak do T nepatří, $e' \notin T$.

Patřila e' mezi kandidáty v kroku, kdy jsme vybírali hranu e? Hrana e je první hranou v T, která nepatří do T', tj. všechny dříve vybrané hrany do T' patří. Proto eventuálním přidáním hrany e' k těmto dosud vybraným nemůže vzniknout kružnice, neboť T' je strom. Takže e' byla mezi možnými kandidáty na výběr. Protože jsme ale vybrali hranu e, platí $w(e) \leq w(e')$.

Nyní pozměníme minimální kostru T' následovně: odebereme od ní hranu e' a místo ní přidáme hranu e. Vzniklý strom $\widetilde{T}$ je opět kostra, která díky výměně hran e a e' splňuje $w(\widetilde{T}) \leq w(T')$. Je jasné, že ostrá nerovnost nastat nemůže, neboť T' je kostra s minimální váhou, takže $w(\widetilde{T}) = w(T')$. Kostra $\widetilde{T}$ je také minimální a navíc má s T více společných hran než T'. Tento spor uzavírá důkaz, že $T = T'$, a tedy T je opravdu minimální kostra. $\square$

Zatímco váha mimimální kostry je jednoznačně určena, samotná minimální kostra nikoli. Vyplývá to mimo jiné i z volnosti, kterou nám Kruskalův algoritmus poskytuje při výběru hrany.

Příklad 13. Nalezněte minimální kostru následujícího ohodnoceného grafu.



Napravo jsou dvě minimální kostry ohonoceného grafu vlevo. Obě kostry jsou výsledkem Kruskalova algoritmu a obě mají váhu $w(T) = 7$.

Minimální kostru dávají i další algoritmy. Např. Primův algoritmus, který se liší od Kruskalova tím, že další hrana s minimálním ohodnocením se navíc bere jen z hran vycházejících z vrcholů už částečně vytvořeného stromu. Za výhodu Primova algoritmu můžeme považovat to, že při jeho přerušení nám dá minimální kostru alespoň té části, kterou jsme stihli algoritmem projít. Kruskalův algoritmus při přerušení nemusí dát jako výstup strom.

Je možné rovněž Kruskalův postup v jistém smyslu obrátit: Z grafu postupně vynecháváme hrany s nejvyšším ohodnocením, pokud jejich vypuštěním zůstává graf souvislý. Na konci dostaneme minimální kostru.

Párování

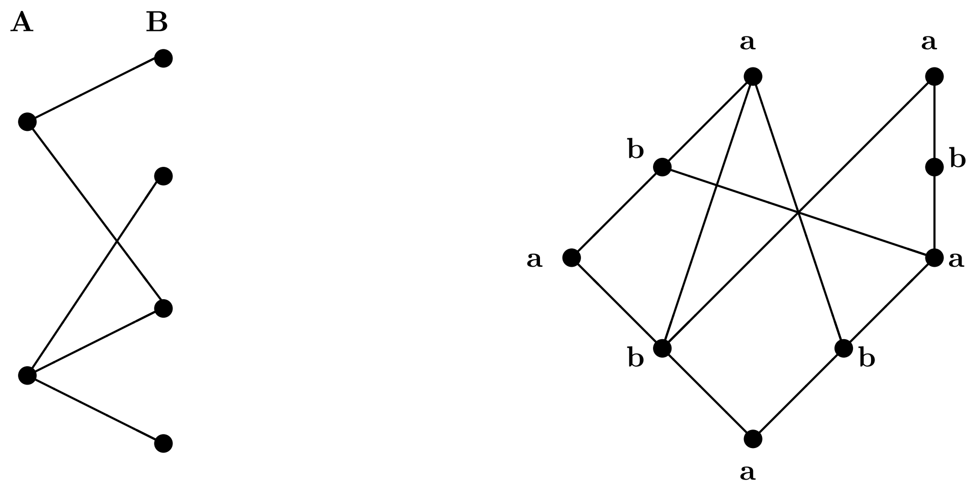
Příklad 14. Na promočním večírku je 150 studentů. Víme, že každá dívka se zná s 20 hochy a každý hoch se zná s 20 dívkami. Je možné ze všech účastníků sestavit taneční páry tak, aby se tanečníci znali?

Povšimněme si, že ani nevíme, zda je počet dívek stejný jako počet hochů. K vyřešení tohoto problému bude vhodné si graf, který danou situaci znázorňuje, nějak pojmenovat.

Definice. *Graf $G = (V, E)$ se nazývá bipartitní, jestliže množina vrcholů se dá rozložit na dvě části, $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, a každá hrana spojuje vrchol z A s vrcholem z B, tj. každá hrana je tvaru $e = ab$, kde $a \in A$ a $b \in B$.*

V definici nepožadujeme, aby graf byl souvislý. Např. graf , který nemá žádné hrany, je bipartitní a každý rozklad jeho množiny vrcholů vyhovuje požadavku definice.

Na obrázku jsou příklady souvislých bipartitních grafů.



Je-li graf bipartitní, znamená to např., že je možné všechny vrcholy obarvit dvěma barvami tak, že každá hrana spojuje vrcholy různých barev. Uvedeme si ještě jednu charakterizaci bipartitního grafu, která není tak přímočará.

Věta 15. *Graf je bipartitní právě, když neobsahuje kružnice liché délky.*

Důkaz. Tvrzení je ve tvaru ekvivalence, proto musíme dokázat dvě implikace. Uvažujme bipartitní graf $G = (V, E)$, kde $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$.

Předpokládejme, že graf G je bipartitní a mějme dánu kružnici

$$K = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k = v_0)$$

v grafu G. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $v_0 \in A$. Pak, protože G je bipartitní, vrchol v_1 musí patřit do B, vrchol v_2 opět do A atd. Obecně, vrchol se sudým indexem leží v A a vrchol s lichým indexem v B. Končíme vrcholem $v_k = v_0 \in A$ se sudým indexem. Proto musí být počet kroků sudý, a tedy K má sudou délku.

Pro obrácenou implikaci předpokládáme, že graf neobsahuje kružnice liché délky. Navíc můžeme rovněž předpokládat, že graf je souvislý. V opačném případě použijeme argument v každé komponentě. Cílem je rozdělit množinu vrcholů V na dvě části, $V = A \cup B$, splňující požadavky pro bipartitní graf. Označíme si pro dva vrcholy $u, v \in V$ jejich vzdálenost jako

$$\varrho(u, v) = \text{délka nejkratší cesty spojující vrcholy } u \text{ a } v.$$

Zvolíme si pevně nějaký vrchol $v_0 \in V$ a pomocí vzdálenosti ϱ definujeme rozklad množiny vrcholů:

$$A = \{v \in V \mid \varrho(v_0, v) \text{ je sudé číslo}\},$$
$$B = \{v \in V \mid \varrho(v_0, v) \text{ je liché číslo}\}.$$

Množiny A a B jsou zřejmě disjunktní a $A \cup B = V$. Zbývá ukázat, že žádné dva vrcholy v A ani žádné dva vrcholy v B nejsou spojené hranou. Předpokládejme pro spor, že existují dva vrcholy $u, u' \in A$ spojené hranou. Protože G je souvislý, existuje cesta P (minimální délky) spojující pevný vrchol v_0 s vrcholem u. Rovněž existuje cesta P' (opět minimální délky) spojující v_0 s u'. Protože obě začínají ve stejném vrcholu v_0, mohou mít počáteční úseky společné. Označíme si vrchol w jako poslední vrchol patřící do P i P'; za ním se už cesty rozdělí. Složíme-li nyní část cesty P od vrcholu w do u, hranu uu' a část cesty P' od vrcholu w do u', vznikne kružnice. Její délka je

$$\big(\varrho(v_0,u) - \varrho(v_0,w)\big) + 1 + \big(\varrho(v_0,u') - \varrho(v_0,w)\big) = \varrho(v_0,u) + \varrho(v_0,u') - 2\varrho(v_0,w) + 1.$$

První tři sčítanci jsou sudá čísla, a proto délka kružnice vychází lichá. Tento spor uzavírá celý důkaz. □

Jako důsledek máme, že strom je bipartitní graf, neboť neobsahuje kružnice (a tedy ani kružnice liché délky).

Vrátíme se k Příkladu 14. Situace je reprezetována bipartitním grafem s množinou vrcholů $V = A \cup B$, kde prvky A jsou dívky a prvky B jsou hoši. Hrana pak znázorňuje, že daná dívka a hoch se znají. Chceme mezi hranami vybrat ty, které by vyznačily hledané taneční páry.

Definice. *Párování v $G = (V, E)$ je taková podmnožina hran $F \subset E$, že žádné dvě hrany z F nemají společný vrchol.*

Je-li graf $G = (V, E)$ bipartirní, $V = A \cup B$, pak úplné párování z A do B je takové párování $F \subset E$, že z každého vrcholu množiny A vede nějaké hrana párování F.

Grafy na obrázku za definicí bipartitního grafu mají párování, avšak zatímco první z nich má úplné párování z A do B, u druhého takové úplné párování neexistuje. (Důvodem je, že vrcholů typu **a** je více než vrcholů typu **b**.) Pro jednodušší formulaci věty o existenci úplného párování bude hodné si zavést následující označení. Mějme podmnožinu $S \subset V$ množiny vrcholů. Symbol $N(S)$ označuje všechny vrcholy, které jsou hranou spojeny s nějakým vrcholem v množině S:

$$N(S) = \{v \in V \mid \text{existuje } u \in S, \text{ že } uv \in E\}.$$

Volně řečeno, do $N(S)$ dáme všechny vrcholy, které jsou sousedy nějakého vrcholu z S.

Věta 16. *Mějme bipartitní graf $G = (V, E)$, kde $V = A \cup B$. Pak existuje úplné párování z A do B právě, když pro každou podmnožinu $S \subset A$ platí*

$$|S| \le |N(S)|. \tag{*}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $F \subset E$ je úplné párování z A do B a mějme $S \subset A$ libovolnou. Každá hrana párování F spojuje vrchol z množiny S s vrcholem v $N(S)$, proto je v $N(S)$ alespoň tolik prvků jako v S.

Obrácenou implikaci budeme dokazovat indukcí podle velikosti množiny A. Předpokládejme, že v bipartitním grafu platí podmínka (*).

Krok 1. $|A| = 1$, tj. $A = \{a\}$. Protože $|N(A)| \ge 1$, spojíme vrchol a s libovolým vrcholem $b \in N(A)$ a hledané párování se skládá z této jediné hrany ab.

Krok 2. Předpokládáme nyní, že tvrzení platí kdykoli $|A| \le n$ a uvažujeme bipartitní graf s $|A| = n + 1$. Mohou nastat dva případy:

(i) Pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu $S \subset A$ platí v podmínce (*) dokonce ostrá nerovnost, $|S| < |N(S)|$. V tom případě spojíme libovolný vrchol $a \in A$ s nějakým vrcholem $b \in N(\{a\})$ a pak oba vrcholy spolu se všemi hranami, které do nich vedou z grafu vypustíme. Vznikne redukovaný bipartitní graf $\widetilde{G} = (\widetilde{A}, \widetilde{B})$, kde $\widetilde{A} = A \setminus \{a\}$ a $\widetilde{B} = B \setminus \{b\}$. Graf $\widetilde{G}$ stále splňuje podmínku (*). Protože $|\widetilde{A}| = n$, existuje podle indukčního předpokladu v $\widetilde{G}$ úplné párování F. Dodání hrany ab k párování F vytvoří úplné párování v původním grafu.

(ii) Zbývá případ, že existuje vlastní neprázdná podmnožina $S \subset A$, pro kterou

$$|S| = |N(S)|.$$

Uvažujeme-li bipartitní podgraf s vrcholy S a $N(S)$, pak splňuje podmínku (*), neboť ji splňuje celý graf. Podle indukčního předpokladu má tento podgraf úplné párování F_1 z S do $N(S)$.

Jak to vypadá se zbytkem grafu? Ověříme, že i on splňuje podmínku (*). Zvolme si m vrcholů z množiny $A \setminus S$. Ty jsou spojeny s nějakými vrcholy v množině $B \setminus N(S)$. Jejich počet si označíme M a naším cílem je ukázat, že $m \leq M$. Přidejme našich m vrcholů k množině S. Dostali jsme situaci, kdy $m + |S|$ vrcholů na jedné straně je spojeno s $M + |N(S)|$ vrcholy na straně druhé. Protože v celém grafu stále platí podmínka (*), vidíme, že

$$m + |S| \leq M + |N(S)| = M + |S|.$$

Odtud plyne $m \leq M$. I zbytek grafu vyhovuje (*) a podle indukčního předpokladu existuje i ve zbylé části grafu úplné párování F_2. Hledané úplné párování celého grafu je $F = F_1 \cup F_2$.

$\square$

Z Věty 16 vyplývá konečně poznatek, který nám pomůže při vyřešení situace v motivačním příkladu na začátku sekce.

Věta 17. *Mějme bipartitní graf $G = (V, E)$, kde $V = A \cup B$, takový, že všechny vrcholy mají stejný stupeň $d \geq 1$. Pak $|A| = |B|$ a existuje úplné párování z A do B.*

Důkaz. Ověříme, že graf G splňuje podmínku (*) z Věty 16. Mějme $S \subset A$. Z této množiny vede celkový počet $d\,|S|$ hran. Kdyby tyto hrany končily v méně než $|S|$ vrcholech množiny B, vedlo by nutně do nějakého vrcholu množiny B více než d hran, což by byl spor se stupněm vrcholu.

Podle Věty 16 existuje úplné párování z A do B. Tím ale $|A| \leq |B|$. Ze symetrie celé situace existuje rovněž úplné párování z B do A, a tedy $|B| \leq |A|$. Dohromady, $|A| = |B|$. $\square$

Řešení Příkladu 14: Situace je znázorněna bipartitním grafem, kde množina A představuje dívky a množina B hochy. Hrany indikují vzájemnou známost. Stačí nyní aplikovat Větu 17 s $d = 20$.

Příklad 18. Latinský čtverec $n \times n$ je čtverec zaplněný n symboly $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tak, že v žádném řádku ani sloupci se symboly neopakují.

Máme-li v latinském čtverci vyplněno prvních k sloupců, $k < n$, je možné ho vždy doplnit na úplný latinský čtverec? Ukážeme, že pomocí Věty 16 je to vždy možné.

Uvažujme bipartitní graf $G = (V, E)$, $V = A \cup B$, kde $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ reprezentuje číslo řádku ve čtverci a $B = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ použité symboly. V každém řádku ve čtverci je vyplněno pouze prvních k čísel. Nyní spojíme číslo řádku $i \in A$ se všemi symboly $s_j \in B$, které ještě nebyly v tomto řádku použity. Vznikne tak bipartitní graf G. Stupeň všech vrchpolů v A je zřejmě $n - k$. Stupeň vrcholů v B je rovněž $n - k$: Mějme symbol $s_j \in B$. Ten je použit v každém z prvních k sloupců, ale na různých řádcích. Zbývá proto $n - k$ řádků, kde s_j použit nebyl.

Podle Věty 17 existuje úplné párování z A do B. Toto párování nám říká, jaký symbol máme napsat na i-tý řádek, a tím vytvořit další sloupec. Postup opakujeme dokud nevyplníme celý čtverec.

Cvičení.

Příklady označené $*$ jsou o trochu náročnější.

(1) O grafu $G = (V, E)$ víme, že $|V| = 14$, $|E| = 30$ a stupně vrcholů jsou 4 nebo 5. Kolik vrcholů stupně 5 má graf?

(2) Máme graf s 10 vrcholy a stupně vrcholů jsou 3, 4 nebo 5. Dále víme, že žádné dva vrcholy s lichým stupněm nemají stupeň stejný. Kolik hran má graf?

(3) Jak vypadá jednoduchý graf:

   (a) se šesti vrcholy a sedmi hranami, který má stupně všech vrcholů liché?
   (b) mající stupně všech vrcholů rovné 1?

(4) Graf $G = (V, E)$ má stupně všech vrcholů 3 a platí $|E| = 2|V| - 3$. Kolik má vrcholů a kolik má hran?

(5) Uvažujme jednoduchý graf G se šesti vrcholy.

   (a) Může být v G současně vrchol stupně 0 a vrchol stupně 5?
   (b) Je možné, aby každý vrchol v G byl jiného stupně?

(6) Mějme graf s n vrcholy, $n \geq 2$ a stupně všech vrcholů jsou alespoň $\frac{1}{2}(n-1)$. Ukažte, že každé dva vrcholy nespojené hranou, mají společného souseda (tj. vrchol spojený hranou s oběma).

(7) Komplement G^c grafu G je graf se stejnými vrcholy, kde dva vrcholy jsou spojeny hranou v G^c právě, když nejsou spojeny v původním grafu G. Ukažte, že alespoň jeden z dvojice G a G^c je vždy souvislý graf.

(8) Silniční síť daného okresu spojuje $2n$ obcí tak, že z každé obce vede n silnic do n sousedních obcí. Existuje silniční spojení z libovolné obce do libovolné obce?

(9) Mějme graf s n vrcholy a $2n$ hranami, $n \geq 5$. Ukažte, že buď všechny vrcholy mají stupeň 4 nebo existuje vrchol se stupněm alespoň 5.

(10) Mějme graf $G = (V, E)$ a označme $n(G)$ počet komponent souvislosti grafu G.

(a) Ukažte, že $n(G) \leq n(G \setminus \{e\}) \leq n(G)+1$ pro každou hranu $e \in E$. (Graf $G \setminus \{e\}$ vznikl odstraněním hrany $e \in E$.)

(b) Ukažte, že $n(G) \leq n(G \setminus \{v\})$ pro každý vrchol $v \in V$ stupně alespoň 1. (Graf $G \setminus \{v\}$ vznikl odstraněním vrcholu $v \in V$ a všech hran, které do něj vedly.)

(c) Pro každé $k \in \mathbb{N}$ načrtněte graf G, že $n(G \setminus \{v\}) = n(G) + k$ pro nějaký vrchol $v \in V$.

(11) V souvislém grafu mají jakékoli dvě cesty maximální délky společný vrchol.

(12) (a) Jaký strom je eulerovský graf?

(b) Pro která n je úplný graf K_n eulerovský?

(c) Uvažujme jednoduchý bipartitní graf $G = (V, E)$, $V = A \cup B$, kde $|A| = k$ a $|B| = n$. Má-li graf G maximální počet hran, pro jaké hodnoty k, n je eulerovský?

(13) Graf G má k komponent a každá z nich je strom. Jaký je vztah mezi počtem vrcholů a počtem hran grafu G?

(14) Strom T má 15 vrcholů a jejich stupně jsou nejvýše 4. Předpokládejme, že T má devět vrcholů stupně 1 a tři vrcholy stupně 4. Kolik má vrcholů stupně 3? Načrtněte strom T.

(15) Strom T má 18 vrcholů a jejich stupně jsou 1, 2 nebo 5. Má-li T čtyři vrcholy stupně 2, kolik má vrcholů stupně 1? Načrtněte takový strom.

(16) Mějme strom T o 50 hranách. Odstraněním jedné hrany se strom T rozpadne na dva stromy T_1 a T_2, o kterých platí, že počet hran v T_1 se rovná počtu vrcholů v T_2. Určete počty vrcholů pro T_1 a T_2.

(17) Nalezněte všechny stromy T s alespoň dvěma vrcholy takové, že doplněk T^c je také strom.

(18) Ukažte, že souvislý graf s n vrcholy je strom právě, když součet stupňů všech vrcholů je $2(n-1)$.

(19) Nalezněte všechny stromy T, kde $2/3$ jeho vrcholů má stupeň 1 a zbylá $1/3$ vrcholů má stupeň 3.

(20) Mají-li hrany v souvislém grafu navzájem různé ohodnocení, pak existuje jediná minimální kostra.

(21) Předpokládejme, že jistá hrana souvislého grafu patří do každé kostry tohoto grafu. Co lze o této hraně říci?

(22) Pět uchazečů má zájem o šest pozic ve firmě. Uchazeč A má kvalifikaci pro pozice P_2 a P_6. Uchazeč B má kvalifikaci pro pozice P_1, P_3 a P_4; uchazeč C má kvalifikaci pro P_2, P_3 a P_6; uchazeč D má kvalifikaci pro pozice P_1, P_2 a P_3 a uchazeč E má kvalifikaci pro všechny pozice kromě P_4 a P_6. Nakreslete bipartitní graf, který reprezentuje popsanou situaci a rozhodněte, zde je možné přijmout všech pět uchazečů na pozice, na které mají kvalifikaci.

(23) Ukažte, že doplněk bipartitního grafu nemusí být bipartitní graf.

(24) Mějme bipartitní graf $G = (V, E)$, $V = A \cup B$, který má n vrcholů. Předpokládejme, že obsahuje kružnici délky n. Jaký je vztah mezi $|A|$ a $|B|$?

(25) Mějme bipartitní graf $G = (V, E)$, $V = A \cup B$.

(a) Předpokládejme, že $|V| = |E|$ a že stupně všech vrcholů jsou nejvýše 5. Ukažte, že $\frac{1}{4}|A| \leq |B| \leq 4|A|$.
(b) Předpokládejme, že $|E| \leq 2|V|$ a že stupně všech vrcholů jsou alespoň 3. Ukažte, že $\frac{1}{2}|B| \leq |A| \leq 2|B|$.

(26) Mějme bipartitní graf G s n vrcholy. Kolik je maximální počet hran grafu G? Popište všechny takové grafy.

(27) Graf $G = (V, E)$ se nazývá n-rozměrná krychle, je-li $V = \{0,1\}^n$ (= uspořádané n-tice z nul a jedniček) a dva vrcholy $u, v \in \{0,1\}^n$ jsou spojeny hranou právě, když se liší v jediné souřadnici.

(a) Nakreslete n-rozměrnou krychli pro $n = 2$ a $n = 3$.
(b) $*$ Ukažte, že n-rozměrná krychle je bipartitní graf.
(c) Ověřte, že n-rozměrná krychle má párování obsahující všechny vrcholy.

(28) Kolik párování obsahující všechny vrcholy má K_{2n}?

(29) Mějme strom T s n vrcholy a předpokládejme, že F je párování v T s maximálním počtem hran.

(a) V jakém stromě má F nejvíce hran? Načrtněte strom s takovým párováním.
(b) V jakém stromě má takovéto maximální párování F nejméně hran? Opět načrtněte takový strom.

(30) Kolik párování obsahující všechny vrcholy může mít strom?

(31) Mějme část latinského čtverce 5×5 s vyplněnými třemi sloupci,

$$L = \begin{pmatrix} a & b & e \\ b & e & c \\ c & a & d \\ d & c & a \\ e & d & b \end{pmatrix}.$$

(a) Nakreslete bipartitní graf G odpovídající L (viz Příklad 18).

(b) Jaký stupeň mají vrcholy grafu G?
(c) Existuje úplné párování v grafu G?
(d) Pokud existuje úplné párování, užijte ho k přidání čtvrtého sloupce do L. Pak doplňte L na celý latinský čtverec.

(32) $*$ Dva hráči hrají na souvislém grafu $G = (V, E)$ hru spočívající ve střídavém vybírání různých vrcholů $u_1, u_2, \ldots$ tak, že následný vrchol u_{i+1} musí být spojen hranou s předchozím u_i. Poslední, kdo může takový tah učinit, vyhrává. Ukažte, že první hráč má vyhrávající strategii právě, když v grafu G neexistuje párování obsahující všechny vrcholy (tzv. perfektní párování).

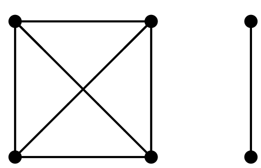
(33) Mějme uplný graf K_6 a všechny jeho hrany obarvíme libovolně dvěma barvami. Ukažte, že K_6 vždy obsahuje jednobarevný trojúhelník (tj. podgraf K_3, jehož hrany mají stejnou barvu).

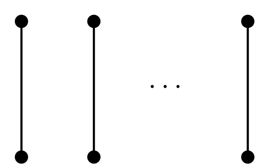
Řešení.

(1) Označíme x počet vrcholů stupně 4 a y a počet vrcholů stupně 5. Pak $x + y = 14$ a $4x + 5y = 60$, kde druhá rovnice je vztah z Věty 3. Řešení je $x = 10$ a $y = 4$.

(2) Protože v každém grafu je počet vrcholů s lichým stupněm sudý podle Věty 3, je v našem případě počet vrcholů lichého stupně buď 0 nebo 2. V prvním i druhém případě nám Věta 3 dává, že $|E| = 20$.

(3)

(3a) 

(3b) 

(4) Podle Věty 3 platí $3|V| = 2|E|$. Ve spojení s rovnicí v zadání dostaneme, že $|V| = 6$ a $|E| = 9$.

(5a) Nemůže, neboť vrchol stupně 5 je spojen se všemi ostatními vrcholy a to vylučuje vrchol stupně 0.

(5b) Není to možné, neboť by musel obsahovat vrcholy stupně 0 i 5.

(6) Předpokládejme, že u, v jsou vrcholy nespojené hranou a přitom nemají žádného společného souseda. Odhadneme, kolik je minimálně v grafu vrcholů. Jednak jsou tam dva vrcholy u, v. Každý z nich má alespoň $\frac{1}{2}(n-1)$ sousedů a protože žádný není společný, vidíme, že v grafu je minimálně $2 + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2}(n-1) = n+1$ vrcholů - spor.

(7) Není-li G souvislý, pak každý vrchol v každé z jeho komponent je v grafu G^c spojen hranou se všemi vrcholy v ostatních komponentách.

(8) Kdyby graf znázorňující spojení mezi obcemi nebyl souvislý, pak každá jeho komponenta má nutně alespoň $n+1$ vrcholů, což nelze.

(9) Předpokládejme, že všechny vrcholy nejsou stupně 4. Kdyby nebyl žádný z nich stupně alespoň 5, musí platit, že $d(v) \leq 4$ pro všechny $v \in V$, ale existuje $v_0 \in V$, že $d(v_0) \leq 3$. Pak podle Věty 3 je $4n = \sum_{v \in V} d(v) \leq 4(n-1) + 3 = 4n - 1$ - spor.

(10a) Odebráním hrany se počet komponent může jenom zvětšit a to tak, že jedna z komponent se rozpadne na dvě. Proto číslo $n(G \setminus \{e\})$ leží mezi $n(G)$ a $n(G)+1$.

(10b) Odstaněním vrcholu a všech hran s ním spojených se počet komponent může opět jen zvětšit.

(10c) Graf G se např. může skládat z jednoho vrcholu v_0 stupně $k+1$ a k němu je připojeno hranou $k+1$ zbylých vrcholů. Takový graf je souviský, tj. $n(G) = 1$, ale $G \setminus \{v_0\}$ je graf bez hran skládající se z $k+1$ izolovaných vrcholů, tedy $n(G \setminus \{v_0\}) = k+1$.

(11) Mějme dvě cesty P a P' maximální délky a předpokládejme, nemají žádný společný vrchol. Ze souvislosti existuje cesta Q začínající v nějakém vrcholu $u \in P$ a končící ve vrcholu $u' \in P'$, že kromě u, u' už žádný jiný vrchol v Q nepatří ani do P ani do P'. Vrchol u dělí P na dvě části a označme P_1 tu, která má délku alespoň poloviční. Stejně tak u' dělí P' na dvě části a P'_1 je ta alespoň poloviční délky. Pak cesta skládájící se z P_1, Q a P'_1 je delší než P i P'.

(12a) Pouze strom, který je cestou.

(12b) Pro n lichá a $n = 2$.

(12c) Má-li mít graf maximální počet hran, pak stupeň každého vrcholu v A je n a stupeň každého vrcholu v B je k. Aby graf obsahoval uzavřený eulerovský tah, musí být obě k, n sudá čísla. Pro neuzavřený eulerovský tah je třeba aby $k = n = 1$ nebo aby alespoň jedno z k, n bylo rovno 2.

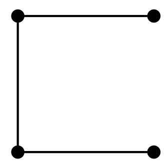
(13) Označme si $T_1, \ldots, T_k$ komponenty souvislosti grafu $G = (V, E)$. Je-li n_i počet vrcholů stromu T_i, je $n_i - 1$ počet jeho hran. Pro vztah mezi $|E|$ a $|V|$ pak dostaneme $|E| = (n_1 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n_1 + \cdots + n_k - k = |V| - k$.

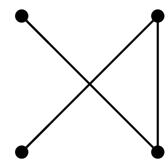
(14) Označíme si x počet vrcholů stupně 3 a y počet vrcholů stupně 2. Protože počet vrcholů je 15, máme $9 + y + x + 3 = 15$, tj. $y + x = 3$. Dále, počet hran je 14 a podle Věty 3 musí platit $1 \cdot 9 + 2y + 3x + 4 \cdot 3 = 28$, tj. $2y + 3x = 7$. Odtud $x = 1$ a $y = 2$.

(15) Označíme si x počet vrcholů stupně 1 a y počet vrcholů stupně 5. Protože počet vrcholů je 18, máme $x + 4 + y = 18$, tj. $x + y = 14$. Dále, počet hran je 17 a podle Věty 3 musí platit $x + 2 \cdot 4 + 5y = 34$, tj. $x + 5y = 26$. Odtud $x = 11$ a $y = 3$.

(16) Označíme si x_1 a x_2 počet vrcholů stromu T_1 a T_2. Protože počet vrcholů stromu T je 51, máme $x_1 + x_2 = 51$. Dále, počet hran je v T_1 je x_2, tj. $x_1 - 1 = x_2$. Odtud $x_1 = 26$ a $x_2 = 25$.

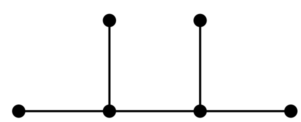
(17) Označme si n počet vrcholů stromu T. Pak počet hran je $n-1$. Protože T^c je také strom s n vrcholy, má rovněž $n-1$ hran. Sečtením počtu hran v grafu a v jeho doplňku dá vždy $\binom{n}{2}$. Odtud $(n-1)+(n-1)=\binom{n}{2}$. To je splněno pro $n=4$. Stromy T a T^c vypadají takto:

T


T^c


(18) Je-li T strom s n vrcholy, má $n-1$ hran a podle Věty 3 je součet stupňů roven $2(n-1)$. Máme-li naopak souvislý graf s n vrcholy a se součtem stupňů $2(n-1)$, musíme ověřit, že to je strom. K tomu stačí ukázat, že neobsahuje kružnice. Kdyby kružnici obsahoval, pak vynecháním hrany na kružnici zůstane graf souvislý a bude mít jen $n-2$ hran. To je ve sporu s Větou 5(i).

(19) Označme počet vrcholů n. Počet hran je $n-1$ a Věta 3 dává, že $2n/3+n=2(n-1)$, tj. $n=6$. Takový strom je jediný:



(20) Kruskalově algoritmu máme v každém kroku jen jedinou množnost pokračování, neboť existuje vždy jen jediná hrana s nejmenším ohodnocením.

(21) Je to hrana $e \in E$, jejímž odebráním se graf rozpadne na dvě komponenty: Kdyby graf bez hrany e zůstal souvislý, pak má svoji kostru, která je zároveň kostrou původního grafu, ale neobsahovala by hranu e.

(22) Je možné přijmout uchazeče na pozice s jejich kvalifikací, např. A-2, B-3, C-6, D-1, E-5 nebo A-6, B-4, C-3, D-2, E-1 a jiné další možnosti.

(23) Např. $G=(A\cup B,E)$, kde $A=\{a\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ a hrany jsou $E=\{ab_1,ab_2,ab_3\}$. Doplněk G^c obsahuje kružnici liché délky $K=\{b_1b_2,b_2b_3,b_3b_1\}$ a proto není podle Věty 15 bipartitní.

(24) Protože kružnice prochází všemi vrcholy a vrcholy z A a z B se při procházení po kružnici střídají, musí platit $|A|=|B|$.

(25a) Protože stupně vrcholů jsou nejvýše 5, je počet hran $|E|\le 5|A|$, ale také $|E|\le 5|B|$. Podmínka $|E|=|V|=|A|+|B|$ dává, že $|A|+|B|\le 5|A|$ a rovněž $|A|+|B|\le 5|B|$. Odtud plyne, že $|B|\le 4|A|$ a $|A|\le 4|B|$.

(25b) Protože stupně vrcholů jsou alespoň 3, je počet hran $|E|\ge 3|A|$, ale také $|E|\ge 3|B|$. Podmínka $|E|\le 2|V|=2(|A|+|B)|$ dává, že $3|A|\le 2(|A|+|B|)$ a $3|B|\le 2(|A|+|B|)$. Odtud plyne, že $|A|\le 2|B|$ a $|B|\le 2|A|$.

(26) Je-li $V = A \cup B$, označíme $|A| = k$ a $|B| = n - k$. Počet hran je tak $|E| = k(n-k)$ a maximum se nabývá pro $k = [n/2]$, kde $[x]$ je celá část čísla x. Pro sudé n je to $n^2/4$ a pro liché n je to $(n^2 - 1)/4$.

(27b) Vrchol $v \in \{0,1\}^n$ dáme do množiny A, pokud obsahuje sudý počet jedniček a do množiny B, pokud obsahuje lichý počet jedniček. Pak každá hrana musí vést z vrcholu v A do vrcholu v B.

(27c) Mějme libovolný vrchol $v \in \{0,1\}^n$. Jeho stupeň je n, neboť je spojen s vrcholy lišícími se od u právě v jediné souřadnici. Podle Věty 17 existuje úplné párování.

(28) Protože hrana je určena dvojicí vrcholů, vybíráme dvojice vrcholů v K_{2n}. První hranu (=dvojici) vybereme $\binom{2n}{2}$ způsoby, druhou $\binom{2n-2}{2}$ způsoby atd. Protože nezáleží na pořadí, v jakém hrany vybíráme, výsledek dělíme $n!$,

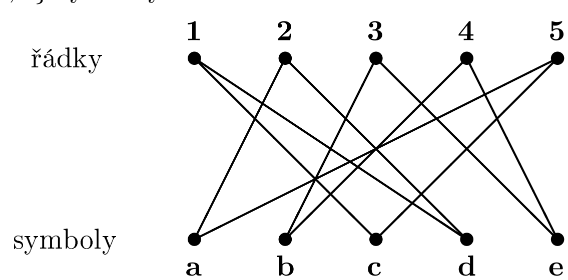
$$N = \binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}\frac{1}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

(29a) Protože hrany v párování spojují různé dvojice vrcholů, počet hran nemůže převýšit číslo $[n/2]$, kde $[x]$ označuje celou část čísla x. Tento počet se nabývá ve stromě tvaru cesty s vrcholy $v_1, v_2, \dots, v_n$ pro párování $F = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, \dots\}$.

(29b) Strom, kde maximální párování má pouze jednu hranu se skládá z jednoho vrcholu v stupně $d(v) = n - 1$, ke kterému je připojeno zbývajících $n - 1$ vrcholů (stupně 1).

(30) Žádné, má-li lichý počet vrcholů a nejvýše jedno, má-li sudý počet vrcholů. (Je možné dokázat přesnou charakterizaci: Strom T má párování obsahující všechny vrcholy právě, když pro každý vrchol v má graf $T \setminus \{v\}$ jedinou komponentu s lichým počtem vrcholů.)

(31a) Bipartitní graf $G = (A \cup B, V)$ má za množinu $A = \{1,2,3,4,5\}$ čísla řádků v L a za $B = \{a,b,c,d,e\}$ symboly.



(31b) Stupně všech vrcholů jsou 2.

(31c) Podle Věty 17 existuje úplné párování v G.

(32) Má-li graf perfektní párování, je vyhrávající strategie pro hráče č.2 následující: na tah hráče č.1 odpoví, že volí vrchol, který je spojen hranou perfektního párování s vrcholem, který zvolil hráč č.1. Tímto způsobem hráč č.2 vždy vyhraje
Nemá-li graf perfektní párování, zvolíme si jakékoli párování $F \subset E$, které má maximální počet hran. Vrcholy tvořící konce hran párování F označme $U \subset V$. Zde

má vyhrávající strategii hráč č.1: Protože F není perfektní, existuje vrchol u_1, do něhož nevede žádná hrana z F. To je první volba hráče č.1. Hrany vycházející z vrcholu u_1 musí končit v množině U, jinak by F nebylo maximální. Hráč č.2 musí tak volit vrchol z $u_2 \in U$ a odpověď hráče č.1 je vrchol u_3, že $u_2u_3 \in F$. Další postup je stejný: hráč č.2 musí nutně vybrat $u_4 \in U$, protože F je maximální. (Kdyby $u_4 \notin U$, podívejme se na cestu s vrcholy u_1, u_2, u_3, u_4. Její prostřední hrana u_2u_3 náleží párování. Místo této hrany dáme do párování hrany u_1u_2 a u_3u_4 a původní hranu u_2u_3 z párování vyhodíme. Dostaneme párování mající o jednu hranu více než maximální párování F.) Hráč č.1 volí u_5 tak, aby $u_4u_5 \in F$. Tímto způsobem má hráč č.1 zaručeno, že pokaždé vyhraje.

(33) Předpokládejme, že hrany barvíme černou a bílou barvou. Zvolme vrchol v libovolně. Ten je spojen s nějakými vrcholy u_1, u_2 a u_3 buď třemi černými nebo třemi bílými hranami. Předpokládejme, že nastala první možnost, druhá se řeší analogicky. Jsou-li některé z vrcholů u_1, u_2, u_3 spojeny mezi sebou černou hranou, vytvoří s vrcholem v černý trojúhelník, tj. černý K_3. Jsou-li mezi u_1, u_2, u_3 jen bílé hrany, tvoří bílý K_3.