Relace.

Základní pojmy.

I když pojem *funkce* je v matematice jeden ze základních a nejdůležitějších, přesto se některé vztahy mezi objekty pomocí funkce popsat nedají. Jde o situace, kdybychom chtěli přiřadit danému prvku nikoli jednu hodnotu, ale celou množinu hodnot.

Příklad 1. Mějme množinu A všech studentů dané fakulty a B množinu všech vypsaných předmětů, které se na fakultě vyučují. Vztah mezi prvky A a B nelze popsat funkční závislostí, neboť není pravděpodobné, že by každý student měl zapsaný nejvýše jeden předmět a stejně tak je nepravděpodobné, že by každý předmět navštěvoval nejvýše jeden student. Zde je třeba k popisu užít obecnější pojem. Veškerá informace je zachycena v množině

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{student } a \text{ má zapsán předmět } b\}.$$

Prvky množiny R jsou uspořádané dvojice a právě uspořádaná dvojice tvoří základ pojmu relace.

Definice. *Mějme množiny A a B. Binární relace R z množiny A do množiny B je množina uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$. Stručně řečeno, R je podmnožina kartézského součinu $A \times B$, $R \subset A \times B$. V případě $A = B$ mluvíme o binární relaci na množině A.*

Jsou-li prvky a, b v relaci R, píšeme $(a, b) \in R$ nebo aRb. V opačném případě značíme $(a, b) \notin R$ nebo $a\not{R}b$. Slovo „binární“ budeme většinou vynechávat a mezi uvedenými dvěma způsoby zápisu budeme volně přecházet.

Poznámka. Pokud bychom chtěli být zcela korektní, měli bychom také zadefinovat, co je uspořádaná dvojice prvků. Dvouprvková množina $\{2, 7\}$ je dvojice prvků 2 a 7, u kterých nám nezáleží na jejich pořadí, $\{2, 7\} = \{7, 2\}$. My však potřebujeme definovat objekt označený $(2, 7)$, který má v sobě zakódováno nejen že se skládá z prvků 2 a 7, ale i jejich pořadí. Pořadí je důležité k tomu, abychom z rovnosti

$$(x, y) = (a, b)$$

vyvodili, že $x = a$ a $y = b$. Jedna možná definice je např.

$$(x, y) := \{\{x\},\ \{x, y\}\}.$$

Tímto způsobem jsme zavedli uspořádanou dvojici pouze pomocí množinové symboliky, tj. v rámci teorie množin. Tato definice uspořádané dvojice opravdu vyhovuje výše uvedému požadavku. Není to ale jediná volba, existuje mnoho jiných. Např.

$$(x, y) := \{\{a, x\},\ \{b, y\}\},$$

kde a, b jsou jakékoli dva různé objekty. Nejčastěji se volí $\emptyset$ a $\{\emptyset\}$.

Podívejme se na jednoduché příklady relací.

- Mějme $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ a relaci R z A do B definovanou

  $$(m, n) \in R, \quad \text{pokud } m \text{ dělí } n.$$

  Výpisem všech dvojic splňujících požadavek dostaneme

  $$R = \big\{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\big\}.$$

- Mějme relaci R na $\mathbb{Z}$ danou: $(m, n) \in R$ právě, když $n - m$ je sudé. Zde už nelze vypsat všechny dvojice, neboť jich je nekonečně mnoho, nicméně můžeme zapsat obecný tvar čísel m, n, která jsou v relaci,

  $$R = \{(m, m + 2k) \mid m, k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Nejmenší relace je prázdná relace $R = \emptyset$. Naopak největší relace na množině A je tzv. *univerzální relace*

  $$R = A \times A.$$

- Relace identity I_A na množině A je relace rovnosti: $(a, b) \in I_A$ právě, když $a = b$.

  $$I_A := \{(a, a) \in A \times A \mid a \in A\}.$$

  Někdy se tato relace nazývá *diagonála*.

- Mějme relaci R na množině $\mathbb{R}$ definovanou

  $$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \text{ je menší než } y\}.$$

  V tomto případě se budeme držet obvyklého značení a místo $x\,R\,y$ budeme psát $x < y$.

- Je důležité si uvědomil, že zobrazení $f\colon A \longrightarrow B$ lze reprezentovat jako relaci R_f definovanou

  $$(a, b) \in R_f \ \text{ právě, když } b = f(a).$$

  Množina $R_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ představuje graf zobrazení f. Pro ilustraci uvažujme např. funkci $f(x) = x^2$. Pro ní je

  $$R_f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

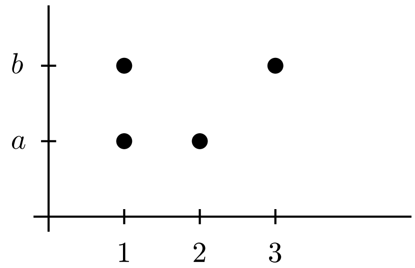
  což je množina bodů ležících na parabole $y = x^2$.

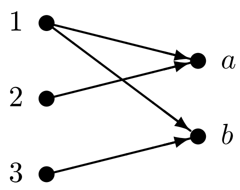
Protože zobrazení je speciální případ relace, je jich méně než relací. Určíme počet zobrazení $f\colon A \longrightarrow B$ a počet relací $R \subset A \times B$ pro množiny $|A| = m$ a $|B| = n$.

Počet zobrazení z A do B zjistíme tak, že každému z m prvků množiny A můžeme vybrat jednu z n hodnot z množiny B. Počet zobrazení je tak n^m. Relace je podmnožina množiny $A \times B$. Protože $|A \times B| = mn$ je počet relací 2^{mn}. Pro porovnání čísel n^m a 2^{mn} si to první přepišme do tvaru $n^m = 2^{m \log_2 n}$. Odtud vidíme, že pro $m > 0$ je $n^m < 2^{mn}$.

Jsou-li množiny, na kterých relace uvažujeme malé, můžeme si relace graficky znázornit buď vyznačením bodů v kartézském součinu nebo pomocí orientovaného grafu.

Příklad 2. Mějme $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ a relaci $R = \{(1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (3, b)\}$. Níže vidíme obě možnosti grafického znázornění, vlevo v kartézském součinu a vpravo pomocí orientovaného grafu.





Definice. *Mějme množiny A, B, C a relace $R \subset A \times B$ a $S \subset B \times C$.*

(i) *Relace $R^{-1} \subset B \times A$ se nazývá inverzní k relaci R, jestliže platí*

$$aR^{-1}b, \quad \text{jestliže} \quad bRa.$$

(ii) *Složená relace $R \circ S$ je relace z A do C definovaná následovně: Pro $a \in A$ a $c \in C$ je*

$$a(R \circ S)c, \quad \text{jestliže existuje } b \in B \text{ takové, že } aRb \text{ a } bSc.$$

V některých knihách a textech se složení relací R a S značí v obráceném pořadí $S \circ R$ oproti našemu označení $R \circ S$. Oba způsoby mají své důvody. Pracujeme-li proto s několika texty, je třeba se přesvědčit, jaké označení se autor rozhodl užívat.

Můžeme si povšimnout, že inverzní zobrazení existuje pouze k prostému zobrazení, zatímco inverzní relace existuje vždy. Skládáme-li relaci R samu se sebou, používáme značení $R \circ R = R^2$. Obecně, pro n-násobné složení relace R se sebou platí induktivní vztah $R^n = R \circ R^{n-1}$, $n \geq 2$.

Příklad 3. Na množině A všech lidí uvažujme relace R a S:

$$aRb, \text{ je-li } a \text{ rodičem } b; \quad aSb, \text{ jsou-li } a, b \text{ sourozenci (zde míníme } a \neq b).$$

Co je R^{-1}, S^{-1}, $R \circ S$, $S \circ R$, R^2 a S^2?

- $aR^{-1}b$ znamená, že člověk a je dítětem člověka b;

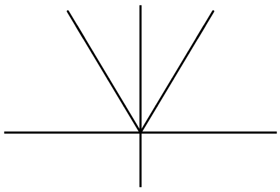
- $S^{-1} = S$;
- $a(R \circ S)b$ právě, když a je rodičem b a b má ještě jednoho dalšího sourozence;
- $a(S \circ R)b$, jestliže a je strýc nebo teta člověka b;
- aR^2b, jestliže člověk a je prarodičem člověka b;
- aS^2b, jestliže $a = b$ a a má ještě dalšího sourozence nebo $a \neq b$ a a, b jsou sourozenci mající alespoň ještě jednoho dalšího sourozence.

Pro relaci R z Příkladu 2 je $R^{-1} = \{(a,1),\ (b,1),\ (a,2),\ (b,3)\}$. V grafickém znázornění by se v kartézském součinu obrázek překlopil podle osy prvního kvadrantu a v orientovaném grafu by se všechny šipky obrátily.

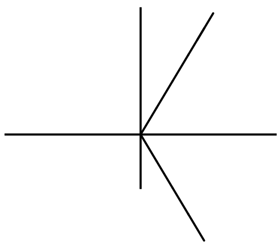
Příklad 4. Uvažujme relaci S na množině $\mathbb{R}$ danou: $(x,y) \in S$ právě, když $y = 2|x|$. Jak vypadá graf S, S^{-1} a $S^2 = S \circ S$ v kartézském součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Protože relace S je ve skutečnosti funkce $y = 2|x|$, je graf relace S grafem této funkce, viz obrázek vlevo. S^{-1} už ale není zadaná jako funkce a i z jejího grafu vidíme, že jedné hodnotě x mohou příslušet dvě hodnoty y, viz obrázek uprostřed. Zbývá zjistit, která reálná čísla jsou v relaci S^2. Aby xS^2y, je třeba podle definice složené relace najít takové $t \in \mathbb{R}$, že xSt a tSy. Je-li xSt, pak $t = 2|x|$. Je-li tSy, pak $y = 2|t|$. Dosazením t z první rovnice do druhé dostaneme $y = 4|x|$, viz obrázek vpravo.

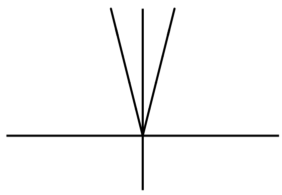
$S = \{(x,y) \mid y = 2|x|\}$



$S^{-1} = \{(x,y) \mid x = 2|y|\}$



$S^2 = \{(x,y) \mid y = 4|x|\}$



Příklad 5. Uvažujme relaci R na $\mathbb{N}$ danou: $(k,m) \in R$, jestliže $m = k^2$. Co je R^n?

Začneme s R^2. Podle definice je $(k,m) \in R^2$, jestliže existuje $i \in \mathbb{N}$, že $(k,i) \in R$ a $(i,m) \in R$, tj. $i = k^2$ a $m = i^2$. Spojením těchto podmínek dostaneme $m = k^4$.

Poučeni tímto speciálním případem navrhneme, že $(k,m) \in R^n$, když $m = k^{2^n}$. Důkaz provedeme indukcí podle n. Případ $n = 1$ je přímo definice relace R a $n = 2$ jsme ověřili v prvním kroku. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n a vyvodíme, že platí i pro $n+1$: $(k,m) \in R^{n+1}$, existuje-li i, že $(k,i) \in R^n$ a $(i,m) \in R$, tj. $i = k^{2^n}$ a $m = i^2$. Spojením dostáváme

$$m = (k^{2^n})^2 = k^{2^n \cdot 2} = k^{2^{n+1}},$$

a tím je důkaz ukončen.

Pro inverzi složení dvou relací platí následující vztah,

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

K ověření stačí použít definice složené relace a inverzní relace: Mějme $c(R \circ S)^{-1}a$. To znamená $a(R \circ S)c$. Existuje tak b, že aRb a bSc. To je to samé, jako $bR^{-1}a$ a $cS^{-1}b$. V tom případě ale $c(S^{-1} \circ R^{-1})a$.

Uvedeme si nejpoužívanější vlastnosti, podle kterých relace klasifikujeme.

Definice. *Mějme relaci R na množině A. Řekneme, že R je*

(i) *reflexivní, jestliže pro každé $a \in A$ platí aRa.*

(ii) *symetrická, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí implikace $aRb \Longrightarrow bRa$.*

(iii) *antisymetrická, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $a = b$, kdykoli aRb a bRa.*

(iv) *tranzitivní, jestliže pro každé $a, b, c \in A$ platí aRc, kdykoli aRb a bRc.*

Slovy se dají uvedené vlastnosti vyjádřit následovně. Reflexivita znamená, že každý prvek je v relaci sám se sebou. Symetrie vyjadřuje vlastnost, že je-li jeden prvek v relaci s druhým prvkem, je i druhý prvek v relaci s prvním. Antisymetrie kopíruje vlastnost znaménka $\leq$: je-li $x \leq y$ a rovněž $y \leq x$, pak nutně $x = y$. A konečně tranzitivita znamená, že je-li jeden prvek v relaci s druhým a druhý s třetím, musí být i první prvek v relaci se třetím. Vlastnosti symetrie a antisymetrie nejsou opačné ani se navzájem nevylučují. Např. diagonála I_A je současně symetrická i antisymetrická relace.

Příklad 6. Uvažujme relaci R na $\mathbb{N}$ danou dělitelností: $(k, n) \in R$, jestliže k dělí n. Jaké vlastnosti z výše uvedených má relace R?

Tato relace je zřejmě reflexivní, neboť $(k, k) \in R$ pro všechna přirozená čísla. Není ale symetrická, protože když k dělí n, pak obecně n nedělí k (výjimkou je případ $k = n$). Definice symetrie však požaduje platnost této vlastnosti pro všechna $k, n \in N$. Najdeme-li protipříklad na tuto vlastnost, např. dvojice $(2, 6) \in R$, ale $(6, 2) \notin R$, pak uvedená vlastnost neplatí. Relace R je antisymetrická, neboť dělí-li se dvě přirozená čísla navzájem, musí být stejná. Zbývá tranzitivita. Zde máme testovat, zda pro jakákoli tři čísla k, m, n splňující $(k, m) \in R$ a $(m, n) \in R$ vždy platí, že i $(k, n) \in R$. Konkrétně, pokud k dělí m a m dělí n, musí i k dělit n? To samozřejmě platí, a tedy R je tranzitivní.

Výše uvedené čtyři základní vlastnosti můžeme popsat i pomocí operací mezi relacemi. Reflexivní relace vyžaduje, aby $(a, a) \in R$ pro všechna a z dané množiny A. Jinými slovy, R obsahuje diagonálu, $I_A \subset R$. Symetrická relace vyžaduje, aby z $(a, b) \in R$ vždy vyplynulo $(b, a) \in R$, tj. $(a, b) \in R^{-1}$. Vidíme, že symetrická relace splňuje $R = R^{-1}$. Pro antisymetrickou relaci zjišťujeme, že nastane-li situace, kdy $(a, b) \in R$ a současně $(b, a) \in R$ (tj. $(a, b) \in R^{-1}$), pak nutně $a = b$, tj. $(a, b) \in I_A$. Stručně zapsáno: $R \cap R^{-1} \subset I_A$. A konečně tranzitivní relace požaduje, aby $(a, b) \in R$ a $(b, c) \in R$ vynutilo $(a, c) \in R$. Opět stručně vyjádřeno: $R \circ R \subset R$. Shrneme tato pozorování do tabulky.

reflexivita R	:	$I_A \subset R$
symetrie R	:	$R = R^{-1}$
antisymetrie R	:	$R \cap R^{-1} \subset I_A$
tranzitivita R	:	$R \circ R \subset R$.

V dalším se budeme podrobněji věnovat dvěma důležitým relacím: *ekvivalenci* a *uspořádání.*

Relace ekvivalence.

Definice. *Relace R na množině A se nazývá ekvivalence, je-li je reflexivní, symetrická a tranzitivní. V takovém případě budeme také používat zápis $a \sim b$ místo aRb.*

Nejjednodušší příklad ekvivalence je relace rovnosti I_A. Hlavní důvod pro zavedení relace ekvivalence je právě zobecnění rovnosti.

Příklad 7. Uvažujme množinu $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{0,1\}^n$ všech konečných posloupností nul a jedniček. Definujeme relaci S na množině M,

$$(x, y) \in S \text{ právě, když posloupnosti } x \text{ a } y \text{ mají stejný počet jedniček.}$$

Relace S je reflexivní, symetrická i tranztivní, tedy ekvivalence. Tento příklad dobře ilustruje ústřední myšlenku relace ekvivalence: seskupit objekty, které mouhou být různé, ale v jistém (důležitém) aspektu stejné. Zde jsme posloupnosti se stejným počtem jedniček prohlásili za ekvivalentní, i když mohou být zcela odlišné.

Jiný příklad je počítání modulo m. Připomeňme si, že pro celá čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, značíme

$$a \equiv b \mod m,$$

je-li $a - b$ je dělitelné číslem m (jinými slovy b je zbytek čísla a po dělení číslem m). Výraz čteme: a je kongruentní s b modulo m. Tím je na množině $\mathbb{Z}$ zadána relace R,

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \mod m\}.$$

R je zřejmě reflexivní a symetrická. K tranzitivitě předpokládáme, že aRb a bRc, tj. $a - b$ i $b - c$ je dělitelné číslem m. Pak i součet $(a - b) + (b - c) = a - c$ je dělitelný m, a tedy aRc.

Příklad 8. Na množině $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ zavedeme relaci R tak, že body X a Y jsou v relaci, jestliže leží na stejné přímce procházející bodem $(0,0)$. Ověříme, že R je ekvivalence. Opět reflexivita a symetrie je zřejmá. Tranzitivita je také snadno ověřitelná: Leží-li body X a Y na téže přímce procházející počátkem a body Y a Z opět na stejné přímce procházející počátkem, musí na téže přímce ležet i dvojice X a Z. Je užitečné všimnout si, že pro tranzitivitu bylo důležité, že množina A neobsahuje počátek. Bez toho by tranzitivita neplatila. ($X = (1,0)$, $Y = (0,0)$ a $Z = (0,1)$.)

Definice. *Mějme na množině A ekvivalenci $\sim$. Třída ekvivalence určená prvkem $a \in A$ je množina*

$$[a] := \{b \in A \mid b \sim a\}.$$

Specielně, vždy $a \in [a]$.

Např. pro počítání modulo 3 je třída ekvivalence určená prvkem 0 rovna

$$[0] = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

tj. všechny násobky 3. Podobně třída $[1] = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ neboť $3k+1 \equiv 1 \bmod 3$, tj. $(3k+1)-1$ je dělitelné třemi. Nakonec $[2] = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ($[3] = [0]$, takže nic nového už bychom nedostali). Vidíme, že takto máme 3 různé třídy ekvivalence, jejichž sjednocení pokrývá všechna celá čísla,

$$[0] \cup [1] \cup [2] = \mathbb{Z}.$$

Rovněž vidíme, že třídy ekvivalence jsou disjunktní množiny. Obě vlastnosti se nevyskytují jen u počítání modulo, ale platí obecně pro každou ekvivalenci.

Věta 9. *Mějme ekvivalenci $\sim$ na množině A. Je-li $a \in [b]$, pak $[a] = [b]$. Specielně, dvě různé třídy ekvivalence jsou nutně disjunktní.*

Důkaz. Mějme $a \in [b]$, tj. $a \sim b$. Protože ekvivalence je tranzitivní relace, je každý prvek, který je ekvivalentní s a, také ekvivalentní s b a obráceně. Tím $[a] = [b]$.

Uvažujme nyní dvě různé třídy ekvivalence, $[a] \neq [b]$. Kdyby existoval společný prvek $c \in [a] \cap [b]$, pak by podle výše dokázané části platilo, že $[c] = [a]$ a $[c] = [b]$. To by znamenalo $[a] = [b]$, což je spor. □

Příklad 10. Na potenční množině $\mathcal{P}(\{0,1,2\})$ máme relaci S danou

$$(A,B) \in S \text{ právě, když } A \text{ a } B \text{ mají shodný nejmenší prvek.}$$

Ukažte, že S je ekvivalence a určete její třídy.

Reflexivita a symetrie jsou zřejmé. Tranzitivita: mějme tři množiny $A, B, C \subset \{0,1,2\}$ a předpokládejme, že $(A,B) \in S$ a $(B,C) \in S$. To znamená, že nejmeší prvek množiny A je stejný jako nejmenší prvek množiny B a ten je opět stejný jako nejmenší prvek množiny C. Tím i $(A,C) \in S$. Ověřili jsme, že S je ekvivalence.

Třídy ekvivalence jsou následující čtyři:

$$\{\emptyset\},\ \big\{\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\}\big\},\ \big\{\{1\},\{1,2\}\big\},\ \big\{\{2\}\big\}.$$

Třídy ekvivalence tvoří tzv. rozklad množiny. Pod rozkladem množiny A rozumíme systém neprázdných disjunktních množin $A_i \subset A$, $i \in I$, splňujících

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A.$$

Nejenže třídy ekvivalence tvoří rozklad, ale i naopak každý rozklad množiny A zadává ekvivalenci na A, jejíž třídy ekvivalence jsou přesně množiny původního rozkladu. Taková ekvivalence je dána

$$a \sim b, \quad \text{jestliže } a \text{ i } b \text{ patří do stejné množiny rozkladu.}$$

Uvažujme rozklad množiny $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ na $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{4,5\}$ a $A_3 = \{6\}$. Jak vypadá ekvivalence daná tímto rozkladem? Vypíšeme všechny dvojice:

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6).$$

Příklad 11. Mějme rozklad roviny $\mathbb{R}^2$ na množiny A_r, $r \geq 0$, kde A_r označuje kružnici se středem v počátku a poloměrem r. Popište ekvivalenci zadanou tímto rozkladem.

Body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou ekvivalentní, leží-li na stejné kružnici A_r, tj. jejich souřadnice splňují rovnici $x^2 + y^2 = r^2$. Můžeme tak psát

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2), \quad \text{když } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Relace uspořádání.

Některé množiny už mají v sobě přirozené uspořádání svých prvků. Nejznámější příklady jsou asi množina $\mathbb{N}$ nebo $\mathbb{R}$, kde jsou čísla uspořádána podle velikosti. Jiný příklad je uspořádání slov ve slovníku nebo inkluze $\subset$ na systému $\mathcal{P}(A)$ všech podmnožin množiny A. Relace sloužící k porovnávání prvků mají některé společné vlastnosti.

Definice. *Relace na množině A se nazývá uspořádání, je-li reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.*

Je zvykem označovat obecnou relaci uspořádání symbolem $\preceq$, tj. budeme psát $a \preceq b$ místo aRb.

Příklad 12. Relace $\leq$ na množině $\mathbb{N}$ je příklad uspořádání ve smyslu naší definice. Je reflexivní, neboť $n \leq n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Antisymetrie plyne z faktu, že je-li $m \leq n$ a $n \leq m$, pak $m = n$. A konečně tranzitivita je nám známá věc, že $m \leq k$, pokud víme, že $m \leq n$ a $n \leq k$.

Uvažujme teď relaci dělitelnosti $\preceq$ na $\mathbb{N}$: $m \preceq n$ právě, když m dělí n. Ověříme, že $\preceq$ je uspořádání. Reflexivita je zřejmá, protože n dělí n pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále, jestliže se čísla m a n navzájem dělí, musí být stejná, což je antisymetrie. K ověření tranzitivity mějme tři čísla m, n, k taková, že m dělí n a n dělí k. Podrobě: $n = \alpha m$ a $k = \beta n$ pro nějaká celá čísla α, β. Z těchto vztahů plyne, že $k = \alpha\beta m$, tj. m dělí k, což je tranzitivita. Relace $\preceq$ je uspořádání.

Zavedeme-li na množině všech lidí relaci R definovanou xRy, je-li člověk x nejvýše tak starý jako člověk y, pak tato relace *není* uspořádání, neboť nesplňuje vlastnost antisymetrie. Stejně tak i ostrá nerovnost $<$ na množině $\mathbb{N}$ nebo $\mathbb{R}$ není uspořádání ve smyslu naší definice, neboť ji také chybí vlastnost antisymetrie.

Mějme množinu A s uspořádáním $\preceq$. Prvky $a, b \in A$, pro které platí

$$a \preceq b \;\text{ nebo }\; b \preceq a,$$

nazýváme porovnatelné. V předchozím příkladu jsou při relaci $\leq$ na množině $\mathbb{N}$ všechny prvky navzájem porovnatelné. Při relaci dělitelnosti už tomu tak není, např. čísla 3 a 7 nejsou porovnatelná, neboť $3 \not\preceq 7$ a stejně tak $7 \not\preceq 3$.

Protože obecně nejsou každé dva prvky porovnatelné, užívá se v mnoha textech místo uspořádání název „částečné uspořádání“. My si však dovolíme slovo „částečné“ vynechávat. Přijmeme také jednu úmluvu v označení. Relaci uspořádání na množině A budeme občas značit $\preceq_A$, budeme-li chtít zdůraznit množinu, na které uspořádání uvažujeme.

Extrémní případ uspořádání je diagonála I_A. Tam je každý prvek je porovnatelný pouze sám se sebou. Protikladem diagonály I_A je uspořádání, kde jsou všechny prvky navzájem porovnatelné:

Definice. *Uspořádání $\preceq_A$ na množině A se nazývá lineární, pokud pro každé dva prvky $a, b \in A$ platí buď $a \preceq_A b$ nebo $b \preceq_A a$.*

Z předchozích příkladů je uspořádání $\leq$ na množinách $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{R}$ lineární. Naopak relace dělitelnosti lineární není.

Příklad 13. Mějme množinu X a označíme $M = \mathcal{P}(X)$ potenční množinu množiny X. Ověříme, že relace inkluze $\subset$ je uspořádání na M. Reflexivita je jasná, neboť $A \subset A$ pro každou $A \in M$. Je-li $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$, je nutně $A = B$, což je antisymetrie. Máme-li nyní tři množiny $A, B, C \in M$, pro které platí $A \subset B$ a $B \subset C$, pak musí být i $A \subset C$. Tím jsme ověřili tranzitivitu.

Uspořádání $\subset$ však není lineární pokud základní množina X obsahuje alespoň dva prvky: Je-li $x, y \in X$, $x \neq y$, pak množiny $\{x\}$ a $\{y\}$ nejsou porovnatelné pomocí inkluze.

Důležitý typ uspořádání je tzv. lexikografické uspořádání. Zobecňuje obyčejné uspořádání hesel ve slovníku, odtud i jeho název. Místo slov ale budeme uspořádávat konečné posloupnosti symbolů.

Definice. *Mějme množinu A s lineárním uspořádáním $\preceq_A$ (=abeceda). Množinu konečných neprázdných posloupností vytvořených z prvků množiny A označíme $F(A)$ (=slova). Uvažujme dvě posloupnosti $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ a $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ z $F(A)$. Řekneme, že*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m) \preceq_L (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

platí-li jedna z následujících dvou podmínek:

- *$(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ je počáteční úsek posloupnosti $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$;*
- *jestliže $a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$ a $a_k \neq b_k$, pak $a_k \preceq_A b_k$.*

Uspořádání $\preceq_L$ se nazývá lexikografické.

První podmínka v definici říká, že posloupnost $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je buď rovna posloupnosti $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ nebo je jejím prodloužením. Druhý požadavek znamená, že první index k, kde se členy obou posloupností začnou lišit, musí splňovat $a_k \preceq_A b_k$. Lexikografické uspořádání je lineární uspořádání díky tomu, že abeceda A je lineárně uspořádaná. Pokud bychom měli na A uspořádání, které není lineární, nebylo by lineární ani $\preceq_L$.

Příklad 14. Jako jednoduchou ilustraci uvažujme množinu $A = \{a, b\}$ s obyčejným abecedním uspořádáním. Pak např.

$$(a, a, b) \preceq_L (a, a, b, a), \quad (a, b, a) \preceq_L (a, b, b), \quad (a, b, a, a, b) \preceq_L (a, b, a, b).$$

Povšimněme si, že mezi (a, a, b) a (a, a, b, a) už neleží žádný jiný prvek, zatímco mezi (a, b, a) a (a, b, b) jich leží nekonečně mnoho: všechny prvky typu $(a, b, a, \ldots \mathit{cokoli} \ldots)$.

Zvolíme-li za abecedu $A = \mathbb{R}$, pak slova $F(\mathbb{R})$ jsou všechny konečné posloupnosti reálných čísel. Platí např.

$$(e, \pi, \sqrt{2}, -2) \preceq_L (e, \pi, \sqrt{13}) \preceq_L (3, e).$$

Případ $F(\mathbb{R})$ se vyznačuje zvláštností, že mezi každými dvěma posloupnostmi leží nekonečně mnoho jiných posloupností.

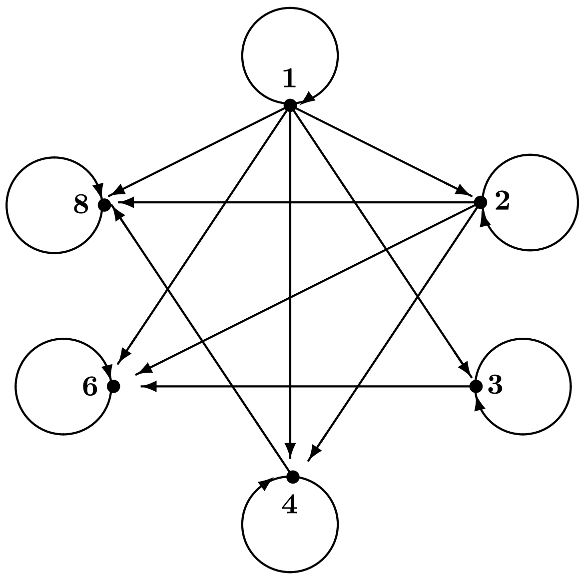
Pokud je možné si relaci graficky reprezentovat, je to velmi užitečné nejen pro její vizualizaci, ale i pro pochopení. Vlastnosti relace uspořádání nám umožňují zjednodušit její grafickou podobu tím, že budeme redukovat příslušný orientovaný graf na tzv. Hasseův diagram. Ukážeme to na příkladu relace dělitelnosti $\preceq_A$ na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$. Jako každou relaci můžeme i tuto znázornit orientovaným grafem, jak je to na obrázku dole vlevo. Všechna informace o relaci $\preceq_A$ je v něm zachycena. Některá informace ale zbytečně vícekrát, proto začneme orientovaný graf redukovat.

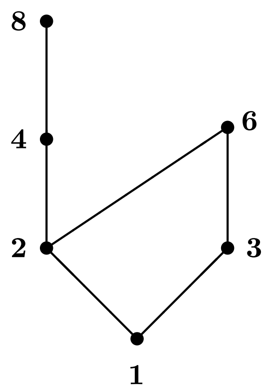
(i) Víme, že uspořádání je z definice reflexivní relace, můžeme proto vypustit všechny smyčky kolem vrcholů grafu.

(ii) Vynecháme hrany, které vyplývají z tranzitivity. Např. hrana $1 \to 4$ vyplývá z toho, že v grafu jsou už hrany $1 \to 2$ a $2 \to 4$. Proto ji lze vynechat.

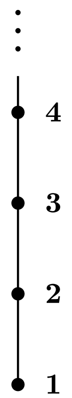
(iii) Abychom se zbavili i šipek na hranách, kreslíme vrcholy tak, že počáteční leží vždy níže než koncový.

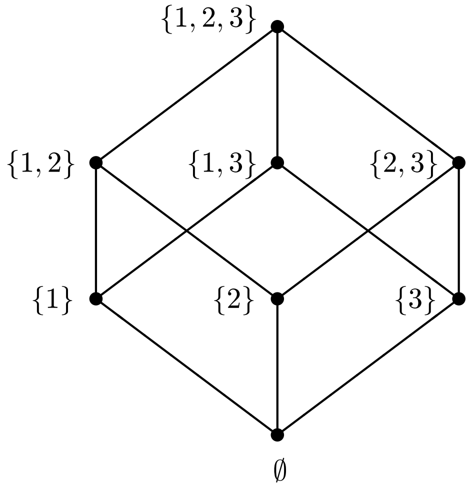
Výsledek redukce je Hasseův diagram, viz obrázek vpravo. Obsahuje všechnu informaci jako orientovaný graf, ale v mnohem přehlednějším tvaru.





Příklad 15. Nakreslete Hasseův diagram pro množinu $\mathbb{N}$ s uspořádáním $\leq$ a pro množinu $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ s inkluzí $\subset$.





Vlevo dole je Hasseův diagram pro $\mathbb{N}$. Je to nekonečně mnoho vrcholů ležících na polopřímce. Obecně každé lineární uspořádání má Hasseův diagram ležící na přímce (odtud i název „lineární uspořádání“). Vpravo je diagram pro $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$. Pokud v něm vidíme krychli, není to náhoda. Hasseův diagram pro $\mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\})$ je tvořen vrcholy a hranami n-rozměrné krychle.

Máme-li na množině zadané uspořádání, můžeme mluvit o největším a nejmenším prvku této množiny.

Definice. *Mějme množinu A s uspořádáním $\preceq$. Prvek $a \in A$ se nazývá největší prvek množiny A, jestliže pro všechna $b \in A$ platí $b \preceq a$.*

Podobně, $a \in A$ se nazývá nejmenší prvek množiny A, jestliže pro všechna $b \in A$ platí $a \preceq b$.

Největší a nejmenší prvek nemusí vždy existovat. Množina celých čísel s obvyklým uspořádáním nemá ani nejmenší ani největší prvek. Přirozená čísla mají nejmenší prvek 1, ale nemají největší. Interval $\langle 0,1\rangle \subset \mathbb{R}$ má největší prvek 1 a nejmenší prvek 0. Naopak interval $(0,1)$ nemá ani největší ani nejmenší prvek. Nicméně, existuje-li největší nebo nejmenší prvek, je vždy jediný. Kdyby např. v množině A existovaly dva největší prvky $a, \widetilde{a}$, pak z definice největšího prvku plyne, že $a \preceq \widetilde{a}$ a také $\widetilde{a} \preceq a$. Protože uspořádání je antisymetrická relace, dostaneme $a = \widetilde{a}$.

Příklad 16. Na množině funkcí

$$A = \big\{ f\colon \langle 0,1\rangle \longrightarrow \langle 0,1\rangle \;\big|\; f(0)=0,\ f \text{ je spojitá} \big\}$$

uvažujme obvyklé uspořádání: $f \le g$, když $f(x) \le g(x)$ pro všechna $x \in \langle 0,1\rangle$. Jaký je největší a nejmenší prvek v množině A?

Nejmenší prvek je konstantní funkce $f(x) = 0$. Největší prvek neexistuje. Jediný přirozený kandidát, který by byl větší než všechny funkce z množiny A je

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ 1 & x \in (0,1\rangle, \end{cases}$$

ale ten nepatří do množiny A, neboť to není spojitá funkce.

Požadavek na největší prvek můžeme oslabit a dostaneme pojem maximálního prvku. Maximálních prvků, na rozdíl od největšího, může být v množině více.

Definice. *Mějme množinu A s uspořádáním $\preceq$. Prvek $a \in A$ se nazývá maximální prvek množiny A, pokud jediný prvek $b \in A$ splňující $a \preceq b$, je pouze samotný prvek a.*

Podobně, prvek $a \in A$ je minimální prvek množiny A, pokud jediný prvek $b \in A$ splňující $b \preceq a$, je pouze samotný prvek a.

Rozdíl mezi největším a maximálním prvkem je ten, že největší prvek je porovnatelný se všemi ostatními a je z nich největší, zatímco maximální prvek je největší jen v rámci těch prvků, které jsou s ním porovnatelné.

Příklad 17. Vezmeme si za A množinu všech neprázdných vlastních podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$,

$$A = \mathcal{P}\big(\{1, 2, \ldots, n\}\big) \setminus \big\{\emptyset, \{1, 2, \ldots, n\}\big\}$$

s uspořádáním inkluze. V množině A neexistuje nejmenší prvek, neboť jediný kandidát by byla $\emptyset$, ale ta nepatří do A. Stejně tak neexistuje největší prvek v A, neboť to by mohla být jen celá množina $\{1, 2, \ldots, n\}$, ale ta také nepatří do A. Minimálních prvků v množině A je dokonce n, neboť každá jednoprvková podmnožina je minimální prvek. Podobně i maximálních prvků je n, je to každá množina s $n - 1$ prvky.

Porovnáním definic vidíme, že největší prvek je vždy i maximální prvek a nejmenší prvek je i minimální prvek. Předchozí příklad ukazuje, že opačně to neplatí.

Cvičení.

(1) Na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$ uvažujem dvě relace R a S dané

$$\begin{aligned} R &= \{(1,3), (2,2), (3,1), (3,4), (4,2)\}, \\ S &= \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}. \end{aligned}$$

Vypište prvky následujících relací:

(a) $R \circ S$, $S \circ R$,

(b) R^{-1}, S^{-1}, $(R \circ S)^{-1}$ a $(S \circ R)^{-1}$,

(c) $R^{-1} \circ S^{-1}$, $S^{-1} \circ R^{-1}$.

(2) Uvažujme relaci R na $\mathbb{N}$ danou: $(k, m) \in R$, jestliže $k = m^m$. Co je R^2 a R^3?

(3) Rozhodněte, zda relace R na množině $\mathbb{R}$ je reflexivní, symetrická, antisymetrická nebo tranzitivní, jestliže $(x, y) \in \mathbb{R}$ právě, když

(a) $x + y = 0$;

(b) $|x| = |y|$;

(c) $x - y$ je racionální číslo;

(d) $xy \geq 0$;

(e) x je iracionální násobek y;

(f) $|x-y|=1$;

(g) prázdná relace $R=\emptyset$.

(4) Mějme relaci R na $\mathbb{Z}$ definovanou, že $(k,n)\in R$ právě, když $k+2n$ je dělitelné třemi. Ukažte, že R je ekvivalence a zjistěte, kolik má tříd.

(5) Mějme relaci S na množině všech lidí. Rozhodněte, zda S je reflexivní, symetrická, antisymetrická nebo tranzitvní, je-li aSb právě, když

(a) a je vyšší než b;

(b) a a b se nenarodily ve stejný den;

(c) a a b mají stejné křestní jméno;

(d) a a b mají stejného prarodiče.

(6) Na množině $A=\{a,b,c,d\}$ máme relaci $S=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c)\}$. Jaký je minimální počet prvků, které je třeba k relaci S přidat, aby byla

(a) reflexivní?

(b) symetrická?

(c) antisymetrická?

(d) tranzitivní?

(7) Na množině $A=\{1,2,\dots,5\}$ máme relaci R definovanou: $(k,n)\in R$ právě, když k dělí $5-n$. Zjistěte, jakou z vlastností reflexivita, symetrie, antisymetrie a tranzitivita má relace R.

(8) Mějme množinu $A=\{0,1\}^4$ všech 0-1 posloupností délky 4. Řekneme, že dvě posloupnosti $s,t\in A$ jsou v relaci S, jestliže existuje blok dvou symbolů stojících těsně vedle sebe, který se vyskytuje jak v s tak v t. Např. 0110 a 0001 jsou v relaci, protože obsahují blok 01. Naopak 0001 a 1110 v relaci nejsou, neboť neobsahují žádný společný blok dvou symbolů. Zjistěte, jakou z vlastností reflexivita, symetrie, antisymetrie a tranzitivita má relace S.

(9) Popište všechny relace, které jsou současně symetrické i antisymetrické. Nalezněte všechny relace, které jsou současně reflexivní, symetrické a antisymetrické.

(10) Dokažte, že relace R je symetrická a tranzitivní právě, když $R\circ R^{-1}=R$.

(11) V rovině $\mathbb{R}^2$ máme dvě relace R a S definované:

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)\,R\,(x_2,y_2) &\quad \text{právě, když } x_1=x_2,\\ (x_1,y_1)\,S\,(x_2,y_2) &\quad \text{právě, když } x_1+y_1=x_2+y_2.\end{aligned}$$

Ověřte, že R i S jsou ekvivalence a popište jaké mají třídy ekvivalence.

(12) Na množině všech polynomů definujeme ekvivalenci

$$p(x) \sim q(x) \quad \text{právě, když} \quad \frac{d^3p}{dx^3} = \frac{d^3q}{dx^3}.$$

Ověřte, že $\sim$ je opravdu ekvivalence a určete třídu $[x^4]$.

(13) Na množině $\mathbb{R}$ máme ekvivalenci $x \sim y$, pokud $[3x] = [3y]$, kde symbol $[x]$ označuje celou část čísla x. Nalezněte třídy ekvivalence.

(14) Na $\mathbb{R}$ uvažujme ekvivalenci $x \sim y$, pokud $\sin x = \sin y$. Ověřte, že $\sim$ je skutečně ekvivalence a určete třídu ekvivalence $[\pi/4]$.

(15) Na množině $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ všech funkcí máme ekvivalenci danou $f \sim g$ právě, když $f(0) = g(0)$ a $f(1) = g(1)$. Zjistěte, co je třída ekvivalence generovaná funkcí $f(x) = x$?

(16) Jsou dána přirozená čísla $k_1, k_2 \geq 2$ a relace ekvivalence $\sim$ na $\mathbb{Z}$:

$$m \sim n \quad \text{právě, když současně} \quad m \equiv n \bmod k_1 \quad \text{a} \quad m \equiv n \bmod k_2.$$

Určete třídu ekvivalence $[0]$.

(17) Kolik tříd má ekvivalence daná $m^2 \equiv n^2 \bmod 7$? Kolik je tříd ekvivalence, když místo čísla 7 je $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$?

(18) Pro $n \geq 2$ označíme $P(n)$ nejmenší prvočíslo dělící n a $Q(n)$ největší prvočíslo dělící n. Na množině $A = \{2, 3, \dots\}$ máme relace R a S dané

$$\begin{aligned} (m,n) \in R \quad & \text{právě, když } P(m) = P(n), \\ (m,n) \in S \quad & \text{právě, když } Q(m) = Q(n). \end{aligned}$$

Ověřte, že R a S jsou ekvivalence na A a napište několik prvních členů tříd ekvivalence $[2]$, $[3]$ a $[5]$ pro R i S.

(19) Na množině $M = \mathcal{P}(\{-1, 0, 1\})$ máme ekvivalenci $\sim$ danou, že $A \sim B$, pokud mají množiny $A, B \in M$ stejný součet hodnot svých prvků. Nalezněte třídy ekvivalence.

(20) Mějme rozklad roviny $\mathbb{R}^2$ na rovnoběžné přímky $y = -2x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Jakou ekvivalenci tento rozklad určuje?

(21) Mějme rozklad množiny $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ a k němu příslušnou ekvivalenci $\sim$ na $\mathbb{N}$. Nalezněte funkci $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, aby platilo $m \sim n$ právě, když $f(m) = f(n)$.

(22) Množina X je sjednocením neprázdných množin X_i, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, přičemž množiny X_i nemusí být disjunktní. Na X definujeme relaci S:

$$(x, y) \in S \quad \text{právě, když prvky } x, y \text{ leží ve stejné množině } X_i.$$

Zjistěte, jakou z vlastností reflexivita, symetrie, antisymetrie a tranzitivita má relace S.

(23) Kolik je relací ekvivalence na množině $\big\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\big\}$?

(24) Mějme dvě ekvivalence R a S. Ukažte, že jejich složení je ekvivalence právě, když tyto relace komutují, tj. $R \circ S = S \circ R$.

(25) Na množině $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0,1\}^n$ všech konečných posloupností vytvořených z 0 a 1 definujeme pro $s, t \in M$ relaci $s \preceq t$ tak, že buď $s = t$ nebo t je prodloužením posloupnosti s. Ověřte, že $\preceq$ je uspořádání. Jsou všechny dvojice prvků množiny M porovnatelné?

(26) Seřaďte následující posloupnosti podle lexikografického uspořádání: 0, 01, 11, 010, 011, 0001 a 0101.

(27) Množina $A = \{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}$ je uspořádána relací dělitelnosti, tj. $(a, b) \in R$, když a dělí b.

(a) Nalezněte největší a nejmenší prvek.

(b) Nalezněte všechny maximální a minimální prvky.

(28) Nakreslete Hasseův diagram pro relaci dělitelnosti na množině $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

(29) Na množině $A = \{0, 1, 2\} \times \{2, 5, 8\}$ definujeme relaci

$$(k_1, k_2)\, S\, (n_1, n_2) \quad \text{právě, když } (k_1 + k_2) \text{ dělí } (n_1 + n_2).$$

(a) Ukažte, že S je uspořádání.

(b) Nakreslete Hasseův diagram relace S.

(c) Jaké jsou maximální a minimální prvky? Existuje největší nebo nejmenší prvek?

(30) Na množině $M = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=1}^{3} \{0,1\}^n$ všech 0-1 posloupností délky nejvýše 3 máme uspořádání $\preceq$ definované

$$s \preceq t \quad \text{právě, když posloupnost } s \text{ je počáteční úsek posloupnosti } t.$$

Nakreslete Hasseův diagram pro $\preceq$.

Řešení:

(1a) $R \circ S = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 1), (4, 3)\}$, $S \circ R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$.

(1b) $R^{-1} = \{(3, 1), (2, 2), (1, 3), (4, 3), (2, 4)\}$, $S^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (1, 4)\}$,
$(R \circ S)^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4)\}$ a
$(S \circ R)^{-1} = \{(2, 1), (1, 2), (4, 2), (2, 3), (3, 4)\}$.

(1c) $R^{-1} \circ S^{-1} = (S \circ R)^{-1}$, $S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1}$.

(2) $(k, m) \in R^2$ znamená, že $k = m^{m^{m+1}}$ a $(k, m) \in R^3$ dává $k = m^{m^{(m^{m+1}+m+1)}}$.

(3a) je pouze symetrická,

(3b) je reflexivní, symetrická a tranzitivní,

(3c) má všechny vlastnosti kromě antisymetrie,

(3d) je reflexivní a symetrická,

(3e) je pouze symetrická,

(3f) je pouze symetrická,

(3g) kromě reflexivity má všechny ostatní vlastnosti.

(4) Reflexivita je zřejmá. Symetrie: Je-li $k+2n$ dělitelné třemi, napíšeme $n+2k = 3(n+k)-(k+2n)$. Tranzitivita: Je-li $k+2n$ a $n+2m$ dělitelné třemi, napíšeme $k+2m = (k+2n)+(n+2m)-3n$. Relace má tři třídy ekvivalence.

(5a) pouze tranzitivní,

(5b) pouze symetrická,

(5c) reflexivní, symetrická a tranzitivní,

(5d) reflexivní a symetrická.

(6) (a) dva prvky (c,c) a (d,d); (b) tři prvky $(b,a),(c,a),(c,b)$; (c) žádný; (d) žádný.

(7) Žádnou.

(8) S je reflexivní a symetrická. Není antisymetrická, např. pro $s = 0100$ a $t = 1101$ platí $(s,t) \in S$ i $(t,s) \in S$, ale $s \neq t$. Není tranzitivní, např. pro $s = 0001$, $t = 0010$ a $u = 1110$ platí $(s,t) \in S$, $(t,u) \in S$, ale $(s,u) \notin S$.

(9) Symetrická relace R splňuje $R = R^{-1}$, antisymetrická $R \cap R^{-1} \subset I_A$. Spojením máme $R \subset I_A$. Má-li být R navíc reflexivní, musí být $R = I_A$.

(10) $\Leftarrow$: Protože relace $R \circ R^{-1}$ je vždy symetrická, z rovnosti $R = R \circ R^{-1}$ plyne, že R je symetrická. Tzn. $R = R^{-1}$ a opětné použití rovnosti dává $R^2 = R$, tj. tranzitivitu. $\Rightarrow$: Protože R je tranzitivní, platí $R^2 \subset R$. Navíc ze symetrie plyne $R = R^{-1}$, což dává dohromady $R \circ R^{-1} \subset R$. Zbývá ukázat obrácenou inkluzi. Mějme $(a,b) \in R$. Protože R je symetrická, je i $(b,a) \in R$. Užitím tranzitivity dostaneme, že $(a,a) \in R$. Spojením faktů $(a,a) \in R$ a $(a,b) \in R$ máme $(a,b) \in R \circ R = R \circ R^{-1}$. Tím je ověřena inkluze $R \subset R \circ R^{-1}$.

(11) R má za třídy ekvivalence svislé přímky a S přímky rovnoběžné s přímkou $y = -x$.

(12) $[x^4] = \{x^4 + ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

(13) Třídy jsou intervaly typu $\left\langle \frac{1}{3}k, \frac{1}{3}(k+1)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(14) $[\pi/4] = \{\pi/4 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3\pi/4 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(15) $[f] = \{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$.

(16) [0] je tvořena celočíselnými násobky nejmešího společného násobku čísel k_1, k_2.

(17) Jsou čtyři třídy: $[0] = \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $[1] = \{7k \pm 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $[2] = \{7k \pm 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $[3] = \{7k \pm 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dále se třídy opakují, $[4] = [3]$, $[5] = [2]$, $[6] = [1], \dots$.
V obecném případě je počet tříd $[p/2] + 1$ a mají tvar $[i] = \pm i + p\mathbb{Z}$, $i = 0, \dots, [p/2]$.

(18) Pro R: $[2] = \{\text{sudá čísla}\}$, $[3] = \{3, 3^2, 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 7, \dots\}$, $[5] = \{5, 5^2, 5 \cdot 7,\ 5 \cdot 11, \dots\}$.
Pro S: $[2] = \{2, 2^2, 2^3, \dots\}$, $[3] = \{3, 3 \cdot 2,\ 3^2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \dots\}$,
$[5] = \{5,\ 5 \cdot 2,\ 5 \cdot 3, 5^2,\ 5 \cdot 2 \cdot 3, \dots\}$.

(19) Tři třídy ekvivalence: $\big\{\{-1\}, \{-1, 0\}\big\}$, $\big\{\emptyset, \{0\}, \{-1, 1\}, \{-1, 0, 1\}\big\}$, $\big\{\{1\}, \{0, 1\}\big\}$.

(20) Dva body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou ekvivalentní, splňují-li $2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2$.

(21) Funkce f musí být konstantní na množinách A_i a pro různé indexy $i \neq j$ se hodnoty konstant musí lišit. Např. funkci f definujeme hodnotou i pro všechny prvky z množiny A_i.

(22) Relace je reflexivní a symetrická. Pokud jedna z množin X_i je alespoň dvouprvková, není S antisymetrická. Exisují-li dvě množiny X_i a X_j splňující současně

$$X_i \setminus X_j \neq \emptyset, \quad X_i \cap X_j \neq \emptyset \ \text{ a } \ X_j \setminus X_i \neq \emptyset,$$

není S tranzitivní: Stačí volit z každé ze tří množin jeden prvek. Prvky z první a druhé množiny jsou v relaci, prvky z druhé a třetí množiny jsou také v relaci, ale prvky z první a třetí množiny v relaci nejsou.

(23) Ekvivalence jsou dvě, jako na každé dvouprvkové množině.

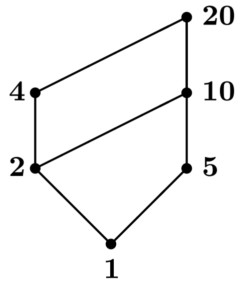
(24) Nejprve si všimneme, že pro reflexivní relaci R je tranzitivita ekvivalentní s $R^2 = R$, nikoli jen s inkluzí $R^2 \subset R$.
$\Rightarrow$: Je-li $R \circ S$ ekvivalence, pak je symetrická, tj. $R \circ S = (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R$.
$\Leftarrow$: Složení reflexivních relací je vždy reflexivní relace. Ověříme symetrii: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R = R \circ S$, kde jsme v posledním kroku užili komutativitu. Zbývá tranzitivita: $(R \circ S)^2 = R^2 \circ S^2$ opět díky komutativitě. Protože v našem případě $R^2 = R$ a $S^2 = S$, máme $(R \circ S)^2 = R \circ S$ a ověření tranzitivity je dokončené.

(25) Relace $\preceq$ je uspořádání, ale ne všechny dvojice jsou porovnatelné, např. $s = 0$ a $t = 10$.

(26) $0 \preceq_L 0001 \preceq_L 01 \preceq_L 010 \preceq_L 0101 \preceq_L 011 \preceq_L 11$.

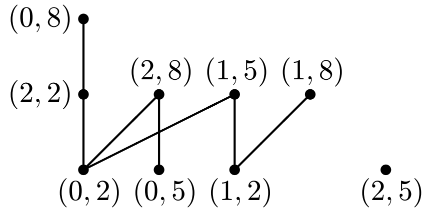
(27) Neexistuje největší ani nejmenší prvek. Maximální prvky: 27, 48, 60 a 72. Minimální prvky: 2 a 9.

(28)



(29a) Reflexivita a tranzitivita jsou zřejmé. Antisymetrii zaručuje fakt, že hodnoty součtů $k_1 + k_2$ jsou u všech bodů $(k_1, k_2) \in A$ navzájem různé.

(29b)



(29c) Maximální prvky: $(0, 8)$, $(2, 8)$, $(1, 5)$, $(1, 8)$ a $(2, 5)$. Minimální prvky: $(0, 2)$, $(0, 5)$, $(1, 2)$ a $(2, 5)$. Nejmenší ani největší prvek neexistují.

(30)