Základní pojmy teorie množin.

Množina je základní stavební kámen moderní matematiky, i když se v matematice tento pojem užívá velmi dlouho. Už antičtí řečtí geometři definovali kružnici jako množinu bodů mající pevnou vzdálenost od zadaného bodu. Množina je abstraktní pojem, není to objekt z reálného světa, je to produkt lidské mysli. Systematické zkoumání množin začalo až koncem 19. století prací německého matematika G. Cantora (Georg Cantor, 1845 - 1918, zakladatel teorie množin). Bez jeho teorie by většina matematiky 20. století vůbec nemohla vzniknout. Jeden z nejdůležitějších pojmů spojeným se jménem Georga Cantora je pojem mohutnosti množiny nebo přesněji mohutnosti *nekonečné* množiny. Díky rigorózní teorii nekonečných množin můžeme např. porovnávat různé nekonečné množiny co do velikosti. Také samotný pojem množiny se z intuitivní představy musel změnit na přesně definovaný matematický objekt.

Obecná představa množiny je jakýkoli soubor objektů, které se nazývají prvky množiny. Jak už bylo řečeno, existuje přesná matematická definice pojmu množina. My si ale na začátek vystačíme s intuitivní představou. V závěru kapitoly si ukážeme, že tato intuitivní představa má své omezení a že ne každý soubor objektů lze považovat za množinu.

Značení a operace.

Připomeneme si standardní a obvyklé značení.

$$\begin{aligned}
&\emptyset \ \text{ prázdná množina,}\\
&\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \ \text{ přirozená čísla,}\\
&\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \ \text{ celá čísla,}\\
&\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = m/n, \text{ kde } m \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N}\} \quad \text{racionální čísla,}\\
&\mathbb{R} = (-\infty, \infty) \ \text{ reálná čísla.}
\end{aligned}$$

Je-li A množina a V nějaká vlastnost, pak symbol $\{x \in A \mid x \text{ má vlastnost } V\}$ označuje množinu všech prvků z A, které mají vlastnost V.

Příklad 1. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ není dělitelné žádným přirozeným číslem}\} = \emptyset$. Prázdnou množinu můžeme jednodušeji zapsat i jako $\{x \in A \mid x \neq x\}$.

Jiný příklad je množina

$$P = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ je dělitelné právě dvěma z čísel } 1, 2, \dots, m\},$$

což je množina všech prvočísel.

Dále si připomeneme základní množinové vztahy a operace.

- $B \subset A$, inkluze. Čteme: B je podmnožina množiny A. Ověření inkluze spočívá v tom, že dokážeme o každém prvku z B, že náleží i do A. Vždy platí $A \subset A$ a $\emptyset \subset A$. Pokud chceme zdůraznit, že $B \subset A$, ale $B \neq A$, píšeme $B \subsetneqq A$ a řekneme, že B je vlastní podmnožina množiny A.

  Rovnost dvou množin $A = B$ je definována jako současné splnění dvou podmínek: $A \subset B$ a $B \subset A$, tj. prvek patří do množiny A právě, když patří do množiny B. Např. Množina $\{a\}$ je jednoprvková množina obsahující prvek a. Ale $\{a, a\}$ je ta samá množina: Stačí ověřit rovnost $\{a, a\} = \{a\}$ podle definice.

- $A_1 \cup A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ nebo } x \in A_2\}$, sjednocení množin A_1 a A_2. Pro sjednocení většího počtu množin užíváme značení analogické sumaci

$$\bigcup_{k=1}^{m} A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_m, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots .$$

  Např. $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} (-k, k) = \mathbb{R}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \langle 2^{-k}, k\rangle = (0, \infty).$

- $A_1 \cap A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ a } x \in A_2\}$, průnik množin A_1 a A_2. Pro průnik většího počtu množin užíváme podobně

$$\bigcap_{k=1}^{m} A_k = A_1 \cap \cdots \cap A_m, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots .$$

  Např. $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} (0, \tfrac{1}{k}) = \emptyset, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \langle 0, k^{-2}) = \{0\}.$

  Množiny A a B se nazývají disjunktní, jestliže $A \cap B = \emptyset$.

- $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$, množinový rozdíl.

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$, kartézský součin množin A a B. Pro součin více množin píšeme

$$\prod_{k=1}^{m} A_k = A_1 \times \cdots \times A_m, \quad \prod_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \times A_2 \times \dots .$$

  Jsou-li všechny množiny stejné, $A_1 = A_2 = \cdots = A$, pak součin budeme zkracovat symbolickým zápisem A^m v případě součinu m množin a $A^{\mathbb{N}}$ v případě nekonečného součinu. Jako příklady si uveďme

$$\langle 0, 1\rangle^2 = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle = \{(x, y) \mid x, y \in \langle 0, 1\rangle\},$$

  což je jednotkový čtverec v rovině. Podobně $\langle 0, 1\rangle^3$ je jednotková krychle a $\langle 0, 1\rangle^4$ je zápis čtyřrozměrné jednotkové krychle. Množina $\mathbb{R}^n$ je množina všech n-tic reálných čísel, tj. n-rozměrných vektorů, a nazývá se n-rozměrný euklidovský prostor. Dále,

$$\prod_{k=1}^{\infty} A_k = \big\{(a_1, a_2, \dots) \bigm| a_k \in A_k,\ k \geq 1\big\}$$

je množina všech posloupností takových, že na k-tém místě stojí prvek z množiny A_k. Specielně $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ je množina všech posloupností vytvořených z nul a jedniček. Podobně $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je množina všech posloupností přirozených čísel.

- Množinu všech podmnožin dané množiny A nazýváme potenční množinou množiny A a značíme
$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$
Je-li množina A n-prvková, pak $\mathcal{P}(A)$ má 2^n prvků.
Mějme $A = \{a\}$ a $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Co je $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(B)$?
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\ \{a\}\}, \quad \mathcal{P}(B) = \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}.$$

Příklad 2. Uvažujme následující tři množiny:
$$A = \big\{\{0\}, \{\{0\}\}\big\},\ B = \big\{\{\{0\}\}, \{0\}\big\} \ \text{ a } \ C = \big\{\{\{0\}\},\ \{0\},\ \{\{0\}\}\big\}.$$
Jsou všechny tři množiny navzájem různé? Který z následujících vztahů platí: $0 \in A$, $0 \subset A$, $\{0\} \in A$ nebo $\{0\} \subset A$?

Množiny A, B, C jsou totožné, neboť obsahují stejné prvky. Ze čtyř uvedených možností platí pouze $\{0\} \in A$.

Obrátíme pozornost k základním vztahům mezi množinovými operacemi.

Věta 3. *(de Morganova pravidla) Mějme množiny $B, A_1, A_2, \dots$. Pak platí*

(i) $B \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B \setminus A_k)$,

(ii) $B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (B \setminus A_k)$.

Důkaz. Ukážeme pouze první bod. Druhý je zcela stejný, jen se navzájem prohodí symboly $\cap$ a $\cup$.

Mějme $x \in B \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. To je ekvivalentní tomu, že $x \in B$ a $x \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Což je opět to samé jako, že existuje index k_0, že $x \in B$ a $x \notin A_{k_0}$, tj. existuje index k_0, že $x \in B \setminus A_{k_0}$. Jinými slovy, $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (B \setminus A_k)$. $\square$

Mohutnost množin.

Chceme nalézt způsob, jak porovnávat velikosti obecných množin. V případě konečných množin porovnáme počet jejich prvků. Pojem počet prvků je však zcela nevhodný pro srovnávání nekonečných množin.

Máme-li např. množiny $A = \mathbb{N}$ a $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kterou z nich prohlásíme za větší? Jeden argument by mohl být, že B obsahuje pouze sudá čísla, a proto je menší než A, neboť je to jen „polovina“ množiny A. Na druhou stranu, prvky množiny B jsou popsány tvarem $2n$, kde parametr n probíhá celou množinu A, a tak musí mít A i B stejný počet prvků. Na stejný problém bychom narazili např. i při porovnávání množin racionálních a iracionálních čísel: Základní vlastností obou množin je, že mezi každými dvěma racionálními čísly leží číslo iracionální a mezi každými dvěma iracionálními čísly leží racionální. Ze symetrie těchto vlastností bychom mohli usuzovat, že obě množiny jsou stejně velké. Jak uvidíme později, byl by to chybný závěr.

K porovnávání velikostí obecných množin použijeme speciální typ zobrazení nazvaný *bijekce*.

Definice 4. *Mějme zobrazení $f\colon A \longrightarrow B$. Řekneme, že*

(i) *f je prosté (injektivní), jestliže $f(a_1) \neq f(a_2)$, kdykoli $a_1, a_2 \in A$ a $a_1 \neq a_2$;*

(ii) *f je na množinu B (surjektivní), je-li obor hodnot roven množině B, $f(A) = B$;*

(iii) *f je bijekce, je-li prosté a na množinu B.*

Protože bijekce je specielně prosté zobrazení, existuje inverzní a platí, že $f\colon A \longrightarrow B$ je bijekce právě, když inverzní $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$ je rovněž bijekce.

Můžeme si představovat, že bijekce zprostředkovává kopírování jedné množiny na druhou. Existuje-li mezi množinami A a B bijekce, je jedna množina kopií druhé. Jsou-li navíc obě množiny konečné, mají stejný počet prvků. Výhodou takového porovnání je, že nemusíme vědět kolik mají příslušné množiny prvků, abychom je prohlásili za stejně velké. Proto se tento způsob hodí i pro porovnávání velikostí obecných množin, nejen konečných.

Definice 5. *Množiny A a B mají stejnou mohutnost, existuje-li bijekce $f\colon A \longrightarrow B$ množiny A na množinu B. Zápis je $|A| = |B|$.*

Existuje-li bijekce množiny A na nějakou podmnožinu $C \subset B$, $f\colon A \longrightarrow C$, pak budeme tento fakt značit $|A| \leq |B|$.

Místo názvu mohutnost se také často používá slovo *kardinalita.* V případě konečné množiny označuje symbol $|A|$ skutečně počet prvků množiny A. Pro nekonečné množiny to je zatím jen značka, kterou můžeme číst „mohutnost množiny“. Později se o ní dovíme více.

Nastane-li případ, že $|A| \leq |B|$ a přitom neplatí $|A| = |B|$, budeme psát $|A| < |B|$. Slovy to znamená, že sice existuje bijekce množiny A na nějakou podmnožinu množiny B, ale neexistuje žádná bijekce množiny A na *celou* B.

Příklad 6. Množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ mají stejnou mohutnost. Důvodem je existence bijekce $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow (\mathbb{N} \setminus \{1\})$ daná $f(n) = n + 1$.

Podobný argument říká, že $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, k\}$ mají stejnou mohutnost. Zde je bijekce $f(n) = n + k$. Odebereme-li od $\mathbb{N}$ jakoukoli konečnou množinu, mohutnost se nezmění.

Bijekce $f(n) = 2n$ množiny $\mathbb{N}$ na množinu sudých přirozených čísel ukazuje, že mají stejnou mnohutnost, $|\mathbb{N}| = |\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}|$.

Všechny neprázdné otevřené intervaly $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mají navzájem stejnou mohutnost: K tomu stačí ukázat, že $|(a, b)| = |(0, 1)|$ pro každý interval (a, b). Za bijekci nám poslouží např. lineární funkce

$$f(x) = (b - a)x + a.$$

Je to rostoucí funkce (a tedy prostá) a zobrazí interval $(0, 1)$ na interval (a, b). Platí dokonce i více. Funkce $\mathrm{tg}(x)$ je bijekce intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ na $\mathbb{R}$, proto $|(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)| = |\mathbb{R}|$. Spolu s předchozím máme

$$|(0, 1)| = |(a, b)| = |\mathbb{R}|.$$

Následující důležité tvrzení, tzv. Schröder-Bernsteinova věta, nám umožňuje ukázat, že dvě množiny mají stejnou mohutnost, aniž bychom museli explicitně sestrojit příslušnou bijekci.

Věta 7. *Mějme množiny A a B takové, že existuje prosté zobrazení množiny A do množiny B a také prosté zobrazení množiny B do množiny A. Pak A a B mají stejnou mohutnost.*

Důkaz. Označme si příslušná prostá zobrazení jako $f\colon A \longrightarrow B$ a $g\colon B \longrightarrow A$. Protože $g(B)$ je kopie množiny B a $g(B) \subset A$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $B \subset A$. Položíme $C = A \setminus B$ a vytvoříme množiny

$$C,\ f(C),\ f^2(C) \dots, f^n(C), \dots$$

Zde f^n označuje n-násobné složení zobrazení f, $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^{n\text{-krát}}$. Definujme zobrazení $h\colon A \longrightarrow B$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(C) \\ x & \text{pro } x \in A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(C) \end{cases}$$

Zbývá ukázat, že h je bijekce A na B.

Ověříme nejprve, že h je prosté zobrazení. Mějme dva různé prvky $a, a' \in A$ a dokážeme, že $h(a) \neq h(a')$. Jsou-li $a, a' \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(C)$, je $h(a) = f(a)$ a $h(a') = f(a')$. Protože f je prosté, dostáváme $h(a) \neq h(a')$. Podobně je to s případem, kdy ani a ani a' není ve sjednocení $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(C)$, tam přímo $h(a) = a$ a $h(a') = a'$. Poslední možnost nastává, když $a \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(C)$, ale a' nikoli. Pak $h(a) = f(a)$ a $h(a') = a'$. Protože $a \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(C)$, existuje n, že $a \in f^n(C)$. Tím ale $f(a) \in f^{n+1}(C) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(C)$. Jelikož a' neleží v tomto sjednocení, nemůže se rovnat prvku $h(a)$.

Nyní ověříme, že $h(A) = B$. Zvolíme si libovolné $b \in B$. Leží-li b mimo sjednocení $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(C)$, pak jeho vzor je samo b, $h(b) = b$. Je-li naopak b prvkem sjednocení $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(C)$, nejprve si všimneme, že nemůže náležet do první množiny ve sjednocení, neboť $f^0(C) = C = A \setminus B$. Musí proto existovat index $n \geq 1$, že $b \in f^n(C)$. To ale znamená, že $b = f(a)$ pro nějaké $a \in f^{n-1}(C)$.

Tím je důkaz dokončen. $\square$

V označení, které jsme si zavedli v Definici 5, je formulace Věty 7 přirozená: Je-li $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |A|$, pak $|A| = |B|$. Jako ilustraci Schröder-Bernsteinovy věty uvedeme následující příklad.

Příklad 8. Jednotkový interval $(0,1)$ a jednotkový čtverec $(0,1)^2$ mají stejnou mohutnost.

Sestrojíme dvě prostá zobrazení $f\colon (0,1) \longrightarrow (0,1)^2$ a $g\colon (0,1)^2 \longrightarrow (0,1)$. První je jednoduché, např.

$$f(x) = (x, \tfrac{1}{2}), \quad (\text{nebo } f(x) = (x,x), \dots).$$

Druhé je o něco složitější. Každé číslo $x \in (0,1)$ zapíšeme v jeho desetinném rozvoji

$$x = 0.\, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots,$$

kde x_n jsou číslice $0, 1, \dots, 9$. Pokud by rozvoj byl konečný, doplníme ho nulami. Rovněž vylučujeme takové nekonečné zápisy, které mají od jistého desetiného místa samé 9. (To je z důvodu jednoznačnosti vyjádření, neboť např. $0.279999\cdots = 0.28$.) Bodu ve čtverci o souřadnicích

$$(x,y) = (0.\,x_1x_2x_3\dots,\ 0.\,y_1y_2y_3\dots)$$

přiřadíme číslo

$$g(x,y) = 0.x_1y_1x_2y_2\dots$$

Toto přiřazení je prosté zobrazení čtverce $(0,1)^2$ do intervalu $(0,1)$. (Není na celý interval neboť např. na číslo 0.898989.... se nezobrazí žádný bod čtverce.) Podle Věty 7 existuje bijekce intervalu $(0,1)$ na $(0,1)^2$, tedy obě množiny mají stejnou mohutnost.

Abychom mohli korektně pracovat s nekonečnými množinami, potřebujeme si vyjasnit, co znamená, že množina je nekonečná. Návrhy pro definici nekonečné množiny typu, že má nekonečně mnoho prvků nic neřeší, neboť jsme jeden nevyjasněný pojem pouze nahradili jiným pojmem stejně vágním. Musíme najít vlastnost, která jasně odlišuje konečné a nekonečné množiny. U konečných množin je zřejmé, že jejich vlastní podmnožiny mají méně prvků než celá množina. V řeči bijekce to znamená, že neexistuje bijekce celé množiny na svoji vlastní podmnožinu. Negací této vlastnosti dostaneme to, co charakterizuje množiny nekonečné.

Definice 9. *Množina A je nekonečná, jestliže existuje bijekce na její vlastní podmnožinu.*

Je na místě ověřit, že pojem nekonečná množina zavedený v definici opravdu koresponduje s tím, co za nekonečné množiny obvykle považujeme. Množina $\mathbb{N}$ je podle výše uvedené definice nekonečná, neboť např. zobrazení $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dané $f(n) = n+1$ je bijekce celé množiny $\mathbb{N}$ na vlastní podmnožinu $\{2,3,\dots\}$. Rovněž bijekce $f(n) = 2n$ přirozených čísel na množinu sudých čísel opět ukazuje, že množina $\mathbb{N}$ je nekonečná. Stejně tak každý neprázdný interval $(a,b) \subset \mathbb{R}$ splňuje požadavky kladené na nekonečnou množinu: Pro jakýkoli jeho neprázdný podinterval $(c,d) \subsetneqq (a,b)$ platí, že $|(c,d)| = |(a,b)|$, tj. existuje bijekce (a,b) na (c,d).

Spočetné množiny.

Množina $\mathbb{N}$ přirozeých čísel má v teorii množin privilegované postavení. Proto její více či méně skryté kopie si zaslouží vlastní pojmenování.

Definice 10. *Množina A se nazývá spočetná, má-li stejnou mohutnost jako množina přirozených čísel, $|A| = |\mathbb{N}|$.*

Výše vedené příklady ukazují, že $\{2,3,\dots\}$ i množina sudých čísel jsou spočetné. Následující věta obsahuje prostředek výhodný pro dokazování spočetnosti.

Věta 11. *Množina A je spočetná právě, když se všechny její prvky dají seřadit do prosté posloupnosti. Specielně, nekonečná podmnožina spočetné množiny je rovněž spočetná.*

Důkaz. Tvrzení je ve tvaru ekvivalence, proto je třeba ověřit dvě implikace. V té první předpokládáme, že množina A je spočetná. To znamená, že existuje bijekce $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$, která nám tak umožní vytvořit posloupnost

$$f(1)\,, f(2)\,, f(3), \dots$$

prvků z A. Tato posloupnost obsahuje všechny prvky množiny A a navíc je prostá, neboť f je prosté zobrazení.

Pro druhou implikaci předpokládáme, že množinu A lze uspořádat do prosté posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \dots$ Budeme definovat zobrazení $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ následovně

$$\begin{aligned} f(1) &= a_1, \\ f(2) &= a_2, \\ &\vdots \\ f(n) &= a_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Protože posloupnost je prostá, je i zobrazení f prosté. Protože v posloupnosti jsou obsaženy všechny prvky množiny A je obor hodnot f celá množina A. Jinými slovy, f je bijekce přirozených čísel na množinu A, a tedy A je spočetná.

Pro dodatečné tvrzení si stačí seřadit danou spočetnou množinu do posloupnosti a její nekonečná podmnožina se stane vybranou podposloupností. $\square$

Věta 12. *Je-li $f\colon A \longrightarrow B$ zobrazení spočetné množiny A na množinu B, pak je B konečná nebo spočetná.*

Důkaz. Předpokládejme, že B není konečná. Ze vzoru $f^{-1}(b)$ každého bodu $b \in B$ vezmeme jeden prvek. Ty vytvoří nekonečnou podmnožinu $A_0 \subset A$. Protože A je spočetná, je podle Věty 11 množina A_0 rovněž spočetná. Na ní je zobrazení f prosté, tj. f je bijekce množiny A_0 na množinu B. $\square$

Následující věta říká, že spočetné množiny jsou nekonečné množiny s nejmenší mohutností.

Věta 13. *Každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu.*

Důkaz. Mějme nekonečnou množinu A a volme si $a_1 \in A$ libovolně. Protože A je nekonečná, je množina $A \setminus \{a_1\}$ neprázdná. Zvolíme si v ní prvek $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Rovněž množina $A \setminus \{a_1, a_2\}$ je neprázdná, a tedy obsahuje nějaký prvek $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$. Tak pokračujeme dále a prvek a_n volíme z množiny

$$a_n \in A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}.$$

Protože v každém kroku od nekonečné množiny A odebíráme pouze konečně mnoho prvků, může tento jednoduchý výběrový algoritmus stále pokračovat. Tím vygeneruje nekonečnou prostou posloupnost. Označíme-li si ji jako $B = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, pak její členy tvoří podle Věty 11 spočetnou podmnožinu množiny A. $\square$

V této chvíli je na místě otázka, zda existují také množiny, které jsou větší než spočetné. Podíváme se množiny, které vypadají na pohled větší než množina $\mathbb{N}$.

Příklad 14. Množina $\mathbb{Z}$ celých čísel. Tuto množinu můžeme seřadit do prosté posloupnosti např. následujícím způsobem:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\dots$$

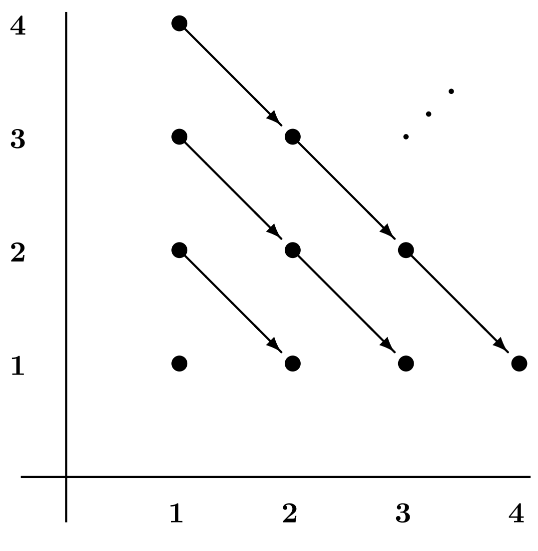
Podle Věty 11 je množina $\mathbb{Z}$ spočetná. Kdybychom chtěli najít vzorec pro odpovídající bijekci množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{Z}$, tak má tvar

$$f(n) = (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right],$$

kde $[x]$ značí celou část (reálného) čísla x. Můžeme si pro zajímavost uvést i vztah pro inverzní zobrazení

$$f^{-1}\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m, & m > 0; \\ -2m+1, & m \le 0. \end{cases}$$

Příklad 15. Množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je rovněž spočetná, neboť ji můžeme vypsat do prosté posloupnosti podle pravidla naznačeného na obrázku.



Tzn. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \big\{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (3,1),\cdots\big\}$.

Kromě kritéria z Věty 11 můžeme dokázat spočetnost množiny $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ i aplikací Věty 7. K tomu stačí nalézt dvě prostá zobrazení $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ a $g\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Příkladem takových zobrazení mohou být

$$f(n) = (n,n) \quad \text{a} \quad g(m,n) = 2^m 3^n.$$

Zobrazení f je zřejmě prosté. Abychom ověřili, že i g je prosté, musíme ho trochu prozkoumat. Předpokládejme, že ve dvou bodech (m, n) a (m', n') má g stejnou hodnotu, $g(m, n) = g(m', n')$. Tj.

$$2^m 3^n = 2^{m'} 3^{n'}.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $m \leq m'$. Rovnici vydělíme číslem 2^m:

$$3^n = 2^{m'-m}\, 3^{n'}.$$

Na levé straně je liché číslo, proto musí být i na pravé, což znamená, že $m' - m = 0$. V tom případě už nezbývá než, že i $n = n'$. Tím jsme ověřili prostotu zobrazení g.

Nakonec lze uvést i přímou formuli pro bijekci $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$f(k, n) = 2^{k-1}(2n - 1).$$

Ověření, že f je bijekce necháme na (zvídavém?) čtenáři.

Předchozí příklad nás inspiruje k odhadu, že by spočetné množiny mohly být stabilní vzhedem k operacím kartézský součin a sjednocení. Množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je kartézský součin spočetných množin. Kromě toho si ji můžeme představit jako sjednocení vodorovných řezů,

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{N} &= \{(1,1), (2,1), (3,1), \dots\} \cup \{(1,2), (2,2), (3,2), \dots\} \cup \cdots \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(n, k) \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Každý vodorovný řez $\{(n, k) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je kopie množiny $\mathbb{N}$. Sjednocení spočetně mnoha těchto řezů zůstává opět spočetnou množinou. Následující věta ukazuje, že náš odhad je správný.

Věta 16. *Mějme spočetné množiny $A_1, A_2, \dots$. Pak*

(i) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ *je opět spočetná množina.*

(ii) *Kartézský součin $\prod_{k=1}^{n} A_k$ je spočetná množina pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. (i) Prvky každé ze spočetných množin $A_1, A_2, \dots$ seřadíme do prosté posloupnosti

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, \dots\}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, \dots\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Definujeme zobrazení $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ předpisem

$$f(m, n) = a_{mn}.$$

To je zobrazení množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na celou množinu $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Protože už víme, že $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná, můžeme aplikovat Větu 12. Ta říká, že obor hodnot zobrazení f je buď konečná nebo spočetná množina. Protože $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ není konečná množina, musí být spočetná.

(ii) Důkaz provedeme matematickou indukcí.

Krok 1. Tvrzení je zřejmé pro $n = 1$.

Krok 2. Předpokládáme, že součin n množin $\prod_{k=1}^{n} A_k$ je spočetný. Chceme ukázat, že i součin $(n+1)$ množin zůstane spočetný.

$$\prod_{k=1}^{n+1} A_k = \Big(\prod_{k=1}^{n} A_k\Big) \times A_{n+1}.$$

Označíme si $B = \prod_{k=1}^{n} A_k$. Nyní

$$\prod_{k=1}^{n+1} A_k = B \times A_{n+1}.$$

Protože víme, že B a A_{n+1} jsou spočetné množiny, lze si podle Věty 11 vypsat prvky obou množin do posloupností, $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, $A_{n+1} = \{a_1, a_2, \dots\}$.

Definujeme zobrazení $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow B \times A_{n+1}$

$$f(m,n) = (b_m, a_n).$$

Opět použijeme Větu 12 a dostáváme, že obor hodnot zobrazení f spočetná množina. Tím je důkaz ukončen. $\square$

Přímá aplikace Věty 16(i) o spočetném sjednocení spočetných množin ukazuje, že množina $\mathbb{Q}$ racionálních čísel je spočetná. Pišme

$$\mathbb{Q} = \Big\{ \frac{m}{n} \;\Big|\; m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \Big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

kde A_n je množina všech zlomků se jmenovatelem n, tj.

$$A_n = \Big\{ \dots, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \Big\}.$$

Protože množiny A_n jsou spočetné (mají stejnou mohutnost jako $\mathbb{Z}$), je množina $\mathbb{Q}$ spočetná.

Důsledek Věty 16(i) je následující pozorování: Mějme spočetné množiny $A_1, A_2, \dots$ a jejich konečné podmnožiny $K_1 \subset A_1, K_2 \subset A_2, \dots$. Pak zřejmě

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Odtud plyne, že sjednocení $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ je buď konečná množina nebo, je-li nekonečná, pak je opět jen spočetná.

Jiným důsledkem Věty 16 je tvrzení o počtu konečných podmnožin spočetné množiny.

Věta 17. *Konečných podmnožin spočetné množiny A je spočetně mnoho.*

Důkaz. Označme si

$$B = A \cup A^2 \cup A^3 \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A^k,$$

což je množina všech uspořádanch k-tic, $k \in \mathbb{N}$, vytvořených prvky z A. Z Věty 16 víme, že všechnyA^k jsou spočetné množiny a rovněž víme, že jejich sjednocení, tj. B, je spočetná množina. Uvažujme zobrazení f z B do množiny všech konečných podmnožin množiny A, které uspořádané k-tici přiřadí k-prvkovou podmnožinu skládající se z prvků této k-tice:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Je to zobrazení ze spočetné množiny na množinu všech konečných podmnožin množiny A. Podle Věty 12 je obor hodnot zobrazení f buď konečná nebo spočetná množina. Obor hodnot nemůže být konečná množina, neboť už jen jednoprvkových podmnožin je nekonečně mnoho. Proto obor hodnot je množina spočetná. □

Příklad 18. Představme si, že zajíc se pohybuje po bodech množiny $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ identickými skoky, které uskutečňuje každou minutu. Neznáme ani typ těchto skoků ani místo odkud v čase $T = 0$ své skákání začal. Máme ale povoleno na konci každé hodiny položit do libovolného bodu množiny $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ past. Skočí-li zajíc do bodu, kde je umístěna past, je chycen. Existuje strategie, jak pokládat pasti, abychom nakonec zajíce chytili?

Označíme (a, b) polohu zajíce v čase $T = 0$ a vektor (u, v) bude směrový vektor skoku, tj. zajíc skočí z bodu (a, b) do bodu $(a+u, b+v)$, pak do bodu $(a+2u, b+2v)$ atd. Množina všech množných výběrů čtveřic (a, b, u, v), které určují pohyb zajíce je $\mathbb{Z}^4$, tedy spočetná množina podle Věty 16(ii). Její prvky můžeme seřadit do posloupnosti

$$(a_1, b_1, u_1, v_1), (a_2, b_2, u_2, v_2), \ldots.$$

Pasti pokládáme tak, že na konci i-té hodiny dáme past do bodu

$$(a_i + (60i + 1)u_i, b_i + (60i + 1)v_i).$$

Je-li (a_i, b_i, u_i, v_i) čtveřice určující pohyb zajíce, pak na konci i-té hodiny bude zajíc v bodě $(a_i + 60i\, u_i,\ b_i + 60i\, v_i)$. Následujícím skokem skočí do bodu, kam jsme položili past.

Nespočetné množiny.

Zatím to vypadá, že každá nekonečná množina, kterou jsme až dosud zkoumali, je spočetná. Jsou snad všechny nekonečné množiny spočetné? Pokud by tomu tak bylo, tento text by končil předcházející sekcí. Velkým objevem Georga Cantora je, že nespočetné množiny opravdu existují. Tento objev byl mohutným impulsem pro rozvoj teorie množin, pro její hloubku a rozmanitost.

Věta 19. *Množina reálných čísel v intervalu* $(0, 1)$ *není spočetná.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že množina $(0,1)$ spočetná je. Podle Věty 11 je možné všechna čísla z $(0,1)$ vypsat jako členy prosté posloupnosti. Pišme si členy této posloupnosti pod sebe:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.\, a_{11}\, a_{21}\, a_{31} \cdots, \\ x_2 &= 0.\, a_{12}\, a_{22}\, a_{32} \cdots, \\ x_3 &= 0.\, a_{13}\, a_{23}\, a_{33} \cdots, \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

kde $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ označují číslice v desítkovém rozvoji. Můžeme předpokládat, že rozvoj je nekonečný, neboť ho lze vždy doplnit nulami. Z důvodu jednoznačnosti rovněž vylučujeme zápisy mající od jistého místa samé 9.

Vytvoříme číslo $y \in (0,1)$, jehož desetiný rozvoj $y = 0.\, y_1 y_2 y_3 \cdots$ splňuje následující požadavky:

$$y_k = \begin{cases} 2 & \text{je-li } a_{kk} = 1, \\ 1 & \text{je-li } a_{kk} \neq 1. \end{cases}$$

Číslo y není rovno žádnému z čísel $x_1, x_2, \ldots$, neboť se od x_1 liší na prvním desetiném místě, od x_2 na druhém desetiném místě a obecně od x_k na k-tém desetiném místě. To je spor s předpokladem, že výše napsaná posloupnost obsahuje všechna čísla v $(0,1)$. □

Mohutnost intervalu $(0,1)$ není rovna mohutnosti $\mathbb{N}$. Protože spočetné množiny jsou nekonečné množiny s nejmenší mohutností, musí být mohutnost $(0,1)$ ostře větší než mohutnost $\mathbb{N}$, $|\mathbb{N}| < |(0,1)|$. Velmi volně řečeno, nekonečno reprezentované množinou $(0,1)$ je neporovnatelně větší než nekonečno reprezentované množinou $\mathbb{N}$. Nekonečné množiny, které nejsou spočetné budeme nazývat *nespočetné*. Protože $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$, je i množina reálných čísel nespočetná. Navíc,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),$$

kde $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel, která je spočetná. Proto množina iracionálních čísel $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ musí být nespočetná: V opačném případě by totiž $\mathbb{R}$ bylo sjednocení dvou spočetných množin, a tedy spočetná množina.

Z Věty 13 víme, že spočetné množiny jsou nekonečné množiny s nejmenší mohutností. Tato vlastnost se projevuje i v jiném aspektu než jen v porovnání mnohutností.

Příklad 20. Ukážeme, že žádný spočetný system přímek nepokryje celou rovinu $\mathbb{R}^2$.

Mějme spočetný system $\mathcal{L}$ přímek v rovině. Podle Věty 11 si přímky v $\mathcal{L}$ můžeme vypsat do prosté posloupnosti

$$\mathcal{L} = \{l_1, l_2, \ldots\}.$$

Označíme si $\alpha_i \in \langle 0, \pi)$ úhel, který svírá přímka l_i s vodorovným směrem. Protože množina $\langle 0, \pi)$ je nespočetná, existuje úhel $\alpha \in \langle 0, \pi)$ různý od všech úhlů α_i, $i \in \mathbb{N}$. Uvažujme nyní přímku l svírající s vodorovným směrem úhel α. Žádná z přímek v $\mathcal{L}$ není rovnoběžná s l, proto protínají přímku l v právě jednom bodě. Bodů na přímce l je nespočetně, ale přímek v $\mathcal{L}$ jen spočetně mnoho. Nemohou proto pokrýt všechny body na přímce l. Tento argument ukazuje nejen, že žádný spočetný system přímek nepokryje $\mathbb{R}^2$, ale navíc že množina nepokrytých bodů je nespočetná.

Vraťme se ještě na okamžik k důkazu Věty 19. Hlavní nápad celého argumentu, tzv. diagonální metoda, ještě lépe vynikne v následujícím tvrzení.

Věta 21. *Množina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ všech podmnožin přirozených čísel není spočetná.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je spočetná. Podle Věty 11 je možné všechny prvky množiny vypsat do posloupnosti

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A_1, A_2, \dots, \}.$$

Nyní utvoříme speciální podmnožinu S přirozených čísel tak, že budeme procházet postupně čísla $1, 2, 3, \dots$ a u každého z nich se rozhodneme, zda-li ho dáme do množiny S nebo nikoli. Rozhodování se řídí podle následujícího algoritmu:

Pokud $1 \notin A_1$, dáme číslo 1 do množiny S. Jinak posloupíme k číslu 2.
Pokud $2 \notin A_2$, dáme číslo 2 do množiny S. Jinak posloupíme k číslu 3.
Pokud $3 \notin A_3$, dáme číslo 3 do množiny S. Jinak posloupíme k číslu 4.
$\vdots$

Zápis množiny S je tedy $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\}$.

Protože v seznamu $\{A_1, A_2, \dots, \}$ jsou zapsány všechny podmnožiny množiny $\mathbb{N}$, je tam někde i množina S, tj. existuje index m, že $S = A_m$. Potíže nastanou, když budeme chtít zjistit, zda množina S obsahuje číslo m či nikoliv.

Kdyby $m \in S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\}$, tak $m \notin A_m = S$. - spor.
Kdyby $m \notin S = A_m$, tak $m \in S$. - spor.

Jiná možnost už není, takže samotná existence množiny S vede ke sporu. Protože existence S vyplývala z možnosti zapsat množinu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ do posloupnosti, není možné $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ takto vyjádřit, a tedy $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ není spočetná. $\square$

Tvrzení Věty 21 lze krátce zapsat ve tvaru $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Z této věty také vyplývá, že nekonečných podmnožin přirozených čísel je nespočetně mnoho. Zjistili jsme totiž ve Větě 17, že konečných podmnožin přirozených čísel je spočetně mnoho. Protože

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\text{konečné podmnožiny}\} \cup \{\text{nekonečné podmnožiny}\},$$

a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je nespočetná, musí být systém nekonečných podmnožin také nepočetný. Tento výsledek můžeme ještě zesílit: System nekonečných podmnožin, které mají konečný doplněk, má stejnou mohutnost jako system konečných podmnožin, tj. je spočetný. (Každé takové podmnožině přiřadíme její doplněk a dostaneme bijekci na system všech konečných podmnožin.) Podobně jako výše můžeme psát

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{&\text{konečné podmnožiny}\} \cup \{\text{nekonečné podmnožiny s konečným doplňkem}\}\\ &\cup \{\text{nekonečné podmnožiny s nekonečným doplňkem}\}.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že i nekonečných podmnožin s nekonečným doplňkem je nespočetně.

Víme, že množiny $(0, 1)$ a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jsou nespočetné, ale nemáme žádnou relaci mezi jejich mohutnostmi. To, i něco navíc, odhalí následující věta.

Věta 22. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |(0,1)|$.

Důkaz. Ukážeme první rovnost. Množina $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jsou všechny nekonečné 0-1 posloupnosti. Sestrojíme bijekci

$$f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

následovně. Chceme každé podmnožině A přirozených čísel přiřadit nějakým vhodným způsobem posloupnost $(a_n^A) = (a_1^A, a_2^A \dots)$ vytvořenou z nul a jedniček: Pro množinu $A \subset \mathbb{N}$ definujeme posloupnost (a_n^A)

$$a_n^A = \begin{cases} 1 & n \in A; \\ 0 & n \notin A. \end{cases}$$

Položíme $f(A) = (a_n^A)$. Např.

$$f(\emptyset) = (0,0,\dots),\ f(\mathbb{N}) = (1,1,\dots) \text{ nebo } f(\{\text{lichá čísla}\}) = (1,0,1,0,\dots).$$

Takto definované zobrazení f je prosté a obor hodnot jsou všechny posloupnosti nul a jedniček. Je to bijekce množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, a tedy $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

Zbývá ukázat druhou rovnost. K tomu užijeme Větu 7, která říká, že stačí nalezt dvě prostá zobrazení $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow (0,1)$ a $g\colon (0,1) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Pro 0-1 posloupnost $(a_1, a_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definujeme

$$f(a_1, a_2, \dots) = 0.5 + 0.a_1a_2\dots,$$

kde druhý sčítanec je reálné číslo s desetiným rozvojem daným posloupností $(a_1, a_2, \dots)$. První sčítanec zaručuje, že obraz nulové posloupnosti bude v intervalu $(0,1)$. Zobrazení f je prosté (ale není to bijekce).

Mějme nyní reálné číslo $x \in (0,1)$ a napišme si ho v dvojkovém rozvoji,

$$x = 0.a_1a_2\dots,$$

kde posloupnost $(a_1, a_2 \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. (Opět rozvoj doplňujeme na konci nulami, je-li třeba a vylučujeme zápisy mající od jistého místa samé jedničky.) Zobrazení g je dáno

$$g(0.a_1a_2\dots) = (a_1, a_2, \dots).$$

I g je prosté (opět to není bijekce) a podle Věty 7 platí $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |(0,1)|$. □

Na závěr dokážeme slavnou Cantorovu větu o mohutnostech. Tato věta říká, že ke každé množině A existuje jiná množina, která má mohutnost větší než A.

Věta 23. *Pro každou množinu A platí, že $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Důkaz. Vždy platí $|A| \le |\mathcal{P}(A)|$, neboť např. zobrazení $f\colon A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ dané $f(a) = \{a\}$ je bijekce A na podmnožinu potenční množiny. Stačí nám proto dokázat, že $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

Předpokládejme, že $|A| = |\mathcal{P}(A)|$. Existuje tedy bijekce

$$f\colon A \longrightarrow \mathcal{P}(A),$$

která každému prvku $a \in A$ přiřadí nějakou podmnožinu $f(a)$ množiny A, $f(a) \subset A$. Může se stát, že prvek a leží ve své přiřazené podmnožině, $a \in f(a)$, nebo se může stát, že a ve své přiřazené množině neleží, $a \notin f(a)$. Uvažujme množinu S těch prvků a, pro které nastává druhá možnost,

$$S = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

Protože zobrazení f je bijekce, obor hodnot jsou všechny podmnožiny množiny A. Existuje tedy speciální prvek $a_0 \in A$ takový, že $f(a_0) = S$. Hledaný spor nastane, budeme-li se pokoušet zjistit, zda a_0 leží či neleží v množině S.

Kdyby $a_0 \in S = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$, tak $a_0 \notin f(a_0) = S$. - spor.
Kdyby $a_0 \notin S = f(a_0)$, tak $a_0 \in S$. - spor.

Jiná možnost už není, takže samotná existence množiny S vede ke sporu. Protože existence S vyplývala z předpokladu $|A| = |\mathcal{P}(A)|$, tato rovnost neplatí. $\square$

Pro konečné množiny je tvrzení Cantorovy věty pro nás již známá věc: Je-li $|A| = n$, pak $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. Pro nekonečné množiny dostáváme z Cantorovy věty existenci neomezené hierarchie mohutností množin,

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \cdots$$

Uvedeme si ještě jeden důsledek Cantorovy věty, kterým je často zmiňované tvrzení, že množina všech množin je nesmyslný pojem vedoucí ke sporu. Používá se jako argument k tomu, že ne každý soubor objektů je množina; např. právě soubor všech množin nemůže být množinou.

Uvažujme $A = \{B \mid B \text{ je množina}\}$, což je soubor všech množin. Kdyby i A byla množina, můžeme aplikovat Cantorovu větu a dostaneme, že $|\mathcal{P}(A)| > |A|$. Na druhou stranu, každý prvek $\mathcal{P}(A)$ je podmnožina A, specielně je to *množina*, a tedy patří do A. Patří-li každý prvek z $\mathcal{P}(A)$ do A, je $\mathcal{P}(A) \subset A$. Pak ale $\mathcal{P}(A)$ nemůže mít větší mohutnost než A.

Jiný argument pro to, že soubor všech množin není množina, může být i takový, že množina všech množin by měla největší možnou mohutnost. To podle Cantorovy věty nemůže nastat.

Mnohem známější je argument nazývaný „Russellův paradox“, který nepotřebuje Cantorovu větu. Uvažujme soubor M obsahující všechny množiny A s vlastností $A \notin A$,

$$M = \{A \mid A \text{ je množina a } A \notin A\}.$$

Je snadné uvést příklady množin A, které nejsou svým prvkem, např. $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$ nebo $\emptyset \notin \emptyset$ atd. Spíše je nejasné, jaká množina by tuto vlastnost neměla, ale to není pro nás vůbec důležité. Předpokládejme, že soubor M je také množina. Definice říká, že $A \in M$ právě, když $A \notin A$. Aplikujeme-li to na $A = M$, dostaneme, že $M \in M$ právě, když $M \notin M$. Tento spor znamená, že náš předpoklad je chybný a soubor M není množina.

Jaké si můžeme vzít poučení z Russellova paradoxu? Soubor M byl definován vlastností, kterou mají mít jeho prvky. Vidíme, že existují vlastnosti, které nedefinují množinu, tj. soubor objektů, které tuto vlastnost mají, netvoří množinu. Jsme tak vedeni k úloze charakterizovat vlastnosti, které naopak množiny definují. Bohužel, není znám způsob jak toho dosáhnout a dokonce některé výsledky matematické logiky (tzv. Věty o neúplnosti Kurta Gödela) naznačují, že úplná odpověď nemusí existovat.

Místo toho jsme formulovali jednoduché vlastnosti množin užívané v matematice, tzv. axiomy. Z nich se logicky korektním způsobem odvozují další a složitější vlastnosti. Zkušenost ukazuje, že všechny pojmy současné matematiky mohou být definovány a jejich vlastnosti odvozeny v tomto axiomatickém systému. Můžeme tak říci, že axiomatická teorie množin tvoří postačující základ pro ostatní odvětví matematiky.

Cvičení.

(1) Pomocí Vennova diagramu ověřte, že pro množiny A, B jsou následující podmínky ekvivalentní:

(a) $B \subset A$;
(b) $B \setminus A = \emptyset$;
(c) $A \cup B = A$;
(d) $A \cap B = B$.

(2) Mějme dána čísla $i, j, k \in \mathbb{Z}$. Platí $A = B$ pro množiny

$$A = \{i + nk \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ a } B = \{i + (n + j)k \mid n \in \mathbb{Z}\}?$$

(3) Uvažujme podmnožiny množiny X a definujme pro ně operaci $A|B := X \setminus (A \cap B)$. Vyjádřete operace $\cap$, $\cup$ a $\setminus$ pomocí operace $|$.

(4) Dokažte, že pro každé dvě množiny A a B platí

(a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$, zde ale rovnost obecně neplatí.

(5) Pro množinu $A = \big\{\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{1, 2\}\big\}$ rozhodněte, zda platí

(a) $\{1, 2\} \in A$?
(b) $\{1, 2\} \subset A$?
(c) $\{3, 4\} \in A$?
(d) $\{3, 4\} \subset A$?

(6) Mějme $A = \{1, \{2\}, \emptyset\}$. Který z následujících vztahů je pravdivý?

(a) $1 \in A$, $1 \subset A$, $\{1\} \in A$, $\{1\} \subset A$.
(b) $1 \in \mathcal{P}(A)$, $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$, $\{1\} \subset \mathcal{P}(A)$.
(c) $\emptyset \in A$, $\emptyset \subset A$, $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$.
(d) $2 \in A$, $\{2\} \in A$, $\{2\} \subset A$, $2 \subset A$.
(e) $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$, $A \subset \mathcal{P}(A)$.
(f) $A \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, $\{A\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, $\{A\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

(7) Mějme množiny $A = \{w, \{x, y\}\}$, $B = \{w, y, \{y\}\}$ a $C = \{w, x, y\}$. Vypište prvky následujících množin:

(a) $A \cup C$;
(b) $C \setminus B$;
(c) $B \cap \mathcal{P}(B)$;
(d) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

(8) Mějme množiny $S_n = \left\langle -1 + \frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{2n} \right)$. Zjistěte, co jsou množiny

(a) S_1, S_2 a S_3;
(b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$;
(c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$;
(d) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus S_n)$;
(e) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus S_n)$.

(9) Nalezněte $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$ pro následující výběry množin Q_n.

(a) $Q_n = \langle n, 2n \rangle$;
(b) $Q_n = \left\langle \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right)$;
(c) $Q_n = \left\langle -\frac{1}{n}, n \right\rangle$;
(d) $Q_n = \left\{ \dfrac{m}{12n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \right\}$;
(e) $Q_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1/n^2\}$;
(f) $Q_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2/n\}$.

(10) Nalezněte posloupnost $A_1, A_2, A_3, \ldots$ navzájem různých podmnožin $\mathbb{R}$ takovou, že

(a) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1)$ a $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \langle -2, 2 \rangle$;
(b) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}$ a $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \langle 0, \infty)$;
(c) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ a $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$;
(d) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Z}$ a $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$;
(e) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(11) Označme $A_n = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$ množinu tvořenou násobky čísla $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zjistěte, co jsou množiny $A_2 \cap A_7$, $A_6 \cap A_8$, $A_3 \cap A_{12}$ a $A_3 \cup A_{12}$.

(b) Ukažte, že $\bigcap_{n\in B} A_n = \emptyset$ pro každou nekonečnou podmnožinu indexů $B \subset \mathbb{N}$.

(12) Je-li $A_1, A_2, \dots$ libovolná posloupnost množin, pak existují disjunktní množiny B_k, $B_k \subset A_k$, s vlastností $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.

(13) Pro kterou z následujících tří množin

$$A = \{1, \{1,2\}\}, \quad A = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \quad A = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{\emptyset, 1\}\}$$

platí, že je-li $a \in A$, pak také $a \subset A$.

(14) Mějme konečnou množinu A a zobrazení $f\colon A \longrightarrow A$. Které z následujích tvrzení je pravdivé?

(a) Je-li $A \setminus f(A) = \emptyset$, pak f je prosté.
(b) Je-li $A \setminus f(A) \neq \emptyset$, pak f není prosté.

Které z těchto tvrzení bude platit v případě, že množina A je nekonečná?

(15) Mějme nekonečnou množinu A a prvek $x_0 \in A$. Ukažte, že množiny $A\setminus\{x_0\}$ a A mají stejnou mohutnost, tj. $|A \setminus \{x_0\}| = |A|$. Platí, že $|A \setminus K| = |A|$ pro každou konečnou podmnožinu $K \subset A$?

(16) Mějme množinu A. Ukažte, že množiny $A \times \{0\}$ a $A \times \{1\}$ jsou disjunktní. Nalezněte bijekci mezi množinami $A \times \{0\}$ a $A \times \{1\}$.

(17) Dokažte, že množina $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ je spočetná.

(18) Množina $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je množina všech posloupností tvořených přirozenými čísly. Uvažujme dvě její podmnožiny: $A = \{\text{aritmetické posloupnosti}\}$ a $B = \{\text{periodické posloupnosti}\}$. Ukažte, že

(a) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je nespočetná množina;
(b) Množiny A i B jsou spočetné.

(19) Ukažte, že množina všech polynomů s celočíselnými koeficienty je spočetná. Reálný kořen polynomu s celočíselnými koeficienty se nazývá *algebraické číslo*. Ukažte, že množina algebraických čísel je spočetná.

(20) Ukažte, že intervaly $(0,1)$ a $(0,\infty)$ mají stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$.

(21) Množina $A \subset (0,1)$ je tvořena čísly majícími ve svém desetiném rozvoji nekonečně mnoho 7. Pomocí Schröder-Bernsteinovy věty (Věta 7) ukažte, že $|A| = |(0,1)|$.

(22) Nalezněte bijekci intervalu $\langle 0,1)$ na interval $(0,1)$.

(23) Nalezněte bijekci $f\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ takovou, že $f(\mathbb{Q} \cap (-1,1)) = \mathbb{Q}$, tj. množina racioálních čísel v intervalu $(-1,1)$ se navíc zobrazí na celou množinu $\mathbb{Q}$.

(24) Je množina iracionálních čísel v intervalu $(0,1)$ spočetná nebo nespočetná?

(25) Existuje množina s největší mohutností?

Řešení.

(2) Obě množiny jsou stejné, jsou to k-náslobky celých čísel posunuté o i.

(3) $A|A = X \setminus A$, $(A|B)|(A|B) = A \cap B$, $(A|A)|(B|B) = A \cup B$.

(4a) Množina $C \subset A \cap B$ právě, když $C \subset A$ a $C \subset B$.

(4b) Je-li $C \subset A$ nebo $C \subset B$, pak platí, že $C \subset A \cup B$. Obecně rovnost neplatí: Je-li $a \in A \setminus B$ a $b \in B \setminus A$, pak množina $C = \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, ale C nepatří ani do $\mathcal{P}(A)$ ani do $\mathcal{P}(B)$.

(5) Platí pouze případ (a).

(6a) Platí pouze $1 \in A$ a $\{1\} \subset A$.

(6b) Platí pouze $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$.

(6c) Platí vše.

(6d) Platí pouze $\{2\} \in A$.

(6e) Platí vše kromě posledního $A \subset \mathcal{P}(A)$.

(6f) Platí pouze $\{A\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

(7a) $A \cup C = \{w, x, y, \{x, y\}\}$.

(7b) $C \setminus B = \{x\}$.

(7c) $B \cap \mathcal{P}(B) = \{\{y\}\}$.

(7d) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) = \{w, y\}$.

(8a) $S_1 = \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $S_2 = \langle -\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$, $S_3 = \langle -\frac{5}{6}, \frac{7}{6})$.

(8b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = (-1, \frac{3}{2})$.

(8c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \langle -\frac{1}{2}, 1 \rangle$.

(8d) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus S_n) = (-\infty, -1 \rangle \cup \langle \frac{3}{2}, \infty)$.

(8e) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus S_n) = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$.

(9a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = \langle 1, \infty)$, $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \emptyset$;

(9b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (0, 2)$, $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \{1\}$;

(9c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = \langle -1, \infty)$, $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \langle 0, 1 \rangle$;

(9d) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = \mathbb{Q}$, $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \{m/12 \mid m \in \mathbb{Z}\}$;

(9e) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ je uzavřený kruh se středem v počátku a poloměrem 1, $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \{0, 0\}$;

(9f) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = Q_1$, $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \langle 0, 1 \rangle \times \{0\}$.

(10a) Např. $A_1 = (-1,1)$, $A_2 = \langle -2,2\rangle$ a zbylé A_n $n \geq 3$ jsou jakékoli navzájem různé podmnožiny A_2 obsahující A_1.

(10b) Např. $A_1 = \{1\}$, $A_n = \langle 0,k)$ pro $n \geq 2$.

(10c) Např. $A_n = (1-n, n-1)$.

(10d) Např. $A_n = \mathbb{Z} \cup (1-n, n-1)$.

(10e) Takové navzájem různé množiny neexistují.

(11a) $A_2 \cap A_7 = A_{14}$, $A_6 \cap A_8 = A_{24}$, $A_3 \cap A_{12} = A_{12}$ a $A_3 \cup A_{12} = A_3$.

(11b) Protože $A_n \subset \langle n,\infty)$, neleží žádný prvek v nekonečně mnoha množinách A_n.

(12) Položíme $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i<k} A_i$.

(13) Pouze pro druhou z množin.

(14) Obě tvrzení jsou pravdivá. Pro nekonečnou množinu A žádné z nich neplatí: V případě (a) je protipříkladem např. $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ daná $f(1) = 1$ a $f(n) = n-1$ pro $n \geq 2$. Pro (b) je to např. $f(n) = n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

(15) Množina $A \setminus \{x_0\}$ je nekonečná a podle Věty 13 obsahuje spočetnou podmnožinu $\{x_1, x_2, \dots\}$. Bijekce f množiny A na množinu $A \setminus \{x_0\}$ je definována

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \setminus \{x_0, x_1, x_2, \dots\}; \\ x_{k+1}, & x = x_k,\ k = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

To samé platí i pro konečnou podmnožinu $K \subset A$. Předpokládejme, že K má n prvků $K = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. V nekonečné množině $A \setminus K$ existuje spočetná podmnožina s prvky $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Bijekce f množiny $A \setminus K$ na množinu A je definována

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \setminus \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}; \\ x_{n+k}, & x = x_k,\ k = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

(16) Prvky množiny $A \times \{0\}$ jsou typu $(a,0)$ a prvky množiny $A \times \{1\}$ typu $(a,1)$, $a \in A$. Díky druhé složce nemouhou být nikdy totožné.
Nejjednodušší bijekce $f\colon A \times \{0\} \longrightarrow A \times \{1\}$ je $f(a,0) = (a,1)$.

(17) Můžeme použít Větu 16 (ii) o součinu spočetných množin. Pokud bychom chtěli najít explicitně nějakou bijekci množiny $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$, využijeme Příklady 14 a 15. V prvním máme bijekci $f_1\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ a ve druhém bijekci $f_2\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$f_1(m) = \begin{cases} 2m, & m > 0; \\ -2m+1, & m \leq 0, \end{cases} \qquad f_2(k,n) = 2^{k-1}(2n-1).$$

Jejich kombinací vznikne hledná bijekce $f(m,n) = f_2(f_1(m),n) = 2^{f_1(m)-1}(2n-1)$.

(18a) Užijeme poznatku z Věty 22, že $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ je nespočetná. Zobrazení $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dané $f(a_1,a_2,\dots) = (a_1+1, a_2+1,\dots)$ je bijekce na podmnožinu množiny $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Proto $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \le |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$, a tedy $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je nespočetná.

(18b) Aritmetická posloupnost je typu $(a_0, a_0+d, a_0+2d,\dots)$, tedy je určena dvěma parametry: počátečním členem a_0 a diferencí d. Množina všech dvojic (a_0,d) je rovna $\mathbb{N}\times(\mathbb{N}\cup\{0\})$, což je spočetná množina podle Věty 16(ii).
Periodická posloupnost je jednoznačně určena svou periodou, tj. posloupností

$$(a_1,a_2,\dots,a_k)\in\mathbb{N}^k$$

tvořící periodu, $(a_{k+1}=a_1)$. Podle Věty 16(ii) je takových posloupností délky k spočetně mnoho a jejich sjednocení přes všechny hodnoty $k\in\mathbb{N}$ je opět spočetná množina, (Věta 16(i)).

(19) Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ je určen konečnou posloupností $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ svých koeficientů. Tato posloupnost je prvek množiny $\mathbb{Z}^{n+1}$ pro nějaké n. Podle Věty 16(ii) je tato množina spočetná. Sjednocením množin $\mathbb{Z}^{n+1}$ přes všechny možné stupně polynomu $n=0,1,\dots$ dostaneme opět spočetnou množinu (Věta 16(i)).
Víme, že polynom stupně n má nejvýše n reálných kořenů. Z první části příkladu plyne, že množina P polynomů je spočetná, $P=\{p_1(x),p_2(x),\dots\}$. Označíme K_i množinu reálných kořenů polynomu $p_i(x)$. Pak množina algebraických čísel je rovna $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, což je spočetné sjednocení konečných množin. Podle poznámky před Větou 17 je to opět spočetná množina.

(20) Pro první případ je bijekce např. $f(x) = \operatorname{tg}\pi(x-\frac{1}{2})$ a pro druhý případ $f(x)=\log x$.

(21) Nalezneme prostá zobrazení $f\colon A\longrightarrow(0,1)$ a $g\colon(0,1)\longrightarrow A$. První je jednoduché, $f(x)=x$. Pro definici hodnoty $g(x)$ napíšeme číslo $x\in(0,1)$ v desetiném rozvoji, (doplněném nulami, je-li třeba), $x = 0.x_1x_2x_3\dots$ Položíme $g(x) = 0.7x_17x_27x_3\dots$

(22) Zvolme si nějakou posloupnost $a_1 > a_2 > \cdots$ čísel z $(0,1)$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (např. $a_n = 1/(n+1)$). Položíme $A=\{a_1,a_2,\dots\}$. Definujeme $f\colon\langle 0,1)\longrightarrow(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases} a_1, & \text{pro } \ x=0;\\ a_{n+1}, & \text{pro } \ x=a_n, \quad n\ge 1;\\ x & \text{pro } \ x\in(0,1)\setminus A.\end{cases}$$

Zobrazení f je hledaná bijekce.

(23) Např. $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$.

(24) Nespočetná, neboť $(0,1)$ je nespočetná a množina iracionálních čísel v $(0,1)$ vznikne jako $(0,1)\setminus\mathbb{Q}$, tj. odebráním spočetné množiny.

(25) Neexistuje, neboť kdyby taková množina A existovala, pak by podle Cantorovy věty (Věta 23) měla množina $\mathcal{P}(A)$ mohutnost větší, což je spor.