# Mocninné a Fourierovy řady.

**Jaroslav Tišer**

# Obsah

# Kapitola 1

# Řady funkcí

Již od počátků diferenciálního počtu si byli jeho představitelé (Newton, Leibnitz, Euler,...) dobře vědomi potřeby vyjádřit hodnotu funkce pomocí nekonečné řady. Příkladem může být funkce

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!} + \cdots$$

Její hodnoty je možné geometricky zjistit jen ve velmi speciálních případech. V této kapitole vyšetříme základní vlastnosti řad funkcí a tyto poznatky pak budeme aplikovat na speciální typy řad.

## 1 Bodová a stejnoměrná konvergence

Pro posloupnost funkcí máme několik různých druhů konvergence. Zde se soustředíme na dvě z nich: *bodovou konvergenci* a *stejnoměrnou konvergenci*. Trochu se sobě podobají, ale nejsou identické. Vztah mezi nimi připomíná vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti.

Nejpřirozenější pojem konvergence funkcí je bodová konvergence.

**Definice 1.1.** *Mějme posloupnost funkcí* $(f_n)$ *na množině* $D \subset \mathbb{R}^n$ *a funkci* $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$. *Řekneme, že funkce* $f_n$ *konvergují* **bodově** *k* $f$ *na množině* $D$, *když pro každé* $x \in D$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Máme-li pojem bodové konvergence pro posloupnost funkcí, máme automaticky tuto konvergenci i pro nekonečné řady. (V dalším textu budeme často vynechávat slovo „nekonečné“ a mluvit krátce o řadách.)

**Definice 1.2.** *Mějme posloupnost funkcí* $(f_n)$ *na množině* $D \subset \mathbb{R}^n$ *a funkci* $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$. *Jestliže částečné součty*

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} f_n.$$

*konvergují bodově k* $f$ *na* $D$ *při* $N \to \infty$, *řekneme, že řada* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *konverguje* **bodově** *k součtu* $f$ *a píšeme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \text{ na } D.$$

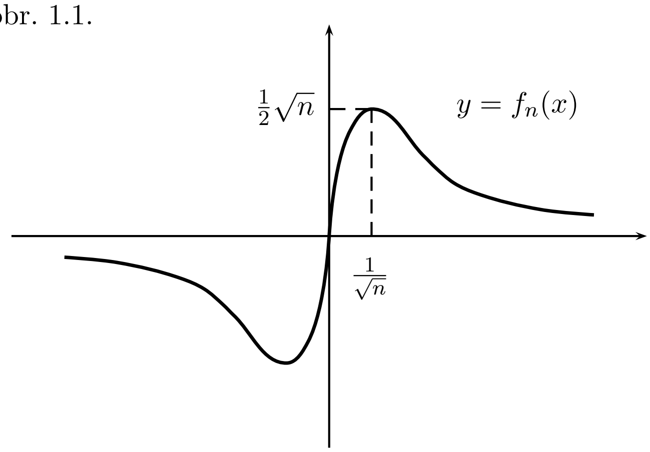
**Příklad 1.3.** Podívejme se na jednoduchý případ posloupnosti funkcí $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n}$. Grafy těchto funkcí jsou paraboly se stále větším rozevřením. V každém bodě $x$ je hodnota limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n} = 0,$$

proto tato posloupnost konverguje bodově k funkci $f = 0$.

**Příklad 1.4.** Mějme posloupnost funkcí $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$. K jaké funkci $f$ daná posloupnost bodově konverguje?

Vyšetříme alespoň zhruba průběh funkce $f_n$: Nabývá maxima v bodě $x = 1/\sqrt{n}$ a hodnota je $\frac{1}{2}\sqrt{n}$. Protože $f_n$ jsou navíc liché funkce, nabývají minima v opačných bodech s opačnou hodnotou. Poloha extrémů se blíží k nule a hodnoty maxim a minim konvergují k $+\infty$ a $-\infty$, viz obr. 1.1.



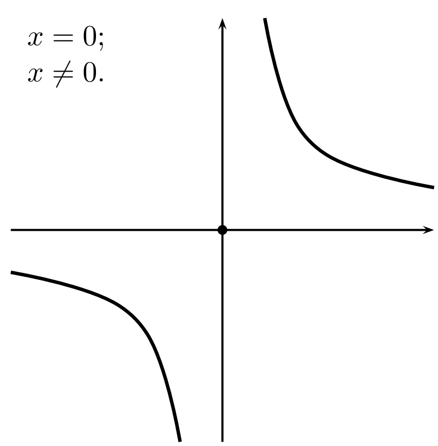

Obr. 1.1.

V bodě $x = 0$ mají všechny funkce hodnotu $f_n(0) = 0$, proto i $f(0) = 0$. Pro pevně zvolené $x \neq 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n}+x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Limitní funkce $f$ není spojitá v bodě $x = 0$, viz. obr. 1.2.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

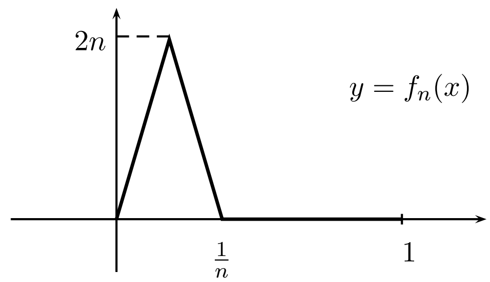


Obr. 1.2.

**Příklad 1.5.** Podívejme se ještě na jeden příklad. Mějme funkce $f_n\colon \langle 0,1\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ dané

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n - 4n^2\left|x - \frac{1}{2n}\right|, & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{n}\rangle; \\ 0, & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle. \end{cases}$$

Graf funkce $f_n$ je na obrázku 1.3.




Obr. 1.3.

Ukážeme, funkce $f_n$ konvergují bodově k nulové funkci: Pro $x = 0$ jsou všechny $f_n(0) = 0$, takže i hodnota limitní funkce $f$ je nula, $f(0) = 0$. Je-li $x > 0$, existuje index $n_0$, že $\frac{1}{n_0} < x$. Pro všechny funkce $f_n$ s indexem alespoň $n_0$ je hodnota $f_n(x) = 0$, neboť funkce $f_n$ jsou nenulové pouze v intervalu $(0, \frac{1}{n})$. Máme, že $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$.

Z druhé strany,

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

neboť obsahy pod grafem funkce jsou obsahy trojúhelníků z obr. 1.3. Vidíme, že

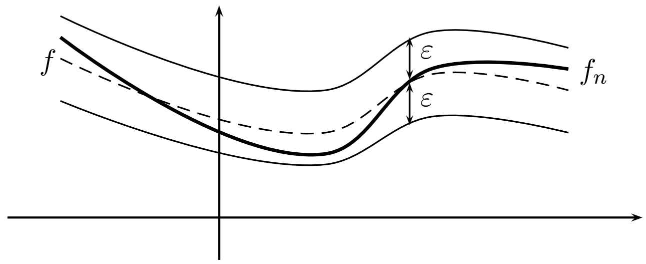
$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \text{ale} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Předchozí dva příklady ukazují, že bodová konvergence je příliš slabá na to, aby byla k užitku. Spojité funkce mohou konvergovat k nespojité funkci jako v Příkladu 1.4 a ani hodnoty integrálů se při bodové konvergenci nepřenáší na limitní funkci, viz Příklad 1.5. Důvod je ten, že i když $f_n(x)$ konvergují k $f(x)$ pro každé $x$, rychlost konvergence se podstatně mění s bodem $x$. Můžeme si to ilustrovat na Příkladu 1.4. Zvolme si např. $\varepsilon = \frac{1}{10}$ a $x = 1$. Abychom se v tomto bodě dostali k limitní funkci blíže než povolené $\varepsilon$ musíme mít index $n > 9$, tj. musíme udělat alespoň 10 kroků. Pro bod $x = 0.5$ to už dělá víc než 78 kroků, a v bodě $x = 0.1$ musíme čekat až na funkci s indexem 990. Stručně řečeno, konvergence není stejnoměrná v $x$. To nás motivuje k definici silnějšího pojmu konvergence.

**Definice 1.6.** *Mějme posloupnost funkcí $(f_n)$ na množině $D \subset \mathbb{R}^n$ a funkci $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $f_n$ konvergují* **stejnoměrně** *k $f$ na množině $D$, když*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{1.1}$$

Přibližme si podmínku (1.1). Geometrické znázornění je na obr. 1.4.




Obr. 1.4.

Pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ utvoříme kolem limitní funkce $f$ (čárkovaně) pás o šířce $\varepsilon$. Pak existuje index $m$, že pro všechny funkce $f_n$ mající index vyšší než $m$ platí,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

nejen pro všechna $n \geq m$, ale (hlavně!) pro všechna $x \in D$ najednou. To je vyjádření stenoměrné rychlosti konvergence funkcí $f_n$ k funkci $f$.

Analogická definice pro řady je následující:

**Definice 1.7.** *Mějme posloupnost funkcí $(f_n)$ na množině $D \subset \mathbb{R}^n$ a funkci $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$. Jestliže částečné součty*

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} f_n.$$

*konvergují stejnoměrně k $f$ na $D$ při $N \to \infty$, řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje* **stejnoměrně** *k součtu $f$.*

## 2 Vlastnosti stejnoměrné konvergence

Nyní ukážeme, že stejnoměrná konvergence je podstatně lepší než bodová. Konkrétně, stejnoměrná limita spojitých funkcí je opět spojitá funkce.

**Věta 1.8.** *Mějme posloupnost $(f_n)$ funkcí, které konvergují stejnoměrně k funkci $f$ na množině $D$. Jsou-li všechny funkce $f_n$ spojité v bodě $x_0 \in D$, je i limitní funkce $f$ spojitá v bodě $x_0$.*

**Důkaz.** Ověříme spojitost $f$ podle definice. Nechť $\varepsilon > 0$ je dané. Ze stejnoměrné konvergence máme index $m$, že pro všechny funkce s vyšším indexem platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad \text{pro } n \geq m \text{ a } x \in D. \tag{1.2}$$

Protože funkce $f_m$ je spojitá v $x_0$, existuje otevřené okolí $U$ bodu $x_0$, že

$$|f_m(x) - f_m(x_0)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad \text{pro } x \in U.$$

Abychom odhadli rozdíl $f(x) - f(x_0)$, přičteme a odečteme k tomuto rozdílu $f_m(x)$ a $f_m(x_0)$. Pak můžeme psát,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)|$$

Pro $x \in U$ platí, že prostřední člen je menší než $\frac{1}{3}\varepsilon$ a podle (1.2) jsou i krajní členy $< \frac{1}{3}\varepsilon$. Tím je důkaz uzavřen. $\square$

Okamžitý důsledek Věty 1.8 je, že konvergují-li spojité funkce stejnoměrně k funkci $f$ na množině $D$, je $f$ spojitá na $D$. Stačí aplikovat Větu 1.8 na každý bod množiny $D$.

Další krok spojuje stejnoměrnou konvergenci s integrací. Stejnoměrnou limitu a integrál můžeme bez nebezpečí navzájem prohodit.

**Věta 1.9.** *Mějme posloupnost* $(f_n)$ *spojitých funkcí na intervalu* $\langle a, b\rangle$*, které konvergují stejnoměrně k funkci* $f$ *na* $\langle a, b\rangle$*. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}x = \int_a^b f \,\mathrm{d}x.$$

**Důkaz.** Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné konvergence posloupnosti $(f_n)$ plyne, že existuje index $m$ s vlastností

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pro všechna $n \geq m$ a $x \in \langle a, b\rangle$. Na základě toho teď odhadneme rozdíl integrálů,

$$\left| \int_a^b f_n \,\mathrm{d}x - \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \,\mathrm{d}x < \int_a^b \varepsilon \,\mathrm{d}x = \varepsilon(b-a).$$

Protože $\varepsilon > 0$ je libovolné, máme tvrzení věty dokázáno. $\square$

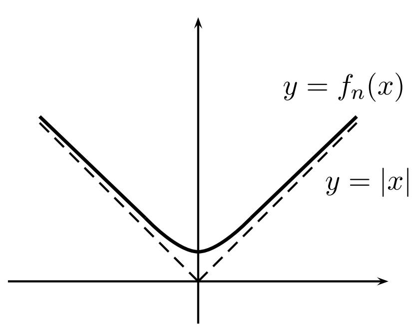
Předchozí dvě věty ukazují, že stejnoměrná konvergence přenáší vlastnosti funkcí $f_n$ i na limitní funkci $f$. Ať už jde o spojitost nebo hodnotu integrálů. Zbývá vyšetřit interakci s derivací.

Tento problém se rozpadá na dvě otázky: Jsou-li funkce $f_n$ diferencovatelné a stejnoměrně konvergují k $f$, je také $f$ diferencovatelná? A konvergují derivace $f_n'$ k derivaci $f'$?

Odpovědi na obě otázky jsou záporné. Příkladem negativní odpovědi na první otázku jsou funkce $f_n \colon \langle -1, 1\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ definované

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n}}.$$

To jsou diferencovatelné funkce, viz obr. 1.5.




Obr. 1.5.

Můžeme si navíc snadno ověřit (umocněním všech členů), že platí

$$|x| \leq f_n(x) \leq |x| + \frac{1}{n}.$$

Odtud vyplývá, že limitní funkce je $f(x) = |x|$ a že $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ pro všechna $x \in \langle -1, 1, \rangle$. Funkce $f_n$ tak stejnoměrně konvergují k funkci $f$, ale $f$ nemá v nule derivaci.

U druhé otázky uvažujme funkce $f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dané

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n}.$$

Protože $|\operatorname{arctg}(nx)| \leq \frac{1}{2}\pi$, konvergují funkce $f_n$ stejnoměrně k funkci $f = 0$. Ale

$$f_n'(0) = \Big(\frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n}\Big)' \Big|_{x=0} = \frac{1}{1 + n^2 x^2} \Big|_{x=0} = 1.$$

V bodě $x = 0$ jsou hodnoty derivací $f_n'(0) = 1$ a nekonvergují k derivaci limitní funkce $f'(0) = 0$.

Shrnuto, stejnoměrná konvergence funkcí $f_n$ neříká zhola nic o konvergenci derivací $f_n'$. Stejnoměrná konvergence derivací ale už něco umožňuje.

**Věta 1.10.** *Mějme posloupnost funkcí $f_n \colon \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ se spojitými derivacemi $f_n'$. Dále předpokládejme, že funkce $f_n$ konvergují alespoň v jednom bodě $x_0 \in \langle a, b\rangle$ a derivace $f_n'$ konvergují stejnoměrně na $\langle a, b\rangle$. Pak existuje spojitě diferencovatelná funkce $f$, že*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} f_n' = f'$$

*a konvergence v obou limitách jsou stejnoměrné na $\langle a, b\rangle$.*

**Důkaz.** Označíme si $g = \lim_{n\to\infty} f_n'$ a $y_0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $y_0 = 0$, neboť odečtění konstanty $y_0$ se neprojeví ani na derivacích ani na konvergenci. Předpoklady nyní jsou:

$$g = \lim_{n\to\infty} f_n' \ \text{ stejnoměrně } \ \text{a} \ \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0. \tag{1.3}$$

Podle Věty 1.8 je $g$ spojitá. Za hledanou funkci $f$ položíme

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Odtud a z (1.3) ihned plyne, že

$$f' = g = \lim_{n\to\infty} f_n' \ \text{ stejnoměrně.}$$

Druhá část tvrzení je tak ověřena. Zbývá dokázat, že $f_n$ konvergují stejnoměrně k $f$. Protože

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t + f_n(x_0),$$

můžeme odhadovat

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\langle a,b\rangle}|f(x)-f_n(x)| &= \sup_{x\in\langle a,b\rangle}\left|\int\limits_{x_0}^{x} g\,\mathrm{d}t - \int\limits_{x_0}^{x} f_n'\,\mathrm{d}t - f_n(x_0)\right| \\ &\le \sup_{x\in\langle a,b\rangle}\left|\int\limits_{x_0}^{x}(g-f_n')\,\mathrm{d}t\right| + |f_n(x_0)| \le \sup_{x\in\langle a,b\rangle}\int\limits_{x_0}^{x}|g-f_n'|\,\mathrm{d}t + |f_n(x_0)| \\ &\le \int\limits_a^b |g-f'|\,\mathrm{d}t + |f_n(x_0)|.\end{aligned}$$

Nyní budeme aplikovat limitu pro $n\to\infty$ na obě strany nerovnosti. Protože $f_n'$ konvergují stejnoměrně, můžeme podle Věty 1.9 prohodit limitu a integrál.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\langle a,b\rangle}|f(x)-f_n(x)| &\le \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b |g-f_n'|\,\mathrm{d}t + \lim_{n\to\infty}|f_n(x_0)| \\ &= \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty}|g-f_n'|\,\mathrm{d}t + \lim_{n\to\infty}|f_n(x_0)| = 0+0=0.\end{aligned}$$

Dokázali jsme i zbývající část tvrzení Věty 1.10 □

Všechny tři věty, Věta 1.8, 1.9 a 1.10, mají své protějšky pro řady. Jsou to jejich aplikace na částečné součty, proto je nebudeme znovu dokazovat.

**Věta 1.11.** *Mějme spojité funkce $f_n\colon\langle a,b\rangle\longrightarrow\mathbb{R}$.*

(i) *Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně na $\langle a,b\rangle$ pak je její součet spojitá funkce a*

$$\int\limits_a^b\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_a^b f_n\,\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

(ii) *Předpokládejme, že funkce $f_n$ jsou spojitě diferencovatelné, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje alespoň v jednom bodě a že řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na $\langle a,b\rangle$. Pak*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'. \tag{1.5}$$

Důležitost stejnoměrné konvergence je nyní zřetelná. Zjistit ale, zda daná řada konverguje stejnoměrně, je věc jiná, často obtížná. Ukážeme postačující krtitérium, tzv. Weierstrassovo kritérium, garantující stejnoměrnou konvergenci řady aniž bychom k tomu museli znát její součet.

**Věta 1.12.** (Weierstrassovo kritérium) *Mějme funkce* $f_n\colon \langle a,b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$. *Existují-li čísla* $\lambda_n$ *taková, že*

$$\sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f_n(x)| \leq \lambda_n$$

*a řada* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ *konverguje, pak konverguje řada* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *stejnoměrně na* $\langle a,b\rangle$.

**Důkaz.** Ze srovnávacího kritéria plyne, že řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konverguje (absolutně) bodově na $\langle a,b\rangle$. Označíme si její součet

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Nyní pro částečné součty $s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$ platí

$$\sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x) - s_N(x)| = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sup_{x\in\langle a,b\rangle} \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n.$$

Protože zbytky konvergentní řady $\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n$ se blíží k nule pro $N \to \infty$, dostaneme

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x) - s_N(x)| \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n = 0,$$

a tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na $\langle a,b\rangle$. $\square$

# Kapitola 2

# Mocninné řady

V matematice se často pokoušíme vyjádřit složitou funkci pomocí vhodné lineární kombinace nějakých základních elementárních funkcí. Např. mocniny $1, x, x^2, \dots$ mohou být takové bázové funkce, chceme-li reprezentovat funkci mocninnou řadou. Tomu se budeme v této kapitole věnovat. Soustředíme na otázky, kdy mocninná řada konverguje k smysluplnému součtu a jaký má takový součet vlastnosti.

**Definice 2.1.** *Řada tvaru*

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

*se nazývá* **mocninná řada**. *Bod $x_0$ je střed řady a čísla $a_n \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty.*

Každá mocninná řada automaticky konverguje ve svém středu $x = x_0$ a má součet $a_0$. Obecně platí, že čím jsou body $x$ blíže středu, tím snadněji (tj. rychleji) řada konverguje. V dalším textu se omezíme na řady se středem $x_0 = 0$. To nepředstavuje žádnou újmu na obecnosti, protože substituce $x - x_0 \to x$ redukuje řadu s obecným středem na tento případ.

Geometrická řada

$$1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

je nejběžnější příklad mocninné řady. U ní víme nejenom, že konverguje pro $x \in (-1, 1)$, ale známe i součet

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}.$$

## 1 Poloměr konvergence

Veškeré vyšetřování konvergence mocninných řad je založeno na následujícím důležitém pozorování.

**Tvrzení 2.2.** *Mějme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Je-li posloupnost $(a_n \varrho^n)$ omezená pro nějaké $\varrho > 0$, pak řada konverguje absolutně pro všechna $|x| < \varrho$.*

**Důkaz.** Protože posloupnost $(a_n\varrho^n)$ je omezená, existuje konstanta $K$, že

$$|a_n\varrho^n| \leq K,\ n \geq 0.$$

Odtud pro $x$ splňující $|x| < \varrho$ dostaneme

$$|a_n x^n| = \left|a_n\varrho^n\right| \left|\frac{x}{\varrho}\right|^n \leq K\left|\frac{x}{\varrho}\right|^n.$$

Protože $|x| < \varrho$, je geometrická řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\varrho}\right)^n$ absolutně konvergentní. Podle srovnávacího kritéria řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně. □

**Příklad 2.3.** Mějme řadu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{n+1}\,x^n$. Její koeficienty jsou omezené hodnotou 2,

$$\left|(-1)^n\frac{2n}{n+1}\right| \leq 2.$$

Předpoklad Tvrzení 2.2 je splněn pro $\varrho = 1$. Proto řada konverguje pro všechna $|x| < 1$.

Nyní ukážeme, že mocninná řada vždy konverguje na symetrickém intervalu, pokud ignorujeme koncové body.

Označme symbolem $M$ množinu bodů $x$, kde řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně,

$$M = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n| \text{ konverguje.}\right\}.$$

Protože jde o absoluní konvergenci, patří do množiny $M$ s každým jejím bodem $x$ rovněž bod $-x$, a tedy $M$ je symetrická. Dále, $M$ je neprázdná, neboť obsahuje 0. Definujeme

$$R = \sup M.$$

Díky symetrii je $\inf M = -R$. Parametr $R$ se nazývá *poloměr konvergence*. Ten může nabývat hodnot od 0 do $\infty$ včetně. Tyto extrémní případy znamenají, že řada konverguje jen pro $x = 0$ (při $R = 0$) nebo konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (při $R = \infty$).

**Příklad 2.4.** Mějme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^n x^n.$$

Abychom zjistili množinu $M$, a tedy poloměr konvergence, užijeme odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(n+1)^n x^n|} = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x|.$$

Tato limita je nekonečno pro každé $x \neq 0$, proto řada konverguje pouze pro $x = 0$. Poloměr konvergence je tak $R = 0$.

Opačný extrém je např. řada

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Zde užijeme podílové kritérium a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, a tedy $R = \infty$.

Obecnou situaci řeší následující věta.

**Věta 2.5.** *Mějme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s poloměrem konvergence $R$. Pak platí:*

(i) *Je-li $R > 0$, řada konverguje absolutně pro $|x| < R$ a stejnoměrně na každém intervalu $\langle -a, a\rangle \subset (-R, R)$;*

(ii) *Řada diverguje pro $|x| > R$.*

**Důkaz.** (i) Mějme $|x| < R$. Protože $R = \sup M$, existuje bod $\varrho \in M$, že $|x| < \varrho < R$. To znamená, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konverguje absolutně. Specielně, posloupnost $(a_n \varrho^n)$ je omezená. Podle Tvrzení 2.2, řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně.

Mějme nyní interval $\langle -a, a\rangle \subset (-R, R)$. Pro $x \in \langle -a, a\rangle$ máme odhad

$$|a_n x^n| = |a_n|\,|x^n| \le |a_n|\,a^n.$$

Podle (i), řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| a^n$ konverguje a díky Weierstrassovu kritériu (Věta 1.12) konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stejnoměrně na $\langle -a, a\rangle$.

(ii) Kdyby řada konvergovala pro nějaké $|x_0| > R$, tak specielně je posloupnost $(a_n x_0^n)$ omezená. Podle Tvrzení 2.2 by řada absolutně konvergovala pro všechna $|x| < |x_0|$, což je ve sporu s definicí $R$ jako suprema množiny $M$. $\square$

Odvodíme dva vztahy pro výpočet poloměru konvergence. Protože odvození je přímočaré, bývá někdy jednodušší u konkréntní řady toto odvození provést znovu než si pamatovat vzorec.

Mějme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Podle odmocninového kriteria řada konverguje absolutně pokud

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| < 1$$

a diverguje, když

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| > 1.$$

Označíme-li

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2.1}$$

pak vidíme, že řada konveguja absolutně pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$. To je přesně vlastnost poloměru konvergence popsaná ve Větě 2.5. (Zde - ale pouze zde! - příjímáme konvenci, že $\frac{1}{0} = \infty$ a $\frac{1}{\infty} = 0$.)

S podílovým kritériem analogicky dostaneme vyjádření ve tvaru

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|. \tag{2.2}$$

V obou vzorcích (2.1) a (2.2) je předpoklad, že příslušné limity existují, což nemusí být vždy splněno. Nicméně ve velké většině případů nám vystačí k výpočtu poloměru konvergence.

**Příklad 2.6.** Zjistíme poloměry konvergence $R$ následujících řad:

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\cdot 3^n},\quad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\ln^n(n+1)},\quad \text{(c)}\ \sum_{n=0}^{\infty}7^n x^{4n}\quad \text{(d)}\ \sum_{n=0}^{\infty}x^{n!}.$$

(a) Zde můžeme použít oba tvary pro výpočet $R$, o něco snazší je podílový:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot 3^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=3.$$

Podle Věty 2.5 řada konverguje absolutně v intervalu $(-3,3)$ a stejnoměrně na každém uzavřeném podintervalu $\langle -a,a\rangle\subset(-3,3)$.
(b) U této řady je zřetelně výhodnější odmocninový tvar pro $R$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\ln^n(n+1)|}=\lim_{n\to\infty}|\ln(n+1)|=\infty.$$

Řada konverguje absolutně na $\mathbb{R}$ a stejnoměrně na každém omezeném intervalu.
(c) Řada neobsahuje všechny mocniny,

$$\sum_{n=0}^{\infty}7^n x^{4n}=1+7x^4+49\,x^8+343\,x^{12}+\cdots,$$

a tak má nekonečně mnoho koeficientů $a_n$ je nulových. Ani v jednom vzorci (2.1) a (2.2) limity neexistují. Můžeme si pomoci substitucí $y=7x^4$. Řada dostane tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty}7^n x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n.$$

Ta má poloměr konvergence 1. Odtud vyplývá, že původní řada konverguje absolutně pro

$$|7x^4|<1,\quad \text{tj.}\quad |x|<\frac{1}{\sqrt[4]{7}}.$$

(d) I v této řadě je nekonečně mnoho koeficientů nulových,

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n!}=x+x+x^2+x^6+x^{24}+\cdots$$

Nelze však provést substituci jako v případě (c), neboť nenulové koeficienty nejsou rozloženy pravidelně. Je výhodnější použít odmocninové nebo podílové kriterium přímo na mocninnou řadu. V naši konkrétní situaci užijeme podílové.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)!}}{x^{n!}}\right| &= \lim_{n\to\infty}|x|^{(n+1)!-n!}\\ &= \lim_{n\to\infty}|x|^{n\cdot n!}=\begin{cases}0 & \text{pro } |x|<1;\\ \infty & \text{pro } |x|>1.\end{cases}\end{aligned}$$

Poloměr konvergence je $R=1$ a řada konverguje absolutně na $(-1,1)$ a stejnoměrně na každém $\langle -a,a\rangle\subset(-1,1)$.

Věta 2.5 tají, co se děje v hraničních bodech intervalu $(-R,R)$. Obecně není možné cokoli tvrdit. Řada může konvergovat v obou krajích nebo v žádném z nich nebo právě v jednom. V dalším budeme chování řady v hraničních bodech ignorovat.

## 2 Integrace a derivace řad

Z Věty 2.5 máme důležitou informaci o stejnoměrné konvergenci řady. Má-li řada poloměr konvergence $R > 0$, pak konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle -a, a\rangle \subset (-R, R)$. Podle Věty 1.11 (i) je její součet spojitá funkce na $\langle -a, a\rangle$. Protože

$$\bigcup_{a<R} \langle -a, a\rangle = (-R, R),$$

je součet mocninné řady spojitá funkce na celém intervalu $(-R, R)$. Zcela stejnou úvahu použijeme pro integraci a derivaci mocninné řady, jen si napřed musíme vyjasnit jeden možný technický problem. Formální derivace a integrace řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vede na

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n \, x^{n-1} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \, x^{n+1}. \tag{2.3}$$

To jsou řady s jinými koeficienty a mohly by mít jiné poloměry konvergence než původní řada. To však nenastane.

**Lemma 2.7.** *Mějme posloupnost kladných čísel* $(\lambda_n)$*, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$*. Pak řady*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a \quad \sum_{n=0} \lambda_n a_n x^n$$

*mají stejné poloměry konvergence.*

**Důkaz.** Označíme $R$ poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\widetilde{R}$ poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n x^n$. Můžeme poznamenat, že pokud posloupnost $a_{n+1}/a_n$ má limitu, je důkaz triviální:

$$\widetilde{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1} a_{n+1}}{\lambda_n a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R.$$

V obecném případě musíme postupovat jinak. Mějme $|x| < R$ libovolné. Cílem je ukázat, že $|x| \le \widetilde{R}$, tj. $\widetilde{R}$ nemůže být menší než $R$.

Zvolíme si pomocné číslo $\varrho$, že $|x| < \varrho < R$. Protože řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konverguje, je posloupnost $(a_n \varrho^n)$ omezená, $|a_n \varrho^n| \le K$. Nyní

$$|\lambda_n a_n x^n| = \lambda_n a_n \varrho^n \left(\frac{|x|}{\varrho}\right)^n \le \lambda_n K \left(\frac{|x|}{\varrho}\right)^n.$$

Z podílového kritéria plyne, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n K (|x|/\varrho)^n$ konverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \frac{|x|}{\varrho} < 1.$$

Proto konverguje absolutně i $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n a_n x^n$, tj. $|x| \le \widetilde{R}$. Nyní víme, že $R \le \widetilde{R}$.

Pro obrácenou nerovnost $\widetilde{R} \leq R$ si nejprve uvědomíme, že čísla $\widetilde{\lambda}_n = 1/\lambda_n$ také splňují podmínku $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\widetilde{\lambda}_{n+1}}{\widetilde{\lambda}_n} = 1$. Nyní stačí předchozí výsledek aplikovat na řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{a}_n x^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\lambda}_n \widetilde{a}_n x^n,$$

kde $\widetilde{a}_n = \lambda_n a_n$. □

Vrátíme se teď k řadám v (2.3). Volby $\lambda_n = n$ i $\lambda_n = 1/(n+1)$ splňují předpoklady Lemmatu 2.7. Obě řady mají stejný poloměr konvergence jako původní řada, neboť

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n, \quad x \neq 0, \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^n.$$

Po vyjasnění, jak je to s poloměry konvergence řad v (2.3), můžeme přistoupit k hlavnímu výsledku této části.

**Věta 2.8.** *Mějme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s kladným poloměrem konvergence $R$. Pak*

(i) *její součet je funkce mající derivace všech řádů v intervalu $(-R, R)$. Speciálně,*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{2.4}$$

(ii) *pro každé $x \in (-R, R)$ platí*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n\right) \mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}. \tag{2.5}$$

**Důkaz.** (i) Podle Věty 2.5 (i), řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ konverguje stejnoměrně na všech intervalech $\langle -a, a\rangle \subset (-R, R)$. Každé $x \in (-R, R)$ leží ve vhodném intervalu typu $\langle -a, a\rangle$ a pro něj použijeme Větu 1.11 (i). Máme tak dokázán vztah (2.4). Protože zderivovaná řada je opět mocninná řada se stejným poloměrem konvergence, iterováním výše uvedeného argumentu zjistíme, že součet má derivace všech řádů.

(ii) je bezprostřední důsledek Věty 1.11 (ii). □

# 3 Taylorovy řady

Mějme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$ a středem $x_0$. Věta 2.8 (i) říká, že součet řady je funkce mající derivace všech řádů. Podívejme se na tento fakt z opačné strany. Máme funkci $f$ mající derivace všech řádů (krátce: nekonečně diferencovatelnou) a chtěli bychom ji napsat jako mocninnou řadu se zadaným středem $x_0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Jak vypadá $k$-tá derivace funkce $f$? Členy řady s indexem $n < k$ při derivaci zmizí a zbyde

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (x-x_0)^{n-k}.$$

Pro $x = x_0$ dostáváme vztah, který stojí za povšimnutí,

$$f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k, \quad \text{tj.} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}. \tag{2.6}$$

V tom případě by rozvoj funkce $f$ do mocninné řady měl tvar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n. \tag{2.7}$$

Mocninná řada tohoto tvaru se nazývá **Taylorova řada** nebo také **Taylorův rozvoj** funkce $f$ v bodě $x_0$.

Je možné nekonečně diferencovatelnou funkci $f$ rozvinout v Taylorovu řadu kolem daného bodu $x_0$? Odpověď je obecně záporná. Nic nebrání tomu sestavit mocninnou řadu s koeficienty podle vzorce (2.6), ale selhání je dvojího typu: příslušná mocninná řada konverguje jen pro $x = x_0$, což nám není k ničemu, nebo řada konverguje i mimo střed, ale k jiné funkci než $f$.[1]

V následující větě máme jednoduchou postačující podmínku pro existenci Taylorova rozvoje.

**Věta 2.9.** *Mějme $k_0 \in \mathbb{N}$ a kladná čísla $C, r > 0$ taková, že $Cr < 1$. Je-li $f$ nekonečně diferencovatelná funkce na $(x_0 - r, x_0 + r)$ splňující*

$$|f^{(k)}(x)| \le C^k k! \quad \textit{pro } x \in (x_0 - r, x_0 + r) \textit{ a } k \ge k_0,$$

*pak $f$ má Taylorův rozvoj kolem $x_0$ s poloměrem konvergence alespoň $r$.*

**Důkaz.** Zadanou funkci $f$ budeme aproximovat Taylorovým polynomem:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} + Z_k,$$

pro $k \ge k_0$. Zbytek $Z_k$ má tvar

$$Z_k = \frac{f^{(k)}(\vartheta_k)}{k!}(x-x_0)^k,$$

pro nějaké $\vartheta_k$ mezi $x$ a $x_0$. Stačí ukázat, že $\lim_{k\to\infty} Z_k = 0$. Podle předpokladu platí odhad

$$|Z_k| \le \frac{C^k k!}{k!}|x-x_0|^k \le (Cr)^k.$$

Protože $Cr < 1$, je $\lim_{k\to\infty} Z_k = 0$, čímž je konvergence dokázána. □

[1] Funkce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\cos(n^2 x)$ je nekonečně diferencovatelná na $\mathbb{R}$, ale její Taylorova řada konverguje jen v nule; funkce $f(x) = e^{-1/x^2}$ s hodnotou $f(0) = 0$ je nekonečně diferencovatelná funkce na $\mathbb{R}$, jejíž Taylorova řada je identická 0.

**Příklad 2.10.** Taylorův rozvoj exponenciální funkce $f(x) = e^x$ v daném bodě $x_0$ zjistíme z hodnot derivací v $x_0$. Zvolme si libovolné $r > 0$. Protože

$$|f^{(k)}(x)| = e^x \le e^{x_0+r}$$

pro každé $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, je splněn předpoklad Věty 2.9 pro jakékoli kladné $C < 1/r$. Máme

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n.$$

Tento rozvoj platí na celém $\mathbb{R}$ neboť $r$ je libovolné. Nejobvyklejší tvar je pro $x_0 = 0$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Tento rozvoj můžeme použít i k dalšímu účelu. Píšeme-li $-x^2$ místo $x$, dostaneme

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Integrací získáme reprezentaci tzv. chybové funkce (error function) pomocí řady

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Na závěr si uvedeme nečastěji se vyskytující rozvoje:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in \langle -1, 1); \tag{2.8}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{2.9}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{2.10}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{2.11}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n, \quad x \in (-1, 1\rangle; \tag{2.12}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \;\; x \in (-1, 1), \;\; \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

Pravá strana rovnosti (2.13) se nazývá binomická řada podle binomických koeficientů

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Geometrická řada (2.8) je jejím speciálním případem pro $\alpha = -1$ a záměnou $x$ za $-x$.

# 4 Cvičení

**Úloha:** Nalezněte Taylorovu řadu se středem $x_0 = 0$ pro funkci

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

**Řešení:** Použijeme rozvoj logaritmu v (2.12) pro $x$ a $(-x)$:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Sudé mocniny $x$ se odečtou a liché sečtou,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Poloměr konvergence je $R = 1$.

**Úloha:** Rozviňte do Taylorovy řady se středem $x_0 = 0$ funkci

$$f(x) = \frac{1}{ax^k + b}, \quad k \geq 1,\ b \neq 0.$$

**Řešení:** Využijeme součet geometrické řady (2.8) a za tím účelem danou funkci upravíme:

$$f(x) = \frac{1}{b} \frac{1}{1 + \frac{a}{b} x^k}.$$

Substitucí $t = -\dfrac{a}{b} x^k$ tak máme tvar

$$f(x) = \frac{1}{b} \frac{1}{1-t} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{b^{n+1}} x^{kn}.$$

Poloměr konvergence je $R = |b|/|a|$ pro $a \neq 0$ a $R = \infty$ pro $a = 0$.

**Úloha:** Nalezěte Taylorův rozvoj v bodě $x_0 = 0$ funkce

$$f(x) = \frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}.$$

**Řešení:** Funkci rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Odtud dostaneme

$$3x + 8 = A(x^2+4) + (Bx+c)(2x-3).$$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících si mocnin získáme soustavu rovnic, jejíž řešení je $A = 2$, $B = -1$ a $C = 0$. Máme tak

$$f(x) = \frac{2}{2x-3} - \frac{x}{x^2+4} = -\frac{2}{3(1-\frac{2}{3}x)} - \frac{x}{4(1+\frac{1}{4}x^2)}.$$

Pomocí rozvoje (2.8) (nebo užitím výsledku předchozí úlohy) máme

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}.$$

Poloměr konvergence je $R = 3/2$.

**Úloha:** Jaký je Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \sin^2 x$ v bodě $x_0 = \frac{1}{4}\pi$?

**Řesení:** Protože střed je v bodě $\frac{1}{4}\pi$ užijeme substituci $t = x - \frac{1}{4}\pi$, tj. $x = t + \frac{1}{4}\pi$. Navíc, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, a proto

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos 2\big(t + \tfrac{1}{4}\pi\big)\Big) = \frac{1}{2}(1 + \sin 2t).$$

Podle (2.10) máme

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\big(x - \tfrac{1}{4}\pi\big)^{2n+1}.$$

Poloměr konvergence je $R = \infty$.

**Úloha:** Jaký je Taylorův rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$ v bodě $x_0 = 0$?

**Řešení:** Protože $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ užijeme rozvoj (2.8) s $-x^2$ místo $x$.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Integrací obou stran pak dostáváme

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} + C,$$

kde $C$ je integrační konstanta a rovnost platí pro $|x| < 1$. Dosazením za $x = 0$ vychází, že $C = 0$.

**Úloha:** Nalezněte součty řad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

**Řešení:** Derivací geometrické řady (2.8) dostaneme pro $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Stačí obě strany vynásobit $x$ a máme výsledek

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Opětnou derivací předchozího vztahu získáme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Po vynásobení $x$ obdržíme hledaný součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Obě řady mají poloměr konvergence $R = 1$.

**Úloha:** Nalezněte součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n!}\, x^n.$$

**Řešení:** Nejprve řadu roztrhneme na dvě části,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^n = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^n.$$

Aplikací rozvoje exponenciely (2.9) pro $x/2$ máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n!}\, x^n = \frac{x}{2}e^{x/2} + e^{x/2} = e^{x/2}\Big(1 + \frac{x}{2}\Big).$$

**Úloha:** Nalezněte rozvoj funkce $f(x) = \arcsin x$ v bodě $x_0 = 0$.

**Řešení:** Derivace funkce $\arcsin x$ je $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Použijeme binomickou řadu (2.13) pro $\alpha = -1/2$ a s $-x^2$ místo $x$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{2n}.$$

Protože tato řada konverguje stejnoměrně na každém $\langle -a, a\rangle \subset (-1, 1)$ můžeme pro každé $x \in (-1, 1)$ integrovat řadu člen po členu v mezích od 0 do $x$ a dostaneme:

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

1. Nalezněte středy a poloměry konvergence mocninných řad:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n^2} x^n$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^4 (x-3)^n$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+a^n},\ a \geq 0$; e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} (2x-3)^n$; f) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^{n^2}$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n},\ a,b>0$; h) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n^2} (x-3)^n$ i) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)!} x^{n!}$.

2. Najděte Taylorův rozvoj funkce na okolí bodu $x_0 = 0$:

a) $e^{4x}$; b) $\frac{x^2}{(1+x)}$; c) $\frac{x^3}{(1+x)^2}$;

d) $x \cos 5x$; e) $\sin x^2$; f) $3^x + 3^{-2x}$;

g) $\ln(ax+b)$, $a \neq 0$, $b > 0$; h) $(1+x)e^{-x}$; i) $(1+x^2) \operatorname{arctg} x$;

j) $\frac{5-2x}{x^2-5x+6}$; k) $\frac{1}{(2+x^2)^2}$; l) $\frac{x}{(x+1)(x^2-1)}$;

m) $\sin 3x \sin 5x$; n) $\sin x \cos^2 x$; o) $\ln \frac{3-2x}{3+2x}$.

3. Najděte Taylorův rozvoj funkce na okolí zadaného bodu:

a) $e^{4x}$, $x_0 = -1$; b) $1/x^2$, $x_0 = 4$; c) $x^3 - x$, $x_0 = -2$;

d) $\ln x$, $x_0 = 5$; e) $\cos^2 x$, $x_0 = -1$; f) $3^x + 3^{-2x}$, $x_0 = 2$;

4. Určete součty následujících řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{n!} x^{3n}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{(2n)!} x^n$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$.

## Výsledky.

**1.** a) $x_0 = 0$, $R = 0$; b) $x_0 = 0$, $R = \infty$; c) $x_0 = 3$, $R = 1$; d) $x_0 = 0$, $R = 1$ pro $a \leq 1$ a $R = a$ pro $a > 1$; e) $x_0 = 3/2$, $R = 1/2$; f) $x_0 = 0$, $R = 1$; g) $x_0 = 0$, $R = \max\{a, b\}$; h) $x_0 = 3$, $R = e^3$; i) $x_0 = 0$, $R = \infty$.

**2.** a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} x^n$, $R = \infty$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}$, $R = 1$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{n+3}$, $R = 1$;
d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n}}{(2n)!} x^{2n+1}$, $R = \infty$; e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$, $R = \infty$; f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 3}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n \ln^n 3}{n!} x^n$, $R = \infty$; g) $\ln b + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^n \frac{x^n}{n}$, $R = b/|a|$;
h) $1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n$, $R = \infty$; i) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}$, $R = 1$;

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\big(2^{-(n+1)}+3^{-(n+1)}\big)x^n$, $R=2$; k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2^{n+2}}x^{2n}$, $R=\sqrt{2}$;

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^n(2n+1)}{4}-\frac{1}{4}\Big)x^n$, $R=1$; m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}(1-2^{4n})x^{2n}$, $R=\infty$;

n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4(2n+1)!}(1+3^{2n+1})x^n$, $R=\infty$; o) $\displaystyle\ln\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\bigg(\Big(\frac{-3}{2}\Big)^n-\Big(\frac{2}{3}\Big)^n\bigg)\frac{x^n}{4}$, $R=2/3$.

**3.** a) $\displaystyle e^{-4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}(x+1)^n$; b) $\displaystyle\tfrac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-4)^n$; c) $(x+2)^3-6(x+2)^2+12(x+2)-6$;

d) $\displaystyle\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-5)^n$; e) $\displaystyle\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}}{(2n)!}(x+1)^{2n}+\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n+1}}{(2n+1)!}(x+1)^{2n+1}$;

f) $\displaystyle 3^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 3}{n!}(x-2)^n+3^{-4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n\ln^n 3}{n!}(x-2)^n$.

**4.** a) $-\ln(1-x^2)$, $R=1$; b) $x$, $x>0$; c) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}-1$, $R=1$, d) $(1+3ex^3)e^{x^3}$, $R=\infty$;

e) $\big(1-\tfrac{1}{2}x\big)\cos x-\tfrac{1}{2}\sin x$, $R=\infty$; f) $2x\operatorname{arctg} x-\ln(1+x^2)$, $R=1$.

# Kapitola 3

# Fourierovy řady

Rozvoj diferenciálního a integrálního počtu v 17. století byl silně motivovám fyzikálními problémy a fyzika si podržela tuto roli i v dalších stoletích. Např. problém najít rovnici popisující vibraci struny nebo vedení tepla vedl k následující otázce. Řada tvaru

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.1}$$

se nazývá trigonometrická řada. (Tvar $\frac{1}{2}a_0$ u aditivní konstanty je výhodný z důvodu, který uvidíme později.) Protože všechny funkce $\cos nx$ a $\sin nx$ jsou $2\pi$-periodické, je výše uvedená řada – pokud konverguje – také $2\pi$-periodická. Otázka nyní zní: Je každá $2\pi$-periodická funkce napsatelná ve tvaru trigonometrické řady? A pokud ne, jaké $2\pi$-periodické funkce se takto zapsat nedají? Uvedené problémy vedly ke vzniku teorie Fourierových řad[1]. Konečné odpovědi na některé z otázek kolem Fourierových řad byly dány teprve až ve 20. století.

## 1 Periodické funkce

Funkce $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **periodická** s periodou $T > 0$, pokud platí

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Je-li $f$ periodická s periodou $T$, je také periodická s periodou $nT$ pro $n \in \mathbb{N}$. Nejmenší perioda (pokud existuje) se nazývá hlavní perioda funkce $f$. Je-li $x$ interpretováno jako čas, pak počet period za jednotku času se nazývá frekvence,

$$\text{frekvence} = \frac{1}{T}.$$

Někdy se používá název *kruhová frekvence* pro $2\pi$-násobek frekvence

$$\text{kruhová frekvence} = \frac{2\pi}{T}$$

[1] Joseph Fourier zavedl tento typ řad ve svém článku z roku 1807 o řešení rovnice vedení tepla.

a měří se v radiánech za jednotku času. Každá funkce na omezeném intervalu $\langle a, b)$ může být prodloužena na periodickou funkci s periodou $T = b - a$,

$$f(x + nT) := f(x), \quad x \in \langle a, b), \ n \in \mathbb{N}.$$

**Příklad 3.1.**

(i) Funkce $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ jsou periodické s periodou $2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Hlavní perioda je $2\pi$.

(ii) Funkce $f(x) = \sin \omega x$, $g(x) = \cos \omega x$ jsou periodické s hlavní periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega \neq 0$.

(iii) Konstantní funkce je periodická s každou periodou $T > 0$, a nemá proto hlavní periodu.

(iv) Existuje i nekonstantní periodická funkce, která nemá hlavní periodu:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \text{ racionální;} \\ 0, & \text{pro } x \text{ iracionální.} \end{cases}$$

Ať už je $x$ racionální nebo iracionální, přičtením racionálního čísla typ $x$ nezměníme. Je-li $T$ jakékoli kladné racionální číslo, pak $D(x + T) = D(x)$. Funkce $D(x)$ je navíc nespojitá v každém bodě. To není náhoda, protože periodická funkce s libovolně malou periodou je buď konstanta nebo všude nespojitá funkce.

(v) Periodická funkce typu $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ se nazývá harmonická funkce. Můžeme ji rozepsat

$$A \sin(\omega x + \varphi) = A \sin \varphi \, \cos \omega x + A \cos \varphi \, \sin \omega x = a \cos \omega x + b \sin \omega x,$$

kde $a = A \sin \varphi$ a $b = A \cos \varphi$. Vidíme, že trigonometrická řada je součtem harmonických funkcí se zvyšujícími se násobky frekvencí.

(vi) Funkce $e^{ix}$ má periodu $2\pi$, neboť $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Máme-li funkci $f$ s periodou $T$ a parametr $\lambda > 0$, pak funkce $f(\lambda x)$ má periodu $T/\lambda$. V dalším textu se soustředíme na funkce s periodou $2\pi$, neboť všechny výsledky mohou být v případě potřeby přeškálovány na obecnou periodu.

## 2 Fourierovy koeficienty

Předpokládejme, že trigonometrická řada (3.1) konverguje stejnoměrně k funkci $f$,

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{3.2}$$

Protože funkce $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ jsou spojité, je podle Věty 1.11 spojitý i její součet $f$. Navíc, můžeme řadu integrovat člen po členu.

$$\int_0^{2\pi} f \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} a_0 \,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \,\mathrm{d}x \right). \tag{3.3}$$

Protože integrál z funkce $\sin x$ nebo $\cos x$ přes jejich periodu je nulový, zbyde v rovnici (3.3) pouze

$$\int_0^{2\pi} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} a_0 \,\mathrm{d}x, \quad \text{tj.} \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \,\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

K hodnotám dalších koeficientů $a_n, b_n$ se dostaneme podobným způsobem. Budeme k tomu ale potřebovat následující vztahy, kterým se říká ortogonální relace.

**Lemma 3.2.** *Mějme $k, n \in \mathbb{N}$. Pak*

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx \,\mathrm{d}x = 0 \quad \textit{a}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin nx \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \textit{pro } k \neq n; \\ \pi & \textit{pro } k = n. \end{cases}$$

**Důkaz.** Vztahy plynou z goniometrických identit

$$\begin{aligned} \sin x \cos y &= \tfrac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)), \\ \sin x \sin y &= \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \\ \cos x \cos y &= \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)), \end{aligned}$$

a faktu, že integrály přes periodu sinů a kosinů jsou nulové. Zbývá doplnit, že pro $k = n$ užijeme vzorec $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ a $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ a dostaneme

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \,\mathrm{d}x = \pi.$$

□

Vrátíme se k rovnici (3.2) a vynásobíme ji funkcí $\cos kx$, $k \geq 1$. I po vynásobení zůstane řada stejnoměrně konvergentní, a proto ji opět integrujeme člen po členu.

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} a_0 \cos kx \,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos kx \,\mathrm{d}x + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \cos kx \,\mathrm{d}x \right).$$

Díky ortogonálním relacím zbyde na pravé starně jediný nenulový člen,

$$a_k \int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, \mathrm{d}x = a_k \pi.$$

Odtud

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x.$$

Podobně, vynásobením rovnice (3.2) funkcí $\sin kx$ a integrací zjistíme, že

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x.$$

Jsme tak motivováni k definici Fourierových koeficientů. Termín *integrovatelná funkce $f$* na intervalu $\langle a, b \rangle$ znamená, že $\int_a^b |f| \, \mathrm{d}x < \infty$.

**Definice 3.3.** *Mějme $2\pi$-periodickou funkci $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrovatelnou na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Čísla*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x, \quad k \geq 0, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x, \quad k \geq 1, \tag{3.5}$$

*se naývají* **Fourierovy koeficienty** *funkce $f$. Trigonometrická řada* (3.1) *s těmito koeficienty se nazývá* **Fourierova řada** *funkce $f$. Konverguje-li Fourierova řada funkce $f$ v bodě $x$ k hodnotě $f(x)$, řekneme, že $f$ je reprezentována Fourierovou řadou v bodě $x$.*

Poznamenejme, že zahrnutí indexu $k = 0$ do vzorce pro koeficienty $a_k$ vysvětluje, proč jsme volili aditivní konstantu v (3.1) ve tvaru $\frac{1}{2}a_0$ a nikoli jen $a_0$. Dále, ve vztazích (3.5) můžeme integrovat přes jakýkoli interval délky $2\pi$. Důvodem je, že $T$-periodická funkce $f$ integrovatelná na $\langle 0, T \rangle$ je integrovatelná na každém intervalu $\langle a, a + T \rangle$ a platí

$$\int_0^T f \, \mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f \, \mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

Dosavadní vyšetřování můžeme shrnout:

> Konverguje-li trigonometrická řada (3.1) stejnoměrně k funkci $f$, pak tato řada je nutně její Fourierovou řadou a reprezentuje funkci $f$ ve všech bodech.

Výše uvedené pozorování má následující jednoduchý důsledek. Uvažujme funkci danou nějakou *konečnou* trigonometrickou řadou, např.

$$f(x) = -3 + 2 \cos 4x - \sin 7x.$$

Ta je (jako každá konečná řada) stejnoměrně konvergentní, a proto je automaticky svou Fourierovou řadou. To nám může ulehčit některé výpočty. Např. rozvoj funkce

$$f(x) = \sin 3x \cos 3x - 4\cos^2 5x$$

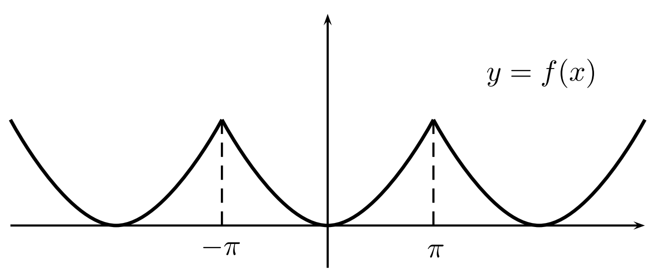
nemusíme počítat, když použijeme běžné goniometrické identity. Pak

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\sin 6x - 4\tfrac{1}{2}(1+\cos 10x) = -2 - 2\cos 10x + \tfrac{1}{2}\sin 6x.$$

Což je Fourierova řada reprezentující $f$.

Pomocí vzorců (3.5) můžeme definovat Fourierovy koeficienty pro jakoukoli integrovatelnou funkci $f$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$ a sestrojit příslušnou Fourierovu řadu. Obecně však nelze očekávat, že tato Fourierova řada bude reprezentovat funkci $f$ všude. Stačí, když změníme hodnotu funkce v jednom bodě. Fourierovy koeficienty se nezmění a Fourierova řada se rovněž nezmění. Vždycky tak můžeme přinutit funkci, aby *nebyla* reprezentována svou Fourierovou řadou v zadaném bodě. Správně položená otázka proto zní, zda *spojitá* $2\pi$-periodická funkce je reprezentována svou Fourierovou řadou? První příklad spojité funkce, jejíž Fourierova řada diverguje v některých bodech se objevil už během 19. století. Zůstával problém, zda může mít spojitá funkce divergentní Fourierovu řadu ve všech bodech. V roce 1966 dokázal Carleson[2], že to nastat nemůže. Fourierova řada každé spojité funkce konverguje k této funkci skoro všude. (Termín „skoro všude“ má zde přesně definovaný matematický smysl.) Srovnáme-li to s Taylorovou řadou, která může pro nekonečně diferencovatelnou funkci divergovat všude kromě povinného středu, lze říci, že Fourierovy řady se chovají lépe než Taylorovy.

**Příklad 3.4.** Určíme Fourierovu řadu pro $2\pi$-periodickou funkci $f$ takovou, že $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$, viz obr. 3.1.




Obr. 3.1.

Je zřejmé, že $f$ je sudá funkce, $f(-x) = f(x)$. Funkce $\sin nx$ je lichá a součin sudé a liché funkce je funkce lichá. S uvážením (3.6) máme,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \, \mathrm{d}x = 0,$$

neboť integrál z liché funkce přes symetrický interval $\langle -\pi, \pi\rangle$ je automatický nulový. Proto Fourierova řada sudé funkce obsahuje jen kosinové členy. (U lichých funkcí naopak Fourierova řada obsahuje jen sinové členy.)

[2] Lennart Carleson, švédský matematik

Vypočítáme koeficienty $a_n$. Pro $a_0$ máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Pro $n \geq 1$ užijeme dvakrát integraci per partes a dostaneme

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[x^2 \cdot \frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{2}{\pi n^2}\left[x \cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Fourierova řada funkce $f$ je

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \frac{4\cos 2x}{2^2} - \frac{4\cos 3x}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Zatím ještě není jasné, jaký vztah má tato řada k funkci $f$. Později, podle Věty 3.6 uvidíme, že řada reprezentuje funkci $f$ ve všech bodech.

# 3 Konvergence Fourierových řad

Pro formulaci hlavní věty o konvergenci potřebujeme pojem po částech monotonní funkce.

**Definice 3.5.** *Funkce $f$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ se nazývá* **po částech monotonní***, pokud existuje konečně mnoho dělících bodů $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$, že $f$ je spojitá a monotonní na každém intervalu $(t_i, t_{i+1})$ a ve všech dělících bodech existují vlastní jednostranné limity funkce $f$.*

Funkce v Příkladu 3.4 je po částech monotonní na $\langle -\pi, \pi\rangle$ s dělícím bodem $t_1 = 0$.

Následující větu o konvergenci Fourierovy řady pouze vyslovíme. Její důkaz přesahje cíle tohoto textu. Ve větě užíváme krátké označení pro jednostranné limity:

$$f(x-) = \lim_{t\to 0-} f(x+t), \qquad f(x+) = \lim_{t\to 0+} f(x+t).$$

**Věta 3.6.** *Mějme $2\pi$-periodickou funkci $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, která je po částech monotonní na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Pak její Fourierova řada konverguje pro všechna $x$ a platí*

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x), & \text{v bodě spojitosti funkce } f; \\ \dfrac{f(x-)+f(x+)}{2}, & \text{v bodě nespojitosti funkce } f. \end{cases}$$

*Navíc, Fourierova řada konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle a, b\rangle \subset \langle 0, 2\pi\rangle$, který neobsahuje body nespojitosti funkce $f$.*

Specielně, každá $2\pi$-periodická, po částech monotonní a spojitá funkce je reprezentována svou Fourierovou řadou, která konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Podle Věty 3.6 Fourierova řada funkce z Příkladu 3.4 reprezentuje tuto funkce všude, neboť jde o spojitou funkci. Na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ platí

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Hodnoty v bodech $x = 0$ a $x = \pi$ umožňují určit součty řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Pro hodnotu $x = 0$ dosteneme,

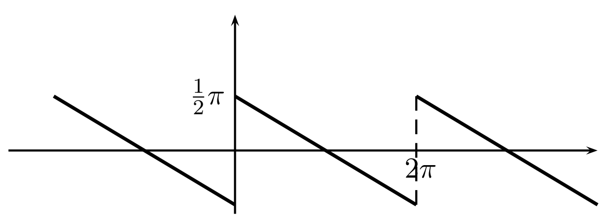
$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad \text{tj} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \tag{3.7}$$

Podobně pro hodnotu $x = \pi$,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}, \quad \text{tj} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Příklad 3.7.** Nalezneme Fourierovu řadu $2\pi$-periodické funkce $f$, která je definovaná na intervalu $\langle 0, 2\pi)$ předpisem $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ a zjistíme, ve kterých bodech řada reprezetuje funkci $f$.

Graf funkce je na obr. 3.2.




Obr. 3.2.

Funkce $f$ je lichá, stačí spočítat koeficienty $b_n$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin nx \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ x \cdot \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Podle Věty 3.6 platí, že

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

pro všechny body $x \in \mathbb{R}$ mimo body $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, neboť v těchto bodech je $f$ nespojitá. Hodnota řady pro $x = 2k\pi$ se rovná průměru jednostranných limit, což je 0.

Dosadíme za $x = \pi/2$:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi n)}{n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Tento vztah se někdy nazývá Leibnitzův vzorec.

V předchozích příkladech jsme si všimli, že přítomnost symetrie zjednodušuje výpočty. U sudých funkcí chybí sinové členy ve Fourierově řadě, u lichých funkcí kosinové. Tento fakt lze využít i obráceně. Mějme funkci $f$ definovanou na intervalu $(0, \pi)$. Můžeme ji dodefinovat na $(-\pi, \pi)$ tak, aby byla sudá nebo lichá. Pak Fourierova řada bude obsahovat jen kosinové členy nebo naopak jen sinové. Obě řady budou na $(0, \pi)$ reprezentovat tutéž funkci. Mimo $(0, \pi)$ budou obecně různé.

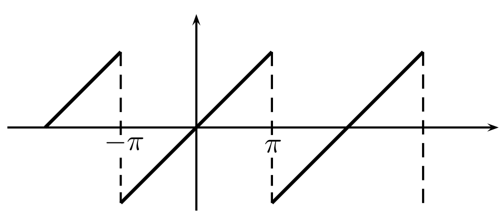
**Příklad 3.8.** Funkci $f(x) = x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ rozšíříme na $2\pi$-periodickou funkci třemi různými způsoby a nalezneme příslušné Fourierovy řady.

(*a*) $$f_1(x) = x \quad x \in \langle -\pi, \pi);$$

(*b*) $$f_2(x) = |x| \quad x \in \langle -\pi, \pi);$$

(*c*) $$f_3(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\pi, 0), \\ x, & x \in \langle 0, \pi); \end{cases} .$$

Začneme funkcí $f_1$, jejíž graf je na obrázku 3.4(a).




Obr. 3.4(*a*).

Funkce $f_1$ je lichá, stačí vypočítat koeficienty $b_n$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[ -x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, \mathrm{d}x$$

$$= -2 \frac{\cos \pi n}{n} + 0 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Fourierova řada funkce $f_1$ je

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx,$$

a reprezentuje $f_1$ ve všech bodech $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Funkce $f_2$ je sudá, vyčíslíme proto jen koeficienty $a_n$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \, \mathrm{d}x = \pi.$$

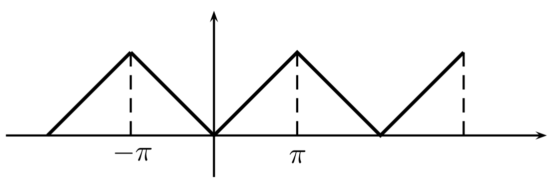
Stejně jako výše použijeme per partes a dostaneme pro hodnoty $a_k$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[ x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n} \, \mathrm{d}x = 0 + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}. \end{aligned}$$

V tomto případě jsou koeficienty $a_n = 0$ pro sudá $n$, takže máme

$$f_2(x) = \tfrac{1}{2}\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x,$$

a řada reprezentuje funkci $f_2$ všude. Graf je na obr. 3.4(b).

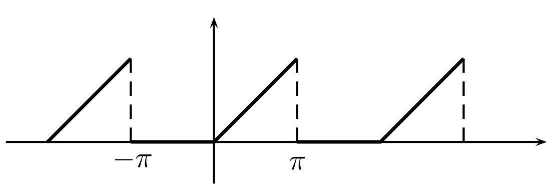



Obr. 3.4(*b*).

Zbývá případ funkce $f_3$. Ta nemá žádnou symetrii, proto její Fourierova řada bude obecně obsahovat jak kosinové tak sinové členy. Můžeme se ale vyhnou výpočtu, pokud si všimneme, že $f_3 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. Její Fourierova řada bude tak aritmetický průměr Fourierových řad funkcí $f_1$ a $f_2$.

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx + \tfrac{1}{2}\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x \right) \\ &= \tfrac{1}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right). \end{aligned}$$

Graf je na obr. 3.4(c).




Obr. 3.4(*c*).

# 4 Ortogonální systém funkcí

Tato část nepřináší k Fourierovým řadám z výpočetního hlediska nic navíc. Jejím cílem je zařadit Fourierovy řady do širšího kontextu a vytvořit jistý nadhled nad tématem.

Připomeneme si strukturu euklidovského prostoru $\mathbb{R}^d$. Máme-li prvky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ o složkách $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)$, můžeme provést kromě sčítání a skalárního násobku ještě další operaci: skalární součin. Označíme ho

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{d} x_n y_n.$$

Se skalárním součinem se automaticky pojí norma,

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \left(\sum_{n=1}^{d} x_n^2\right)^{1/2}.$$

Skalární součin a norma umožňuje zavést do lineárního prostoru $\mathbb{R}^d$ bázi se zvláště užitečnými vlastnostmi. Jejími prvky jsou jednotkové vektory navzájem na sebe kolmé. Prvky takové **ortonormální báze** označíme $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_d$, kde $\boldsymbol{e}_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots 0)$, přičemž jednička stojí na $i$-tém místě. Každý prvek $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ má jednoznačné vyjádření

$$\boldsymbol{x} = \sum_{n=1}^{d} x_n \boldsymbol{e}_n, \qquad x_n = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n). \tag{3.8}$$

Obratíme teď pozornost k periodickým funkcím. Symbol $L$ bude označovat množinu všech $2\pi$-periodických funkcí $f$, pro které je $f^2$ integrovatelná na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, tj.

$$L = \left\{ f \;\middle|\; f \text{ je } 2\pi\text{-periodická a } \int_0^{2\pi} f^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Důvod, proč chceme integrovatelnost druhé mocniny a ne pouze funkce samotné, uvidíme za chvíli.

Mějme dvě funkce $f, g \in L$. Jejich součet a skalární násobky jsou opět $2\pi$-periodické funkce. Navíc, díky nerovnosti $(f+g)^2 \le 2(f^2 + g^2)$ vidíme, že i součet je integrovatelný s druhou mocninou,

$$\int_0^{2\pi} (f+g)^2 \,\mathrm{d}x \le 2 \int_0^{2\pi} f^2 \,\mathrm{d}x + 2 \int_0^{2\pi} g^2 \,\mathrm{d}x < \infty,$$

a tedy prvkem prostoru $L$. Máme tak ověřeno, že $L$ je lineární prostor. Do $L$ zavedeme skalární součin,

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \,\mathrm{d}x,$$

a tím i normu:

$$\|f\| = (f,f)^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Teď je jasné, proč se prostor $L$ skládá z funkcí integrovatelných s druhou mocninou: Máme zaručeno, že jak norma, tak skalární součin prvků budou konečné. Pro normu to je zřejmé a pro skalární součin to plyne z tzv. Hölderovy nerovnosti,

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Má lineární prostor $L$ nějakou bázi analogickou s ortonormální bází euklidovského prostoru? Odpověď je kladná. Podívejme se na množinu funkcí

$$\mathcal{B} = \{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \dots, \cos nx,\ \sin nx, \dots\}$$

Ortogonální relace z Lemmatu 3.2 ukazují, že tyto funkce, uvažované jako prvky prostoru $L$, jsou na sebe kolmé. Navíc vidíme, že jejich normy, kromě první funkce, jsou stejné,

$$\|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}.$$

Pro konstantní funkci 1 je její norma

$$\|1\| = \left(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}.$$

Normalizováním prvků z $\mathcal{B}$ vznikne ortonormální systém,

$$\mathcal{B}^* = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}.$$

Podobně jako v (3.8) bychom teď mohli vyjádřit funkci $f \in L$ ve tvaru lineární kombinace,

$$f = A_0\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + B_n\,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right), \tag{3.9}$$

kde koeficienty jsou příslušné skalární součiny,

$$A_0 = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right),\ A_n = \left(f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right),\ B_n = \left(f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right).$$

Podívejme se na členy této kombinace blíže. První sčítanec lze upravit následovně,

$$A_0\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \left(\int_0^{2\pi} f(x)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}. \tag{3.10}$$

Členy s kosinem se změní podobně,

$$
\begin{aligned}
(3.11) \qquad A_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} &= \Big(f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\Big) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \,\mathrm{d}x \, \frac{\cos nx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \Big(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x\Big) \cos nx = a_n \cos nx.
\end{aligned}
$$

Zcela stejně vyjde pro sinové členy,

$$
(3.12) \qquad B_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} = b_n \sin nx.
$$

Řada (3.9) je jen jiný zápis Fourierovy řady pro funkci $f$. Z tohoto pohledu je rozvoj $2\pi$-periodické funkce do Fourierovy řady zcela přirozený způsob, jak vyjádřit prvek lineárního prostoru pomocí báze. Problémem zůstává, že lineární kombinace je nekonečná, a proto je třeba řešit otázky týkající se konvergence. Pro funkce z prostoru $L$, které jsou navíc po částech monotonní, máme konvergenci zaručenu podle Věty 3.6. V tom případě nám reprezentace ve tvaru (3.9) přece jen může dát jistou užitečnou informaci. V euklidovském prostoru norma prvku splňuje

$$
\|\boldsymbol{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_d^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)^2 + \cdots + (\boldsymbol{x}_d, \boldsymbol{e}_d)^2.
$$

V prostoru $L$ platí to samé,

$$
(3.13) \qquad \|f\|^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2).
$$

Z předchozích výpočtů (3.10), (3.11) a (3.12) můžeme najít vztahy mezi koeficienty $A_n, B_n$ a koeficienty $a_n, b_n$:

$$
A_0 = a_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \; A_n = a_n \sqrt{\pi}, \; B_n = b_n \sqrt{\pi}.
$$

Dosazením do (3.13) dostaneme tzv. Parsevalovu rovnost,

$$
(3.14) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).
$$

**Příklad 3.9.** Aplikací Parsevalovy rovnosti na Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x^2$ z Příkladu 3.4 určíme hodnotu součtu $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n^4}$.

Rozvoj funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ je

$$
x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx.
$$

Levá strana Parsevalovy rovnice je

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^4}{5}.$$

Odtud máme

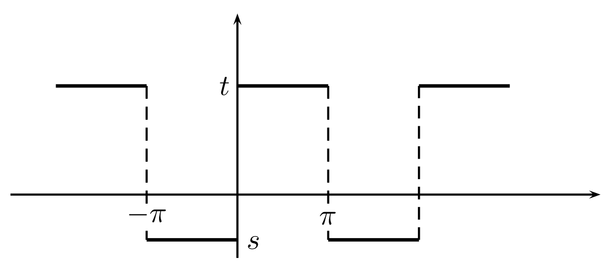
$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}, \quad \text{tj.} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

## 5 Cvičení

**Úloha:** Nalezněte Fourierovu řadu $2\pi$-periodické, po částech konstantní funkce, pro kterou platí

$$f(x) = \begin{cases} s, & \text{pro } x \in \langle -\pi, 0), \\ t, & \text{pro } x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

**Řešení.** Graf funkce $f$ je na obr. 3.4.




Obr. 3.4.

Fourierovy koeficienty mají tvar,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} s\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} t\,\mathrm{d}x\right) = s + t,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} s\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} t\cos nx\,\mathrm{d}x\right) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} s\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} t\sin nx\,\mathrm{d}x\right) = (s-t)\frac{(-1)^n - 1}{\pi n}.$$

Koeficienty u sinů jsou nulové pro sudá $n$ a pro lichá $n$ se rovnají $\dfrac{2(s-t)}{\pi n}$. Podle Věty 3.6 máme,

$$f(x) = \frac{s+t}{2} + 2(s-t)\left(\frac{\sin x}{\pi} + \frac{\sin 3x}{3\pi} + \cdots\right) = \frac{s+t}{2} + 2(s-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)\pi}$$

pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V bodech $x = k\pi$ má řada hodnotu průměru $\frac{1}{2}(s+t)$. Pro specielní volbu $s = -1$ a $t = 1$ dostaneme

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

**Úloha:** Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = -1 + 3\cos x + x^2$, $x \in \langle -\pi, \pi)$.

**Řešení.** První dva členy tvoří část goniometrické řady, proto není třeba je upravovat. Zbylý člen $x^2$ musíme rozvinout do Fourierovy řady. To jsme ale provedli v Příkladu 3.4, takže tento výsledek použijeme.

$$f(x) = -1 + 3\cos x + \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 1 - \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

**Úloha:** Rozviňte funkci $f(x) = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi)$ do kosinové Fourierovy řady a vyšetřete její konvergenci.

**Řešení:** Aby řada obsahovala jen kosinové členy, musí být funkce $f(x)$ sudá. To znamená, že na intervalu $\langle -\pi, 0)$ bude dána předpisem $f(x) = |\sin x|$. Začneme obecným koeficientem $a_n$:

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(x+nx) + \sin(x-nx)) \, \mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos(x+nx)}{n+1} + \frac{\cos(x-nx)}{n-1} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1+(-1)^n}{n+1} - \frac{1+(-1)^n}{n-1} \right) \\ =& -\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)}. \end{aligned}$$

Tento vztah platí pro všechna $n \neq 1$. Proto $a_1$ musíme spočítat zvlášť.

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \, \mathrm{d}x = 0.$$

Celkově,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)} \cos nx = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \cdots \right).$$

Funkce $f(x) = |\sin x|$ je spojitá a počástech monotoní na $\langle -\pi, \pi \rangle$, proto podle Věty 3.6 je reprezentována Fourierovou řadou všude. Navíc tato řada konverguje stejnoměrně.

**Úloha:** Integrací Fourierovy řady funkce $f_1(x) = x$ z Příkladu 3.8 nalezněte Fourierovu řadu pro $2\pi$-periodické rozšíření funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

**Řešení.** Z Příkladu 3.8 máme pro $x \in \langle -\pi, \pi)$ rovnost

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \tag{3.15}$$

Tato řada je stejnoměrně konvergentní na každém intervalu $\langle -a, a\rangle \subset (-\pi, \pi)$. Můžeme tak pro každé $x \in (-\pi, \pi)$ integrovat řadu člen po členu v mezích od 0 do $x$. Levá strana rovnice (3.15) bude $\frac{1}{2}x^2$. Pravá pak

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \frac{1-\cos nx}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos nx,\end{aligned}$$

kde jsme využili znalost součtu řady v (3.7). Celkově dostáváme,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Je to stejný výsledek jako v Příkladu 3.4.

1. Najděte Fourierův rozvoj $2\pi$-periodického rozšíření funkce s daným předpisem na intervalu $\langle -\pi, \pi)$ a vyšetřete konvergenci,

   a) $f(x) = x + \pi$; b) $f(x) = 1 + x + \sin 3x$; c) $f(x) = x + \operatorname{sign}(x)$;

   d) $f(x) = |\sin \frac{1}{2}x|$; e) $f(x) = \min\{\pi, \pi - x\}$; f) $f(x) = x|x|$.

2. Napište následující $2\pi$-periodické funkce jako Fourierovy řady,

   a) $f(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$; b) $f(x) = \arcsin \sin x$; c) $f(x) = |\cos x|$.

3. Vyjádřete následující $2\pi$-periodické funkce jako sinové Fourierovy řady,

   a) $f(x) = \cos 2x$; b) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi), \\ 0, & x \in \langle \frac{1}{2}\pi, \pi). \end{cases}$

4. Vyjádřete následující $2\pi$-periodické funkce jako kosinové Fourierovy řady,

   a) $f(x) = \sin 2x$; b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, a), \\ 0, & x \in \langle a, \pi), \end{cases} \quad a \in (0, \pi).$

## Výsledky.

**1.** a) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$; b) $1 + \sin 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\left((-1)^{n+1} + \frac{1-(-1)^n}{\pi}\right) \sin nx$; d) $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - \frac{1}{4}}$;

e) $\frac{3}{4}\pi - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx\right)$;
f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} - \frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^3}\right) \sin nx$.

**2.** a) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{2} \cos nx$; b) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$; c) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \cos 2nx$;

**3.** a) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n+1)(2n-3)} \sin(2n-1)x$; b) $\frac{1}{2} \sin x - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^2-1} \sin 2nx$;

**4.** a) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 - 4} \cos nx$; b) $\frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin an}{\pi n} \cos nx$;