Matematik připomíná slepce hledajícího v temné místnosti černou kočku, která tam není.

CHARLES DARWIN

Předmluva

Tato skripta se zabývají analýzou v komplexním oboru. Je to partie řadící se ke klasické části analýzy. Metody a postupy jsou mnohokráte zpracovány a prověřeny. Naše snaha spočívala v tom, aby si tento text udržel jistou matematickou kulturu a nadhled. To zase od čtenáře vyžaduje určitou dávku aktivní pozornosti.

První čtyři kapitoly tvoří jakýsi uzavřený celek, který pokrývá základní teorii holomorfních funkcí. Následující tři kapitoly dále rozvíjejí základy obsažené v první části. Výklad směřuje k reziduové větě, která je tradičním završením kurzu komplexní proměnné. V Příloze je pojednáno o funkci $\Gamma(z)$ v komplexním oboru.

Pro úplnost jen poznamenejme, že věty, tvrzení, poznámky a ilustrační příklady jsou číslovány v každé kapitole zvlášť, což umožňuje lepší orientaci. Symbol $\square$ označuje konec důkazu. Za každým tématickým celkem následuje několik typických řešených úloh. Stupeň zvládnutí látky si čtenář pak může ověřit na připojených neřešených úlohách.

Praha, září 2017

Obsah

Kapitola 1

Komplexní čísla

1 Úvod

První zmínky o komplexních číslech lze vysledovat na počátek 16. století. Italský matematik, lékař a astrolog Geronimo Cardano (1501 - 1576) s nimi pracoval ve velmi intuitivní rovině, což mu ovšem nezabránilo v nalezení správných vzorců pro řešení kvadratické a kubické rovnice. Řešení, která vyžadovala odmocňování záporných čísel však nepovažoval Cardano za skutečná řešení. Odtažitý přístup ke komplexním řešením rovnic trval ještě dlouho. René Descartes (1596 - 1650) nazýval (možná s nádechem ironie) takováto řešení „imaginární“, a to jim zůstalo. Rovněž Leonard Euler (1707 - 1783) považoval komplexní kořeny vhodné pouze k tomu, aby demonstrovaly, že rovnice ve skutečnosti žádné řešení nemá. Teprve Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) odmýtizoval komplexní čísla a matematicky korektním způsobem je zavedl. Jeho současník, irský matematik, fyzik a astronom William Rowan Hamilton (1805 - 1865) pak pojal komplexní čísla jako dvojice reálných čísel se zvláštními aritmetickými operacemi. Poznamenejme, že Hamilton se nezastavil jen u dvojic, ale zavedl ještě obecnější strukturu tzv. kvaterniony, což jsou čtveřice reálných čísel s vhodně definovaným sčítáním a násobením. Naše definice komplexních čísel je v podstatě Hamiltonova.

2 Množina komplexních čísel

Při zavádění komplexních čísel se často můžeme setkat s následujícím postupem:

> Označme $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Komplexní číslo je pak $x + \mathrm{i}y$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Tento postup má však jednu slabinu. Symbol $\sqrt{-1}$ nemá v oboru reálných čísel smysl. Dostává ho až v komplexních číslech, tj. *po té*, co jsou komplexní čísla zavedena. Nelze proto komplexní čísla pomocí něj definovat. Mohlo by se teoreticky stát, že kdybychom si postulovali existenci jistého objektu „i“ s vlastností $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$, dostali bychom se po chvíli počítaní do sporu. Prvotním je důkaz existence systému, v jehož rámci $\sqrt{-1}$ získává smysl.

Začneme s definicí jistého abstraktního modelu, který se vzápětí ukáže být tím, co hledáme.

Definice 1.1. *Symbolem* $\mathbb{C}$ *označíme množinu dvojic* $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$*, pro které zavedeme následující operace*

- *sčítání:* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- *násobení:* $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Množinu $\mathbb{C}$ *spolu s výše uvedenými operacemi nazýváme* ***obor komplexních čísel*** *nebo stručně* ***komplexní čísla****. Prvek* $z \in \mathbb{C}$ *se nazývá komplexní číslo.*

Podíváme se podrobněji, co vlastně Definice 1.1 zavádí. Množina dvojic (x, y) je rovina $\mathbb{R}^2$, což je to samé jako množina dvourozměrných vektorů. Čím se liší $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$? Liší se operacemi, které můžeme s prvky jednotlivých množin provádět. Sčítání vektorů a komplexních čísel se shoduje. V množině $\mathbb{C}$ je navíc operace násobení. Mohli bychom namítnout, že i vektory v $\mathbb{R}^2$ můžeme násobit pomocí skalárního součinu. Výsledek takového součinu je ale číslo (skalár) a to není prvek $\mathbb{R}^2$. Naopak násobení komplexních čísel, jak bylo zavedeno v Definici 1.1, má za výsledek opět uspořádanou dvojici, tj. komplexní číslo.

Přesto něco společného množiny $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$ mají. Každý prvek (x, y) lze vyjádřit pomocí báze v $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x\,(1, 0) + y\,(0, 1).$$

Když se podíváme, jak se chovají prvky typu $(x, 0)$ na sčítání a násobení zavedené v Definici 1.1, zjistíme, že

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

To znamená, že při zjednodušeném označení $(x, 0) \sim x$ se tyto prvky chovají při aritmetických operacích jako obyčejná reálná čísla: součtu prvků $x_1 \sim (x_1, 0)$ a $x_2 \sim (x_2, 0)$ odpovídá $x_1 + x_2 \sim (x_1 + x_2, 0)$ a podobně pro součin. Speciálně, bázový prvek $(1, 0)$ se chová při našem násobení jako číslo 1 při obvyklém násobení reálných čísel,

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y).$$

A co druhý bázový prvek $(0, 1)$? Vynásobíme-li ho se sebou samým, dostaneme

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \sim -1.$$

Je to tedy takový prvek množiny $\mathbb{C}$, jehož druhá mocnina je rovna -1. Stejně jako výše, zjednodušíme si zápis kratším označením

$$(0, 1) \sim \mathrm{i}.$$

Pak si prvky množiny $\mathbb{C}$ můžeme zapisovat ve vhodnějším a úspornějším tvaru

$$(x, y) = x\,(1, 0) + y\,(0, 1) \sim x + \mathrm{i}y.$$

Od této chvíle budeme psát komplexní čísla z právě v tomto tzv. *kartézském tvaru*

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad \text{kde } \mathrm{i}^2 = -1.$$

Symbol i budeme nazývat *imaginární jednotkou.* Při takovémto označení se násobení zavedené v Definici 1.1 stane přirozeným v tom smyslu, že jde o obvyklé násobení dvojčlenů s přihlédnutím k tomu, že $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 + \mathrm{i}x_1y_2 + \mathrm{i}x_2y_1 + \mathrm{i}^2y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Můžeme teď přikročit k dalším potřebným pojmům.

Definice 1.2. *Nechť $z \in \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}y$. Číslo x (resp. y) se nazývá* ***reálná*** *(resp.* ***imaginární)*** ***část*** *čísla z a označují se*

$$x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z).$$

Je-li $z \in \mathbb{C}$, pak $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ se nazývá číslo ***komplexně sdružené*** *k z.* ***Absolutní hodnota*** *(modul) čísla z je*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Důležitý a snadno ověřitelný fakt je vztah

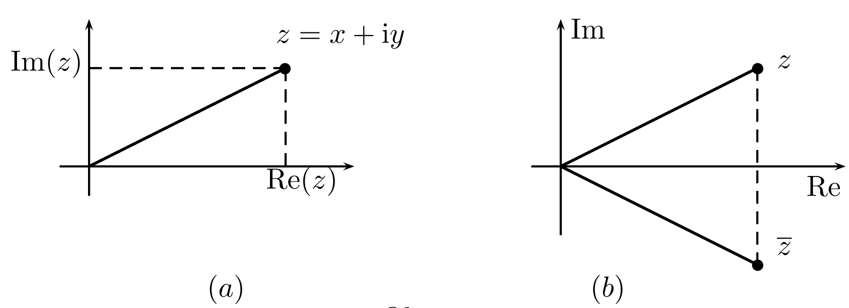
$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Speciálně je $z\overline{z}$ vždy reálné nezáporné číslo. Toho využijeme k vyjádření podílu dvou komplexních čísel. Nechť $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$ a $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$. Pak

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

I když jsme v Definici 1.1 zavedli pouze dvě operace mezi komplexními čísly – sčítání a násobení – vidíme, že pomocí nich jsme právě odvodili i pravidlo pro dělení.

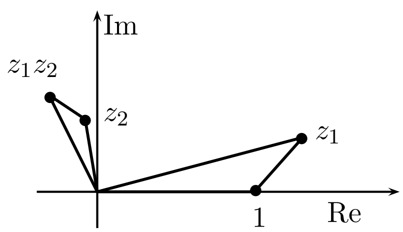
Protože množina $\mathbb{C}$ je vlastně $\mathbb{R}^2$ s přidanou operací násobení, můžeme si komplexní číslo $z = x + \mathrm{i}y$ zobrazit jako bod (x, y) v rovině, viz obr. 1.1(a).



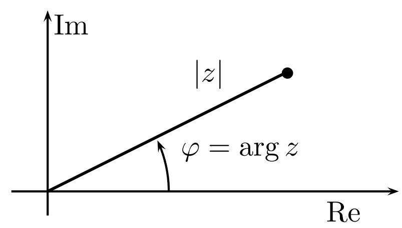
Obr. 1.1.

Proto se někdy množině $\mathbb{C}$ říká komplexní rovina nebo také Gaussova rovina. V této interpretaci je $|z|$ vzdálenost bodu z od počátku. Obecně, $|z_1 - z_2|$ je vzdálenost bodů $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Komplexně sdružené číslo $\overline{z}$ je souměrné s číslem z podle reálné osy Re, viz obr. 1.1(b).

Sčítání komplexních čísel odpovídá známému grafickému sčítání vektorů. Ovšem operace násobení je poněkud delikátnější co se geometrické interpretace týče. Mějme $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ a jejich součin z_1z_2. Trojúhelník s vrcholy $0, 1, z_1$ a trojúhelník s vrcholy $0, z_2, z_1z_2$ jsou podobné, viz obr. 1.2(a).



(a)



(b)

Obr. 1.2.

Analogicky budou podobné i trojúhelníky s vrcholy $0, 1, z_2$ a $0, z_1, z_1z_2$. Důkaz podáme za chvíli, až si zavedeme vhodnější označení pro argumentaci.

Poloha bodu v rovině může být zadána kromě kartézských souřadnic ještě mnoha způsoby. Velmi používané jsou polární souřadnice. V nich je bod určen svou vzdáleností od počátku a orientovaným úhlem, který svírá polohový vektor s osou x. Pro komplexní čísla to znamená, že číslo z je určeno velikostí své absolutní hodnoty $|z|$ a příslušným úhlem, který se v komplexní analýze nazývá *argument* čísla z, $\varphi = \arg z$, viz obr. 1.2(b). Pak

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\,\cos\varphi, \quad \mathrm{Im}(z) = |z|\,\sin\varphi. \tag{1.1}$$

Můžeme tedy číslo z psát ve tvaru

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

který budeme nazývat *goniometrický*. Číslo z se nezmění, přičteme-li k jeho argumentu celočíselný násobek 2π. Stačí tedy uvažovat argument v jistém intervalu délky 2π. Jaký konkrétní interval si vybereme, záleží zcela na nás. Nejobvyklejší volby jsou $\langle 0, 2\pi)$ nebo $(-\pi, \pi\rangle$. V tomto textu se dohodneme, že budeme vždy uvažovat

$$\arg z \in (-\pi, \pi\rangle.$$

Tím je argument jednoznačně určen rovnicemi (1.1) pro všechna $z \neq 0$. Argument čísla $z = 0$ není definován.

Podívejme se nyní na součin čísel vyjádřených v goniometrickém tvaru.

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= |z_1|\,|z_2|\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big) \\ &= |z_1z_2|\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big). \end{aligned} \tag{1.2}$$

V poslední rovnosti jsme užili kromě součtového vzorce také fakt, že $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, viz cvičení 6. Při součinu komplexních čísel se tedy absolutní hodnoty násobí. Kdybychom dodali: a argumenty sčítají, nebyla by úplně pravda. Správně je to pouze v případě, že

$$\varphi_1 + \varphi_2 \in (-\pi, \pi\rangle.$$

Protože součet $\varphi_1 + \varphi_2$ může obecně ležet i mimo interval $(-\pi, \pi\rangle$, musíme ho posunout o 2π, eventuelně o -2π, aby hodnota úhlu $\varphi_1 + \varphi_2 \pm 2\pi$ ležela opět v základním intervalu.

Z výše uvedeného už plyne tvrzení o podobnosti trojúhelníků na obr. 2(a): Úhel $\sphericalangle(z_1, 0, 1)$ je $\arg z_1$, úhel $\sphericalangle(z_2, 0, z_1 z_2)$ je $\arg(z_1 z_2) - \arg z_2 = \arg z_1$. Jsou tedy stejné. Protože stejný je i poměr velikostí přilehlých stran u obou trojúhelníků, jsou tyto trojúhelníky podobné.

Víme-li, co se děje s argumenty a absolutní hodnotou komplexních čísel při násobení, víme také ihned, co se děje při dělení.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big),$$

kde $\varphi_1 = \arg z_1$ a $\varphi_2 = \arg z_2$.

Příklad 1.1. Zjistěte absolutní hodnotu a argument čísla $\big(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\big)^{30}$.

Začněme s absolutní hodnotou.

$$\big|-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\big| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Tím

$$\big|(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{30}\big| = 2^{30}.$$

Dále, z rovnic (1.1) plyne, že pro argument φ čísla $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ platí

$$-1 = 2\cos\varphi, \qquad \sqrt{3} = 2\sin\varphi.$$

Tato soustava má v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$ jediné řešení a to $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Odtud

$$\big(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\big)^{30} = 2^{30}\big(\cos 30\varphi \ + \sin 30\varphi\big) = 2^{30}\big(\cos 20\pi \ + \sin 20\pi\big).$$

Protože jsme se dohodli, že argument bude v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$, musíme ho posunout o vhodný násobek 2π. Tím dostaneme, že $\arg\big(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\big)^{30} = 0$. Sestavíme-li goniometrický tvar, tak

$$\big(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\big)^{30} = 2^{30}(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 2^{30}.$$

Až dosud jsme se zabývali aritmetickými operacemi s komplexními čísly. Ty tvoří tzv. *algebraickou* strukturu množiny $\mathbb{C}$. Je tu ale ještě jiný aspekt, ze kterého musíme množinu $\mathbb{C}$ prozkoumat. Nazývá se *metrická* (nebo také *topologická*) struktura komplexní roviny. Metrika je vlastně přiřazení jistého čísla každým dvěma prvkům zkoumané množiny, které prohlásíme za jejich vzdálenost. Pro $\mathbb{C}$ už máme metriku zavedenou, neboť vzdálenost mezi z_1 a z_2 je $|z_1 - z_2|$. Metrická struktura tak zahrnuje pojmy, které jsou pomocí metriky definovány nebo na ní podstatně závisí. Začneme s tím nejzákladnějším.

Definice 1.3. *Nechť $z \in \mathbb{C}$ a $\varepsilon > 0$. Množina*

$$U(z) = U(z;\varepsilon) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\}$$

*se nazývá **okolí bodu** z (nebo přesněji ε-**okolí bodu** z). Množina*

$$U(z;\varepsilon) \setminus \{z\}$$

*se nazývá **prstencové** ε**-okolí bodu** z*

Okolí bodu z je tedy kruh v komplexní rovině bez hraniční kružnice se středem v z a poloměrem $\varepsilon > 0$. Od pojmu okolí se odvíjejí další důležité pojmy.

Definice 1.4. (i) *Nechť $G \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že množina G je **otevřená**, jestliže s každým svým bodem $z \in G$ obsahuje i jisté okolí $U(z;\varepsilon)$ celé obsažené v G. Formálně:*

Je-li $z \in G$, pak existuje $\varepsilon > 0$, že $U(z;\varepsilon) \subset G$.

(ii) *Bod $z \in \mathbb{C}$ se nazývá **hraniční bod** množiny $M \subset \mathbb{C}$, jestliže pro každé jeho okolí $U(z;\varepsilon)$ platí*

$$U(z;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset \quad a \quad U(z;\varepsilon) \cap (\mathbb{C} \setminus M) \neq \emptyset.$$

(iii) *Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá **hranice** a značí ∂M.*

(iv) ***Uzávěr** $\overline{M}$ množiny M je definován*

$$\overline{M} = M \cup \partial M.$$

*Množiny, pro které platí $M = \overline{M}$ se nazývají **uzavřené**.*

Příklad 1.2. Snadno je vidět, že uzávěr množiny $U(z;\varepsilon)$ je kruh o středu z a poloměru ε včetně hraniční kružnice.

$$\begin{aligned}\overline{U(z;\varepsilon)} &= U(z;\varepsilon) \cup \partial U(z;\varepsilon)\\ &= \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\} \cup \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| = \varepsilon\}\\ &= \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| \leq \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Komplexní rovina $\mathbb{C}$ je otevřená množina. Nemá ale žádný hraniční bod, tedy $\partial\mathbb{C} = \emptyset$. Proto $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \partial\mathbb{C} = \mathbb{C}$ a množina $\mathbb{C}$ je i uzavřená.

Je užitečné si uvědomit, že prázdná množina je otevřená. I když to na první pohled nevypadá, ona skutečně splňuje požadavek (i) z Definice 1.4. Dále, dvě podmínky v definici hraničního bodu množiny M říkají, že libovolně blízko takového bodu jsou jak prvky z M, tak i prvky z doplňku M. To je přesné vyjádření intuitivně jasného požadavku, že hraniční bod má ležet na „okraji“ množiny M. Rovněž si povšimněme, že hraniční bod množiny M nemusí patřit do M. V případě otevřené množiny dokonce žádný hraniční bod do množiny nepatří. Na druhé straně, uzavřená množina naopak obsahuje všechny své hraniční body. To nám dává obrovskou zásobu příkladů otevřených či uzavřených množin. Stačí, když od jakékoli množiny M odejmeme její hranici ∂M. To, co zbyde, $M \setminus \partial M$, je vždy otevřená množina. Stejně, přidáme-li k libovolné množině její hranici, vznikne uzavřená množina.

Protože hranice ∂M množiny M je totožná s hranicí doplňku $\mathbb{C} \setminus M$, vidíme, že doplněk otevřené množiny je množina uzavřená a naopak.

Mohl by vzniknout dojem, že každá množina musí být buď otevřená nebo uzavřená. Většina množin však není ani otevřená ani uzavřená. Např. odebereme-li od uzavřeného kruhu pouze část jeho hraniční kružnice, zbyde množina, která není ani otevřená ani uzavřená.

Dále zavedeme pojem souvislé množiny. Výhodnější bude začít z druhého konce a definovat, kdy množina není souvislá. Volně vyjádřeno to má znamenat, že se skládá alespoň ze dvou oddělených kusů.

Definice 1.5. *Množina $D \subset \mathbb{C}$* ***není souvislá****, jestliže existují dvě disjunktní otevřené množiny G a H takové, že*

(i) $D \subset G \cup H$,

(ii) $G \cap D \neq \emptyset$ *a* $H \cap D \neq \emptyset$.

V opačném případě nazveme množinu D ***souvislou****.*

Podmínka (i) v definici říká, že nesouvislá množina se nechá pokrýt dvěma disjunktními otevřenými množinami G a H. Druhý požadavek (ii) k tomu připojuje, že obě množiny jsou při pokrývání důležité a že žádná z nich sama o sobě množinu D nepokryje.

Podívejme se na jednoduchý případ ověření souvislosti množiny. Uvažujme úsečku $\langle 0,1\rangle$. Intuitivně je jasné, že je souvislá. Jak tento fakt ověřit pomocí Definice 1.5? Předpokládejme na okamžik, že $\langle 0,1\rangle$ je nesouvislá. Pak je možné ji pokrýt dvěma otevřenými disjunktními množinami G a H

$$\langle 0,1\rangle \subset G \cup H.$$

Počáteční bod 0 leží v jedné z těchto množin, např. v množině G. Zjistíme, jaký největší interval začínající v 0 se vejde do G. Položíme

$$s = \sup\big\{t \in \langle 0,1\rangle \bigm| \langle 0,1\rangle \subset G\big\}. \tag{1.3}$$

Protože bod s leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$ musí náležet do jedné z množin G nebo H. Kdyby $s \in G$, pak z otevřenosti množiny G vyplývá, že existuje jisté malé okolí $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ bodu s ležící stéle v G. Pak ovšem s nemůže být supremum, neboť i delší interval $\langle 0, s+\varepsilon/2\rangle \subset G$. Zbývá možnost, že $s \in H$. Otevřenost množiny H nám opět umožňuje nalézt okolí $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ bodu s, které celé náleží do H. V tom případě supremum s z (1.3) je určitě menší než $s - \varepsilon/2$. Tento spor vede k závěru, že úsečka $\langle 0,1\rangle$ nemůže být nesouvislá.

Typickými dalšími příklady souvislých množin jsou kromě úsečky např. lomené čáry, křivky nebo tzv. konvexní množiny (viz cvičení 17).

Definice 1.6. *Otevřená souvislá množina se nazývá* ***oblast****.*

Oblasti jsou množiny, na kterých budeme vyšetřovat chování funkcí komplexní proměnné. Kromě toho, oblasti jsou také množiny, u nichž se souvislost nechá popsat více geometricky.

Tvrzení 1.1. *Nechť $D \subset \mathbb{C}$ je otevřená neprázdná množina. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní*

(i) *Každé dva body z D lze spojit lomenou čárou ležící v D.*

(ii) *D je oblast.*

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Tato implikace je geometricky zřejmá. O množině D už víme, že je otevřená a potřebujeme ukázat, že to je oblast. K tomu zbývá ověřit, že D je souvislá. Kdyby nebyla, tak ji lze pokrýt dvěma disjunktními otevřenými množinami G a H. Z podmínky (ii) v Definici 1.5 plyne, že existují body $z \in G \cap D$ a $w \in H \cap D$. Ty lze spojit lomenou čárou L ležící v D. Protože D je celá pokryta množinami G a H, je pokryta i lomená čára L, tj. $L \subset G \cup H$. Lomená čára se skládá z konečně mnoha na sebe navazujících úseček. Je-li lomená čára L pokryta výše uvedeným způsobem, pak musí být oběma množinami poryta i jedna z úseček, ze kterých se čára L skládá. Podle Definice 1.5 by tato úsečka nebyla souvislá, což je spor.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Zvolme si $z_0 \in D$ libovolně. Zadefinujeme následující množiny

$$G = \{w \in D \mid w \text{ lze spojit se } z_0 \text{ lomenou čárou } L \subset D\},$$

$$H = \{w \in D \mid w \text{ nelze spojit se } z_0 \text{ lomenou čárou } L \subset D\}.$$

Ihned je vidět, že G a H jsou disjunktní. Dále je jasné, že každý prvek $w \in D$ náleží právě do jedné z množin G a H, tj.

$$D = G \cup H. \tag{1.4}$$

Ukážeme, že obě množiny G a H jsou rovněž otevřené. Začneme např. s množinou G. Nechť $w \in G$, tj. w lze spojit s bodem z_0 lomenou čárou L. Protože D je otevřená, existuje okolí $U(w)$ bodu w, že $U(w) \subset D$. Každý bod v okolí $U(w)$ můžeme spojit úsečkou se středem w a tím i s bodem z_0 pomocí navazující lomené čáry L. Jinými slovy $U(w) \subset G$, a tedy G je otevřená.

Stejný argument je i pro množinu H: Nechť $w \in H$, tj. nelze ho spojit lomenou čárou se z_0. Pak nebude možné spojit s bodem z_0 žádný bod z jistého okolí $U(w)$, neboť v opačném případě bychom na takový bod napojili úsečkou i střed w a ten by se tak stal spojitelným s bodem z_0.

Zjistili jsme, že máme dvě disjunktní otevřené množiny pokrývající D. Protože D je souvislá, nemohou být splněny oba požadavky (i) a (ii) v Definici 1.5 charakterizující nesouvislou množinu. Protože (i) splněna je, zbývá, že bod (ii) nesmí platit. Avšak $G \cap D$ obsahuje zvolený prvek z_0, tj. $G \cap D \neq \emptyset$. Jako poslední možnost nám tak vyplývá, že nutně $H \cap D = \emptyset$. Pak ale je množina H v (1.4) zbytečná a platí $D = G$. Jinými slovy, všechny body v D lze spojit s bodem z_0 lomenou čárou. Bod z_0 byl vybrán libovolně, takže lze spojit libovolné dva body množiny D. □

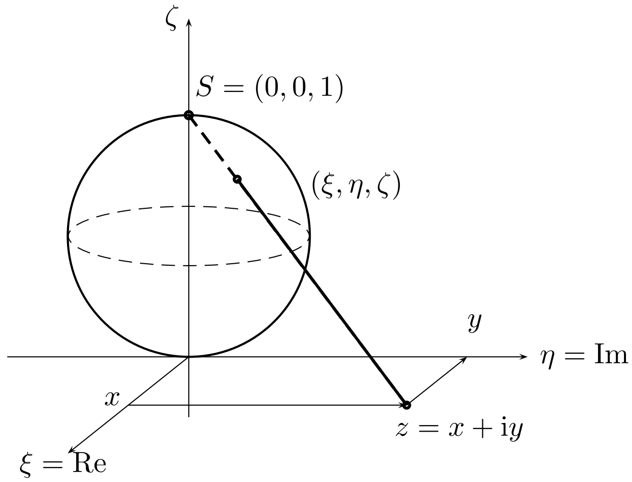
Poznámka 1.1. V předchozím tvrzení lze lomenou čáru nahradit křivkou a ekvivalence zůstane zachována. Nabízí se tak otázka, proč nedefinovat souvislou množinu geometricky jasným požadavkem, že každé dva její body lze spojit křivkou ležící v dané množině. Odpověď je, že takto zavedený pojem souvislosti není totožný s pojmem v Definici 1.5. Splývají pouze u otevřených množin. Příklad množiny, která je souvislá ve smyslu Definice 1.5, a přesto nelze dva její body spojit křivkou aniž bychom tuto množinu opustili, je ve cvičení 16.

Někdy je výhodnější užít jiný model komplexních čísel než jsme měli doposud. Komplexní čísla, jak jsou zavedena v Definici 1.1, je množina dvojic (x, y) spolu s uvedenými operacemi násobení a sčítání. Jeden model množiny $\mathbb{C}$ byla komplexní rovina, obr. 1(a). Jiný model je tzv. Riemannova sféra.

Uvažujme v prostoru $\mathbb{R}^3$ množinu

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = z\}.$$

Je to sféra o poloměru 1/2 se středem v bodě $(0, 0, \frac{1}{2})$, viz obr. 1.3.



Obr. 1.3.

Rovinu xy ztotožníme s komplexní rovinou $\mathbb{C}$. Každému bodu $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ přiřadíme takový bod $(\xi, \eta, \zeta) \in R$, ve kterém polopřímka začínající v „severním pólu“ S a procházející bodem z protíná sféru R. Tímto způsobem jsme vytvořili zobrazení

$$\Phi\colon \mathbb{C} \longrightarrow R \setminus \{S\},$$

které je prosté a množinu $\mathbb{C}$ zobrazí *na* $R \setminus \{S\}$. Např. počátek se zobrazí na jižní pól sféry R. Celá jižní polokoule je obraz jednotkového kruhu se středem v počátku

$$\Phi\Big(\Big\{z \in \mathbb{C} \;\Big|\; |z| \le 1\Big\}\Big) = \Big\{(\xi, \eta, \zeta) \mid \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta,\ \zeta \le \frac{1}{2}\ \Big\}.$$

Podobně vnějšek jednotkového kruhu se zobrazí na severní polokouli bez severního pólu S. Rovník odpovídá jednotkové kružnici o rovnici $|z| = 1$ a poledník přímce procházející počátkem.

Zobrazení Φ se nazývá *stereografická projekce* a množina R *Riemannova sféra.* Poskytuje nám další představu (model) množiny $\mathbb{C}$.

Sféra R má zvláštní bod S, který neodpovídá žádnému komplexnímu číslu. Tento bod představuje nekonečno ∞ pro množinu $\mathbb{C}$. Pohybujeme-li se s bodem Riemannovy sféry směrem k severnímu pólu, jemu odpovídající číslo se v komplexní rovině vzdaluje od počátku.

Na Riemannově sféře je celkem jasné, co je ε-okolí nekonečna, tj. bodu S. Je to kruh se středem S a poloměrem ε měřeným po povrchu sféry R. Největší možný poloměr je délka poledníku, což je $\pi/2$. Proto je $\varepsilon \in (0, \pi/2)$. Obraz ε-okolí bodu S při stereografické projekci je v komplexní rovině množina

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \operatorname{cotg} \varepsilon\},$$

viz cvičení 15. Budeme tuto množinu v komplexní rovině označovat

$$U(\infty; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \operatorname{cotg} \varepsilon\}$$

a nazývat ε-okolí ∞. Toho ihned využijeme při definici limity posloupnosti komplexních čísel, aniž bychom museli rozlišovat vlastní a nevlastní limitu.

Definice 1.7. *Nechť $(z_n) \subset \mathbb{C}$ je posloupnost komplexních čísel. Řekneme, že (z_n) konverguje k $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, jestliže pro každé ε-okolí $U(z; \varepsilon)$ bodu z existuje index n_0 takový, že všechny členy posloupnosti s indexem vyšším než n_0 leží v $U(z; \varepsilon)$. Zapisujeme*

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \quad \textit{nebo stručně} \quad z_n \to z.$$

Poznámka 1.2. V případě, že limitní bod z leží v $\mathbb{C}$ (tj. není ∞), je definice limity ekvivalentní tomu, že posloupnost absolutních hodnot $|z_n - z|$ konverguje k nule

$$\lim_{n \to \infty} |z_n - z| = 0.$$

Z toho snadno vidíme, že v případě vlastní limity $z \in \mathbb{C}$ platí: $z_n \to z$ právě, když $\operatorname{Re}(z_n) \to \operatorname{Re}(z)$ a $\operatorname{Im}(z_n) \to \operatorname{Im}(z)$.

V případě nevlastní limity ∞, je geometrický význam takový, že se členy posloupnosti vzdalují od počátku. Ať už po přímce, spirále nebo jakkoli jinak. Vyjádřeno pomocí absolutní hodnoty

$$\lim_{n \to \infty} |z_n| = +\infty.$$

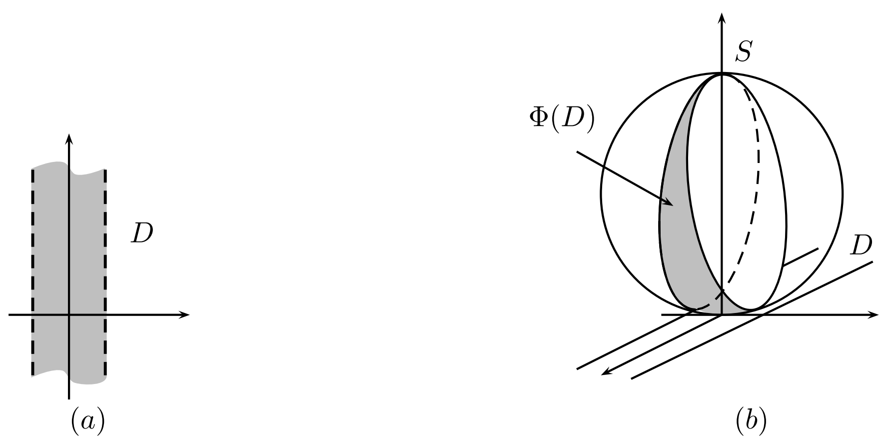
(Zde už se jedná o limitu reálných čísel.)

Poslední pojem, o kterém se zmíníme, je *jednoduše souvislá oblast*. Oblasti samy o sobě jsou souvislé množiny. Rádi bychom mezi nimi ještě vydělili ty, které jsou zvlášť jednoduché. Na obr. .14(a) a 1.4(b) jsou nakresleny dvě oblasti. Rozdíl mezi nimi je ten, že oblast 1.4(b) má v sobě díry, což může komplikovat situaci. Za jednoduše souvislé oblasti bychom chtěli prohlásit oblasti „bez děr“.

První nápad, jak matematicky formulovat, že uvnitř oblasti nejsou díry, je, že budeme požadovat, aby i doplněk takové oblasti byl souvislý. To nezní úplně špatně a dokonce se zdá, že tím jsme přesně vystihli rozdíl mezi oblastmi na obr. 1.4(a) a (b). Přesto to má ještě vadu. Na obr. 1.5(a) je nekonečný pás. Je to zjevně oblast „bez děr“, ale s nesouvislým doplňkem.

Obr. 1.4.

Zde nám pomůže alternativní model ve formě Riemannovy sféry. Projekce pásu D z obr. 1.5(a) na sféru R je ukázána na obr. 1.5(b). Důležité je, že bod S nepatří do obrazu $\Phi(D)$, a tak doplněk $R \setminus \Phi(D)$ je souvislý: z jedné části můžeme přejít do druhé právě přes bod S.



Obr. 1.5.

Modifikujeme proto náš původní nápad následovně.

Definice 1.8. *Oblast $D \subset \mathbb{C}$ se nazývá **jednoduše souvislá**, jestliže její stereografická projekce $\Phi(D)$ na Riemannovu sféru má souvislý doplněk.*

Z úvahy předcházející Definici 1.8 vyplývá, že v případě omezených oblastí se jednoduchá souvislost pozná na doplňku v množině $\mathbb{C}$. Pouze neomezené oblasti musí být testovány na Riemannově sféře.

3 Cvičení

Úloha: Zjistěte pro která $z \in \mathbb{C}$ platí $z \geq |z - j|$.

Řešení: Tato úloha představuje varování! Nemá žádný smysl. Komplexní čísla nelze porovnávat, takže nelze určovat, zda-li je z vetší než něco jiného.

Úloha: Vypočtěte všechny hodnoty $\sqrt[n]{z}$.

Řešení: Pokud $z = 0$, tak i $\sqrt[n]{z} = 0$. Nechť tedy $z \neq 0$. Hledáme všechna řešení rovnice

$$\omega^n = z. \tag{1.5}$$

Obě čísla ω i z vyjádříme v goniometrickém tvaru:

$$\omega = |\omega|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \qquad z = |z|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi).$$

Protože $\omega^n = \omega \cdots \omega$ (n-krát), máme podle vztahu (1.2)

$$\omega^n = |\omega|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi).$$

Protože platí rovnost (1.5), musí mít čísla na obou stranách stejnou absolutní hodnotu i stejný argument.

$$|\omega|^n = |z|, \qquad n\varphi = \psi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Z první části dostaneme $|\omega| = \sqrt[n]{|z|}$ (zde jde už o odmocninu z reálného čísla). Druhá část závisí na výběru $k \in \mathbb{Z}$. Pro $k = 0$ máme

$$\varphi_1 = \frac{1}{n}\,\psi.$$

Pro $k = 1$ pak $\varphi_2 = \frac{1}{n}(\psi + 2\pi), \ldots$ atd. Takto obdržíme n různých hodnot $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ odpovídající volbám $k = 0, \ldots, n-1$ a jim odpovídající hodnoty odmocniny:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\frac{1}{n}\psi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{n}\psi\Big)\\
\omega_2 &= \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\Big(\frac{1}{n}\psi + \frac{2\pi}{n}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{1}{n}\psi + \frac{2\pi}{n}\Big)\Big)\\
&\ \vdots\\
\omega_n &= \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\Big(\frac{1}{n}\psi + 2\pi\frac{n-1}{n}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{1}{n}\psi + 2\pi\frac{n-1}{n}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Kdybychom pokročili ve zvyšování čísla k dále, dostaneme opět hodnoty $\omega_1, \omega_2, \ldots$ a celý postup se bude opakovat. Např. pro $k = n$ je

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{n}(\psi + 2n\pi) = \frac{1}{n}\,\psi + 2\pi = \varphi_1 + 2\pi,$$

a tedy $\omega_{n+1} = \sqrt[n]{|z|}\big(\cos(\varphi_1 + 2\pi) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + 2\pi)\big) = \omega_1$.

Získali jsme tak n různých hodnot pro $\sqrt[n]{z}$.

Úloha: Nalezněte vzorec pro $\arg z$, $z \neq 0$.

Řešení: Číslo $z = x + \mathrm{i}y$ je bod v komplexní rovině. Z obr 2(b) je vidět, že

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

ovšem pokud číslo z leží v pravé polorovině, tj. $\operatorname{Re} z > 0$.

Pokud $\operatorname{Re} z < 0$ a $\operatorname{Im} z \geq 0$, tak

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi,$$

a pro zbylý případ $\operatorname{Re} z < 0$ a $\operatorname{Im} z < 0$ je $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi$. Celkově

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \operatorname{Re} z \geq 0, \ z \neq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \operatorname{Re} z < 0, \ \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \operatorname{Re} z < 0, \ \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Důvod, proč se nám určení $\arg z$ rozpadá na výše uvedené případy spočívá v tom, funkce arctg nabývá hodnot od $-\pi/2$ do $\pi/2$, ale $\arg z \in (-\pi, \pi\rangle$. Tuto nevýhodu můžeme obejít vyjádřením poloviční hodnoty argumentu. Situace je na obrázku 6(a). Vidíme vztah mezi $\varphi = \arg z$ a úhlem α:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha. \tag{1.7}$$

Z pravoúhlého trojúhelníka o vrcholech $z, (x, 0), (\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$ (s pravým úhlem při vrcholu $(x, 0)$) zjistíme

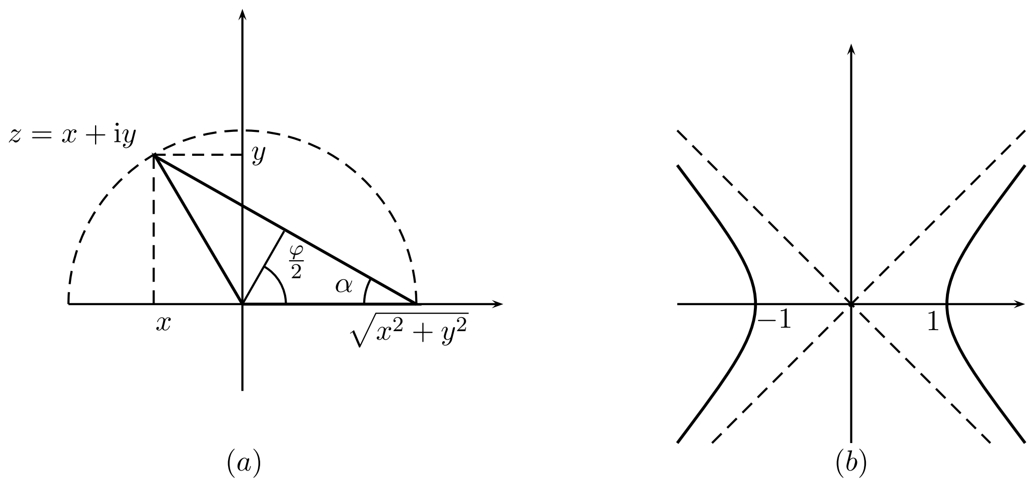
$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{tj.} \quad \alpha = \operatorname{arccotg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Spojením s (1.7) dostaneme

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

kde jsme využili známý vztah $\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arccotg} \alpha = \pi/2$. Závěrem máme

$$\varphi = \arg z = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$



Obr. 1.6.

Úloha: Pro která $z \in \mathbb{C}$ platí $\mathrm{Re}(z^2) = 1$?

Řešení: Zde musíme postupovat tak, že číslo z vyjádříme v kartézském tvaru $z = x + \mathrm{i}y$. Pak $z^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$ a zadaná rovnice znamená, že

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Množina bodů splňujících tuto podmínku je hyperbola, obr. 1.6(b).

Úloha: Vyjádřete vzorcem stereografickou projekci $\Phi\colon \mathbb{C} \longrightarrow R$ a zjistěte, jaké množiny v $\mathbb{C}$ se zobrazí na kružnice na sféře R.

Řešení: Úsečka mezi body $S = (0, 0, 1)$ a $z = (x, y, 0)$ (viz obr. 3) je parametrizována např.

$$(tx, ty, 1 - t), \quad t \in \langle 0, 1\rangle. \tag{1.8}$$

Pro jednu hodnotu t leží bod úsečky na Riemannově sféře R popsané rovnicí

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta.$$

Dosadíme tam bod z (1.8):

$$t^2x^2 + t^2y^2 + (1 - t)^2 = 1 - t.$$

Úpravou dostaneme

$$t^2(1 + x^2 + y^2) - t = 0, \quad \text{tj.} \quad t = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

Hledaný vzorec pak dostaneme z (1.8)

$$\Phi(x,y) = \Big(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\Big). \tag{1.9}$$

Druhou část úlohy začneme pozorováním, že každá kružnice na Riemannově sféře vznikne tak, že sféru R protneme rovinou. Její rovnice je např.

$$a\xi + b\eta + c\zeta = d.$$

Chceme zjistit, jaké body (x, y) přejdou pomocí stereografické projekce Φ na kružnici danou průnikem výše uvedené roviny a sféry R. To znamená, že složky Φ z (1.9) musí vyhovovat rovnici této roviny.

$$\frac{ax}{1+x^2+y^2} + \frac{by}{1+x^2+y^2} + \frac{c(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} = d.$$

Vynásobením jmenovatelem a úpravou získá rovnice tvar

$$(c-d)(x^2+y^2) + ax + by = d.$$

Pro $c \neq d$ je to rovnice kružnice, pro $c = d$ rovnice přímky. Snadno je vidět, že případ $c \neq d$ nastane právě, když rovina $ax + by + cz = d$ neobsahuje „severní pól“ $= (0, 0, 1)$. Můžeme tak zrekapitulovat: Obsahuje-li kružnice na Riemannově sféře R bod S, vznikla projekcí přímky v $\mathbb{C}$. V opačném případě vznikla projekcí kružnice. Proto se někdy přímky a kružnice v komplexní rovině nazývají souhrně *zobecněné kružnice*.

Úloha: Oblast $D \subset \mathbb{C}$ se nazývá *hvězdicovitá*, jestliže existuje bod $z_0 \in D$, že s každým bodem $z \in D$ leží v D i celá úsečka $[z_0, z]$. Ukažte, že hvězdicovitá oblast je jednoduše souvislá.

Řešení: Protože posunutí oblasti D nezmění nic na její eventuální jednoduché souvislosti, můžeme předpokládat, že D je posunuta tak, aby $z_0 = 0$. Nechť $z_1 \notin D$ a uvažujme polopřímku

$$p_1 = \{tz_1 \mid t \geq 1\}.$$

Polopřímka p_1 vychází z bodu z_1 a směřuje od počátku. Na ní už nemůže být žádný bod z množiny D: Kdyby nějaký bod $w \in D$ ležel na p_1, pak z hvězdicovitosti vyplývá, že v D leží celá úsečka $[0, w]$, a tedy i bod z_1, což nelze.

Nyní ukážeme, že obraz $\Phi(D)$ má na Riemannově sféře souvislý doplněk. Nechť tedy $\sigma_1, \sigma_2 \in R \setminus \Phi(D)$ jsou libovolné. Nalezneme křivku na sféře R, která spojuje body σ_1 a σ_2 a leží celá v doplňku $\Phi(D)$. Tím bude ověřeno, že doplněk je souvislý. Označme $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ takové body, že $\sigma_1 = \Phi(z_1)$ a $\sigma_2 = \Phi(z_2)$. Pak body z_1, z_2 leží v doplňku oblasti D. Utvoříme polopřímky p_1 a p_2 začínající v bodech z_1 a z_2 a směřující od počátku

$$p_1 = \{tz_1 \mid t \geq 1\}, \quad p_2 = \{tz_2 \mid t \geq 1\}.$$

Z argumentu uvedeného na začátku plyne, že obě polopřímky leží v doplňku množiny D. Tím i jejich obrazy $\Phi(p_1)$ a $\Phi(p_2)$ leží v doplňku $\Phi(D)$. Protože obraz přímky procházející počátkem je poledník na sféře R, jsou $\Phi(p_1)$ a $\Phi(p_2)$ části poledníků začínající v bodech σ_1 a σ_2 a končící v bodě S. Navážeme-li tyto části poledníků na sebe v bodě S, vznikne křivka spojující σ_1 a σ_2 a ležící mimo $\Phi(D)$.

1. Nalezněte kartézský tvar čísel: $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$, i^n, $\dfrac{(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}}$.
2. Jaká je absolutní hodnota a argument čísel $-1-\mathrm{i}$, $2+6\mathrm{i}$, $-2+6\mathrm{i}$, $2-6\mathrm{i}$, $-2-6\mathrm{i}$.
3. Pomocí matematické indukce dokažte Moivreovu formuli
$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi.$$
4. Vypočtěte všechny hodnoty následujících odmocnin:
   (a) $\sqrt{3-4\mathrm{i}}$,
   (b) $\sqrt[6]{-8}$,
   (c) $\sqrt[8]{1}$,
   (d) $\sqrt[3]{-2+2\mathrm{i}}$
5. Najděte všechna řešení rovnice (a) $z^4 = -1$, (b) $z^7 - z = 0$.
6. Ověřte, že platí
$$\begin{aligned}
&|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\\
&\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\\
&\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\\
&\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2},\\
&z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R},\\
&|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \qquad \text{kdy nastává rovnost?}\\
&|\operatorname{Re} z| \le |z|,\ \ |\operatorname{Im} z| \le |z|.
\end{aligned}$$
7. Nechť z_1, z_2 a $z_3 \in \mathbb{C}$ tvoří tři vrcholy rovnoběžníku. Čemu se rovná čtvrtý vrchol z_4 protilehlý k z_2?
8. Určete podmínku na tři různé body $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$, aby ležely na přímce.
9. Nechť $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ jsou taková, že $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ a $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Ukažte, že $z_1,\ z_2,\ z_3$ pak nutně tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka vepsaného do jednotkové kružnice.
10. Popište následující množiny
    (a) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-\mathrm{i}| \le 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0 \right\}$,

(b) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 < |z| < 3,\ -\frac{\pi}{6} < \arg(z) < \frac{\pi}{6} \right\}$,

(c) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z+2| > 2,\ \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z \right\}$,

(d) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-2| > |z-2\mathrm{i}| \right\}$,

(e) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\operatorname{Im} z| \leq \operatorname{Re} z + 1 \right\}$,

(f) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}(\mathrm{i}z) > \operatorname{Re} z - 1 \right\}$,

(g) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = \operatorname{Re} z + 1 \right\}$,

(h) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1 \right\}$,

(ch) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \arg(z-1) \neq \pi \right\}$,

(i) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z|^2 = \operatorname{Im} z \right\}$,

(j) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \arg \frac{z+1}{z-1} = \pi \right\}$.

11. Pro která $z \in \mathbb{C}$ platí

(a) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,
(b) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,
(c) $\operatorname{Im} z^2 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,
(d) $\arg \frac{z-\mathrm{i}}{z-1} = \frac{\pi}{2}$,
(e) $|z+\mathrm{i}| + |z-\mathrm{i}| = 4$,
(f)* $|z^2 - 1| = 1$,
(g) $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} \frac{1}{z} > 0$.

12. Jaký je obraz čísel 1, -1, i a $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ při stereografické projekci?

13. Na co se při stereografické projekci zobrazí množina

(a) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \arg z = \alpha \right\}, \quad \alpha \in (-\pi, \pi\rangle$,

(b) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = r \right\}, \quad r > 0$.

14. Jaké body $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ přejdou při stereografické projekci na protilehlé body (tj. souměrné vzhledem ke středu) Riemannovy sféry?

15. Vypočtěte délku oblouku hlavní kružnice mezi obrazem $\Phi(z)$ bodu z a severním pólem S na Riemannově sféře.

16.* Nechť $M = M_1 \cup M_2$, kde

$$M = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \;\middle|\; x \in (0,1\rangle \right\}, \quad M_2 = \left\{ (0,y) \;\middle|\; y \in \langle -1, 1\rangle \right\}.$$

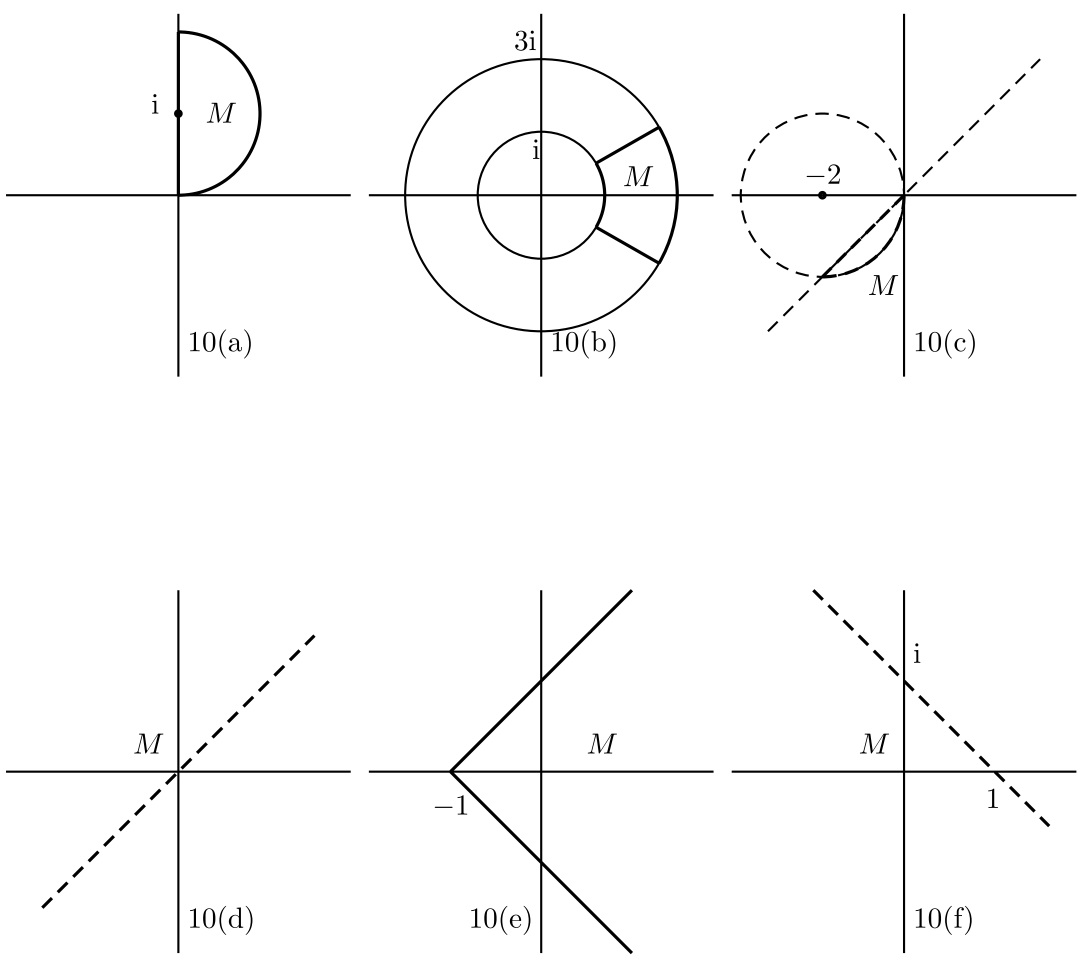
(a) Ukažte, že M je souvislá.

(b) Ukažte, neexistuje křivka spojující bod množiny M_1 s bodem množiny M_2 tak, aby celá ležela v M.

17. Množina D se nazývá konvexní, jestliže s každými dvěma body $z_1,\ z_2 \in D$ obsahuje i úsečku $[z_1, z_2] \subset D$. Ukažte, že konvexní oblast je jednoduše souvislá.

Výsledky.

1. $-\mathrm{i}$; $\mathrm{i}^{4k} = 1$, $\mathrm{i}^{4k+1} = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{4k+2} = -1$, $\mathrm{i}^{4k+3} = -\mathrm{i}$; $5\mathrm{i}$; 2. $|-1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, $\arg(-1-\mathrm{i}) = -\frac{3}{4}\pi$; $|\pm 2 \pm 6\mathrm{i}| = \sqrt{40}$, $\arg(2 \pm 6\mathrm{i}) = \pm \operatorname{arctg} 3$, $\arg(-2 \pm 6\mathrm{i}) = \pm(\pi - \operatorname{arctg} 3)$; 4.(a) $\pm(2-\mathrm{i})$; (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} \pm \mathrm{i})$, $\pm\mathrm{i}\sqrt{2}$; (c) ± 1, $\pm\mathrm{i}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$; (d) $\sqrt{2}(\cos(\pi/4 + 2k\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + 2k\pi/3))$, $k = 0, 1, 2$; 5. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) 0, ± 1, $\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7. $z_4 = z_1 + z_3 - z_2$; 8. $(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1) \in \mathbb{R}$; 9. Je možné volit $z_1 = 1$, pak $z_2 = \overline{z}_3$, $z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; 10.



(g) parabola $y^2 = 2x + 1$, (h) osa y, (ch) $\mathbb{C} \setminus \{(t, 0) \mid t \le 1\}$, (i) kružnice se středem $1/(2\mathrm{i})$ a poloměrem $1/2$, (j) $\langle -1, 1) \cup (1, +\infty)$; 11. (a) Kružnice o středu $(1/(2\alpha), 0)$ s poloměrem $1/(2\alpha)$, (b) Kružnice o středu $(0, -1/(2\alpha))$ s poloměrem $1/(2\alpha)$, (c) hyperbola $xy = \alpha/2$, (d) horní oblouk kružnice se středem $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ s koncovými body 1 a i, (e) elipsa $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$, součet vzdáleností od bodů $\pm\mathrm{i}$ je 4, (f) Bernoulliho lemniskáta o rovnici $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$, součin vzdáleností od bodů ± 1 je 1, (g) $\operatorname{Re} z \ne 0$; 12. Všechny leží na „rovníku" a svírají s osou ξ úhly $0, \pi, \pi/2, -\pi/4$, viz obr.3. 13. (a) Polovina poledníku v rovině svírající úhel α s osou ξ, (b) rovnoběžky o zeměpisné šířce $-\pi/2 + 2 \operatorname{arctg} r$; 14. $z_1 \overline{z}_2 = -1$; 15. $\pi - 2 \operatorname{arctg} |z|$; 16. (a) Obě množiny M_1, M_2 jsou souvislé. Kdyby $M_1 \cup M_2$ byla nesouvislá, pak otevřené množiny z Definice 1.5 musí pokrývat každá právě jednu z množin M_1, M_2. Ukažte, že v tom případě nemohou G a H být disjunktní. (b) Nechť $\varphi\colon \langle a, b\rangle \to C$ je parametrizace křivky C takové, že $C \subset M$, $\varphi(a) \in M_1$, $\varphi(b) \in M_2$. Vyšetřete spojitost parametrizace v bodě $t_0 = \sup\{t \in \langle a, b\rangle \mid \varphi(t) \in M_1\}$; 17. Konvexní množina je hvězdicovitá a užijte poslední z řešených úloh.

Kapitola 2

Holomorfní funkce

1 Funkce komplexní proměnné

Když jsme celkem podrobně vyšetřili množinu $\mathbb{C}$, můžeme pokročit k zobrazením množiny $\mathbb{C}$ do sebe. Taková zobrazení budeme nazývat komplexní funkce komplexní proměnné nebo krátce komplexní funkce.

Definice 2.1. *Každé zobrazení $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se nazývá* ***komplexní funkce komplexní proměnné****. Množina*

$$D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \ \textit{existuje}\}$$

je pak definiční obor funkce f.

Protože máme k dispozici aritmetické operace s komplexními čísly, můžeme vytvářet polynomy v proměnné z

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ jsou koeficienty. O něco obecnější jsou racionální funkce

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

kde $P(z)$ a $Q(z)$ jsou polynomy. Podívejme se na jednoduché příklady.

Příklad 2.1. Nechť $f(z) = z^2$. Vyjádříme-li $z = x + \mathrm{i}y$, pak

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy. \tag{2.1}$$

Funkce f je vlastně funkcí $f(x, y)$ dvou reálných proměnných x a y. Dále, hodnota $f(z)$ má (jako každé komplexní číslo) reálnou a imaginární část. Tím se každá komplexní funkce nechá psát ve tvaru

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y),$$

kde $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ a $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$. V našem konkrétním případě je

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{a} \quad v(x, y) = 2xy.$$

Příklad 2.2. Nechť $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Zjistíme její složky.

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}. \tag{2.2}$$

Odtud

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{a} \quad \mathrm{Im}(f) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Výraz (2.1) je polynom druhého stupně ve dvou proměnných s komplexními koeficienty. Podobně i ve vztahu (2.2) nám vyšlo, že komplexní racionální funkce je součet dvou racionálních funkcí v reálných proměnných x, y. Nezabývá se tak komplexní analýza pouze funkcemi dvou reálných proměnných x, y, které mají ve svých hodnotách použity komplexní konstanty? Odpověď je, jak asi čekáme, záporná. Důvod si vysvětlíme v další části po zavedení pojmu derivace.

Nyní přistoupíme k definici limity a spojitosti komplexní funkce.

Definice 2.2. *Nechť $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ je komplexní funkce a nechť $z_0, A \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Řekneme, že f **má limitu** A **v bodě** z_0, jestliže pro každé ε-okolí $U(A;\varepsilon)$ bodu A existuje δ-okolí $U(z_0;\delta)$ bodu z_0 takové, že každý bod $z \in U(z_0;\delta) \setminus \{z_0\}$ se zobrazí do $U(A;\varepsilon)$, tj. $f(z) \in U(A;\varepsilon)$. Píšeme*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

*Řekneme, že funkce f je **spojitá** v bodě z_0, jestliže*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Poznámka 2.1. V definici limity jsme využili toho, že máme zavedeno okolí bodu ∞, abychom v jedné definici zahrnuli vlastní i nevlastní limitu ve vlastním i nevlastním bodě. Jinak bychom museli vypsat všechny čtyři možnosti zvlášť.

U spojitosti budeme někdy používat následující ekvivalentní vyjádření: Funkce f je spojitá v bodě z_0 právě, když $f(z_n) \to f(z_0)$ pro každou posloupnost $z_n \to z_0$.

Příklad 2.3. Ukážeme, že

$$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z} \quad \text{neexistuje.} \tag{2.3}$$

Definice požaduje, aby se na malém okolí nuly hodnota uvažované funkce téměř neměnila. K nule se můžeme přiblížit např. po reálné ose. Pak bude $z = x$, $x \in \mathbb{R}$, a dostaneme

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Blížíme-li se po imaginární ose, pak $z = \mathrm{i}y$, $y \in \mathbb{R}$, a

$$\lim_{y \to 0} \frac{\overline{\mathrm{i}y}}{\mathrm{i}y} = \lim_{y \to 0} \frac{-\mathrm{i}y}{\mathrm{i}y} = -1.$$

Protože v libovolně malém okolí nuly jsou body, kde má funkce hodnotu 1 i -1, limita neexistuje.

2 Cauchy-Riemannovy podmínky

Centrální pojem v komplexní analýze je derivace komplexní funkce. Její definice je formálně stejná jako v reálném případě.

Definice 2.3. *Řekneme, že komplexní funkce f má v bodě $z \in \mathbb{C}$ **derivaci**, jestliže existuje vlastní limita*
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$
V tom případě se hodnota limity označuje $f'(z)$.

Co je na tomto pojmu tak zvláštního budeme postupně odhalovat v dalším textu. Teď si můžeme jen znovu připomenout, co jsme už pozorovali v Příkladu 2.3. Limita se počítá pro $h \to 0$. Číslo h je komplexní, proto se může k nule blížit mnoha způsoby na rozdíl od reálné limity, kde máme v podstatě jen dvě možnosti: $h \to 0_+$ nebo $h \to 0_-$. Má-li funkce derivaci, znamená to, že definující limita vychází stejně při všech možných způsobech, jakými se h blíží k nule. To je velmi silný požadavek na funkci f. Proto má diferencovatelná funkce překvapující vlastnosti, které u reálných funkcí nemají analogii nebo prostě neplatí.

Protože derivace je definována formálně stejnou limitou jako pro reálné funkce, platí pro ni pravidla známá z reálných funkcí. Existují-li $f'(z)$ a $g'(z)$, pak

(i) $\big(f+g\big)'(z) = f'(z) + g'(z)$,

(ii) $\big(fg\big)'(z) = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$,

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, je-li $g(z) \neq 0$,

(iv) $\Big[f\big(g(z)\big)\Big]' = f'\big(g(z)\big)\, g'(z)$.

Příklad 2.4. Spočtěte $f'(z)$ pro $f(z) = z^n$, $n \geq 1$.

Definice říká, že máme počítat limitu

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{z^n + nz^{n-1}h + \binom{n}{2} z^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - z^n}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nz^{n-1}h + \binom{n}{2} z^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left(nz^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) = nz^{n-1}.\end{aligned}$$

Zjišťování existence derivace a její hodnoty pomocí definice není obvykle moc příjemné. Následující věta nám dává alternativní způsob.

Věta 2.1. *Nechť $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ má složky $f = u + \mathrm{i}v$ a nechť $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Pak následující je ekvivalentní:*

(i) *$f'(z)$ existuje,*

(ii) *u a v mají totální diferenciál v bodě (x, y) a platí*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \tag{2.4}$$

Navíc platí, že

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Poznámka 2.2. Před vlastním důkazem si připomeneme pojem totálního diferenciálu. Řekneme, že funkce g má v bodě (x, y) totální diferenciál, jestliže existuje lineární funkce aproximující g v bodě (x, y):

$$g(x+\xi, y+\eta) = g(x,y) + A\xi + B\eta + R_g(\xi,\eta). \tag{2.5}$$

Výraz $A\xi + B\eta$ je žádaná lineární aproximace (v proměnných ξ, η) a $R_g(\xi, \eta)$ je chyba aproximace, která vyhovuje podmínce

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{R_g(\xi,\eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0. \tag{2.6}$$

Má-li g totální diferenciál, pak pro koeficienty A a B nutně platí

$$A = \frac{\partial g}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Geometricky je rovina daná $z = Ax + By$ rovnoběžná s tečnou rovinou ke grafu funkce g v bodě (x, y). V převážné většině konkrétních případů je existence totálního diferenciálu zaručena spojitostí parciálních derivací $\partial g/\partial x$ a $\partial g/\partial y$ v bodě (x, y) (viz [1], Věta 5.4).

Pojem totálního diferenciálu je „správná“ analogie pojmu diferenciál funkce jedné proměnné. Z tohoto pohledu nám podmínka (ii) ve Větě 2.1 dává několik informací. Existence totálního diferenciálu zaručuje, že funkce $f(z) = f(x, y)$ je diferencovatelná v obvyklém smyslu funkcí dvou proměnných. Teprve zbylé dvě rovnice zaručují, že x, y vystupují v f ve speciálním tvaru $x + \mathrm{i}y$, tj. f je tzv. *analytická* v $x + \mathrm{i}y$. Rovnicím (2.4) se říká *Cauchy-Riemannovy podmínky.*

Pozdržme se ještě u faktu, že f je analytická v $x + \mathrm{i}y$. Až do chvíle, než vstoupí do hry derivace jsme komplexní funkci $f(z)$ mohli považovat pouze za funkci $f(x, y)$ dvou reálných proměnných, která má komplexní hodnoty. Existence derivace však vyžaduje, aby taková funkce závisela na speciální kombinaci proměnných x, y – na $x + \mathrm{i}y$. Takové funkce jsou velmi řídké mezi všemi funkcemi dvou proměnných. To nám výrazně pomáhá při jejich studiu. Částečně tím kompenzujeme nevýhodu, že si nemůžeme komplexní funkce vizualizovat nakreslením grafu. Graf funkce f je sice dvourozměrná plocha, ale ve čtyřrozměrném prostoru $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Kreslit objekty ve čtyřrozměrném prostoru je přeci jen poněkud obtížné.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Předpokládáme, že existuje $f'(z)$. Můžeme aplikovat větu o derivaci složené funkce na $f(z) = f(x + \mathrm{i}y)$ a vypočítat parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(z) \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{i}f'(z). \tag{2.7}$$

Porovnáním dostáváme

$$\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2.8}$$

Protože $f = u + \mathrm{i}v$, tak z dosazení do (2.8) vyplývá

$$\mathrm{i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) = \frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Srovnáme-li reálné a imaginární části výrazů na obou stranách, získáme ihned Cauchy-Riemannovy podmínky. Navíc, první rovnost v (2.7) dává

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.9}$$

Zbývá ověřit, že složky u a v mají totální diferenciál. Nechť $z = x + \mathrm{i}y$ a $h = \xi + \mathrm{i}\eta$. Z existence $f'(z)$ vyplývá, že následující limita je nulová

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(z+h) - f(z) - f'(z)\,h\big) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) = 0. \tag{2.10}$$

Vyjádříme reálnou část této limity

$$\mathrm{Re}\big(f(z+h) - f(z) - f'(z)\,h\big) = u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) - \mathrm{Re}\big(f'(z)\,h\big).$$

S využitím (2.9) můžeme pokračovat

$$= u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) - \mathrm{Re}\Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\Big)(\xi + \mathrm{i}\eta)\Big) =$$
$$= u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,\xi + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,\eta.$$

Poslední člen zaměníme z Cauchy-Riemannových podmínek, a dostaneme tak celkově

$$\mathrm{Re}\big(f(z+h) - f(z) - f'(z)\,h\big) = u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}\,\xi - \frac{\partial u}{\partial y}\,\eta.$$

Srovnáme-li pravou stranu s (2.5), zjišťujeme, že zde stojí přesně chyba aproximace $R_u(\xi,\eta)$ z definice totálního diferenciálu. Ukážeme-li platnost (2.6), pak jsme ověřili, že u má totální diferenciál. Protože vždy platí $|\,\mathrm{Re}\,z| \le |z|$ (viz cvičení 6, Kap. 1), máme

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,\Big|u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}\,\xi - \frac{\partial u}{\partial y}\,\eta\Big| \le \frac{1}{|h|}\,\big|f(z+h) - f(z) - f'(z)\,h\big|.$$

Aplikujeme-li limitu $h \to 0$ na tuto nerovnost, dostaneme díky (2.10) nulovou hodnotu. Tím je důkaz existence totálního diferenciálu pro u ukončen. Zcela stejně probíhá i důkaz pro funkci v, když tentokrát uvážíme imaginární část výrazu $f(z+h) - f(z) - f'(z)\,h$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Máme dokázat existenci limity

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Ukážeme dokonce, že hodnota této limity je $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Za tím účelem označíme $h = \xi + \mathrm{i}\eta$ a budeme analyzovat následující výraz

$$
\begin{aligned}
f(z+h)-f(z) - \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) h = {} & \\
&= u(x+\xi, y+\eta) + \mathrm{i}v(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) - \mathrm{i}v(x,y) - \\
&\qquad - \frac{\partial u}{\partial x}\,\xi - \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\,\xi - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}\,\eta + \frac{\partial v}{\partial x}\,\eta = \\
&= \Big(u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial x}\eta\Big) + \\
&\qquad + \mathrm{i}\Big(v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y) - \frac{\partial v}{\partial x}\xi - \frac{\partial u}{\partial x}\eta\Big).
\end{aligned}
$$

Nyní nahradíme derivaci $\partial v/\partial x$ v první závorce a derivaci $\partial u/\partial x$ ve druhé závorce pomocí Cauchy-Riemannových podmínek. Dostaneme tak

$$
\begin{aligned}
f(z+h)-f(z) - \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) h = {} & \\
&= \Big(u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}\xi - \frac{\partial u}{\partial y}\eta\Big) + \\
&\qquad + \mathrm{i}\Big(v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y) - \frac{\partial v}{\partial x}\xi - \frac{\partial v}{\partial y}\eta\Big) = \\
&= R_u(\xi,\eta) + \mathrm{i}R_v(\xi,\eta),
\end{aligned}
$$

kde $R_u(\xi,\eta)$ a $R_v(\xi,\eta)$ jsou chyby aproximace z definice totálního diferenciálu. Nyní využijeme informaci z (2.6) a dostaneme

$$
\lim_{h\to 0}\Big|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big| \le \lim_{h\to 0}\frac{|R_u(\xi,\eta)|}{|h|} + \lim_{h\to 0}\frac{|R_v(\xi,\eta)|}{|h|} = 0.
$$

Tím je důkaz hotov. □

Příklad 2.5. Zjistěte, zda funkce $f(z) = \dfrac{1}{z}$ má derivaci.

Rozložíme si funkci $f(z)$ na složky, jak jsme už jednou učinili v Příkladu 2.2

$$
f(z) = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}.
$$

Nyní vypočteme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \qquad \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \qquad \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že Cauchy-Riemannovy podmínky jsou splněny ve všech bodech definičního oboru funkce f. Navíc, vypočtené parciální derivace jsou spojité funkce, což implikuje existenci totálního diferenciálu. Podle Věty 2.1 tak existuje $f'(z)$ všude mimo $z=0$ a je rovna

$$
\begin{aligned}
f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \mathrm{i}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \\
&= \frac{-(x-\mathrm{i}y)^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(\overline{z})^2}{|z|^4} = -\frac{(\overline{z})^2}{(z\,\overline{z})^2} = -\frac{1}{z^2}.
\end{aligned}
$$

Příklad 2.6. Ve kterých bodech má funkce $f(z)=\overline{z}$ derivaci?

Funkce f ve složkách má tvar $f(z) = x - \mathrm{i}y$. Cauchy-Riemannovy podmínky nejsou splněny v žádném bodě, protože

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.
$$

Funkce $f(z)=\overline{z}$ tudíž nemá v žádném bodě derivaci. Tento výsledek lze dostat i přímo z definice derivace s využitím Příkladu 2.3.

Zde se hodí poznamenat, $f(z)=\overline{z}$ představuje překvapivě jednoduchý příklad spojité funkce bez derivace. V reálném oboru také takový případ existuje, je ale nesrovnatelně komplikovanější. Reálnou spojitou funkci bez derivace je možné vyjádřit ve tvaru nekonečné řady a pak poměrně jemnou analýzou ukázat neexistenci derivace. První funkci s těmito vlastnostmi sestrojil Bernard Bolzano (1781 – 1848), český kněz, matematik, logik a filosof. To, že v komplexním oboru je konstrukce tak jednoduchá, je odrazem už zmiňované síly pojmu derivace. Čím silnější požadavek, tím snadněji se mu nevyhoví.

Funkce mající derivaci si zaslouží vlastní název.

Definice 2.4. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Řekneme, že komplexní funkce f je* ***holomorfní na*** *G, jestliže $f'(z)$ existuje ve všech bodech množiny G.*

Od této chvíle budou náš svět tvořit pouze holomorfní funkce. Jednoduchý důsledek existence derivace je spojitost funkce.

Tvrzení 2.1. *Nechť existuje $f'(z)$. Pak funkce f je spojitá v bodě z. Speciálně, funkce holomorfní na množině G je spojitá na G.*

Důkaz. Počítejme

$$
\lim_{h\to 0}\big(f(z+h)-f(z)\big) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\,h = f'(z)\,\lim_{h\to 0} h = 0.
$$

□

Na závěr této části provedeme ještě následující důležité pozorování týkající se reálné a imaginární části holomorfní funkce. Nechť $f(z) = u + \mathrm{i}v$ je holomorfní. Pro složky u a v platí Cauchy-Riemannovy podmínky (2.4). Předpokládejme, že obě funkce u a v jsou třídy C^2, tj. mají spojité druhé derivace. Jestliže první rovnost v (2.4) zderivujeme ještě jednou podle x a druhou podle y, dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Sečtením máme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2.11}$$

Zjistili jsme, že pro reálnou část holomorfní funkce musí nutně platit rovnice (2.11), nazývaná *Laplaceova rovnice*. Analogickým způsobem zjistíme, že ta samá rovnice platí i pro imaginární část v. Funkce vyhovující Laplaceově rovnici se nazývají *harmonické*. Reálná a imaginární část každé holomorfní funkce je funkce harmonická.

3 Elementární funkce

Je na čase, abychom si rozšířili zásobu komplexních funkcí. Velmi důležitá je exponenciální funkce komplexní proměnné. Co bychom od ní mohli požadovat? Za prvé, komplexní exponenciální funkce, krátce komplexní exponenciela, označená prozatím jako $E(z)$, musí být rozšířením reálné funkce e^x, tj.

$$E(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{E1}$$

Typická vlastnost exponenciely je, že zobrazuje součet na součin

$$E(z_1 + z_2) = E(z_1)E(z_2). \tag{E2}$$

A konečně, jiné než holomorfní funkce neuvažujeme, takže

$$E(z) \text{ je holomorfní na } \mathbb{C}. \tag{E3}$$

To už je dost podmínek, abychom funkci $E(z)$ určili. Kombinací (E1) a (E2) zjišťujeme, že

$$E(z) = E(x + \mathrm{i}y) = E(x)E(\mathrm{i}y) = e^x E(\mathrm{i}y).$$

U výrazu $E(\mathrm{i}y)$ si označíme reálnou a imaginární složku

$$E(\mathrm{i}y) = u(y) + \mathrm{i}v(y).$$

Dohromady máme

$$E(z) = e^x u(y) + \mathrm{i}e^x v(y).$$

Zbývá použít požadavek (E3). Cauchy-Riemannovy podmínky pro $E(z)$ dávají

$$e^x u(y) = e^x v'(y), \qquad e^x u'(y) = -e^x v(y).$$

Po zkrácení exponenciel

$$u(y) = v'(y), \qquad u'(y) = -v(y). \tag{2.12}$$

Když dosadíme $v(y)$ z druhé rovnice do první, získáme diferenciální rovnici

$$u'' + u = 0.$$

Její obecné řešení je

$$u(y) = A\cos y + B\sin y.$$

Známe-li $u(y)$, z druhé rovnice ve (2.12) dostáváme

$$v(y) = A\sin y - B\cos y.$$

Získali jsme tak vyjádření $E(z)$ ve tvaru

$$E(z) = e^x\Big((A - \mathrm{i}B)\cos y + (B + \mathrm{i}A)\sin y\Big).$$

Pro speciální volbu $z = x \in \mathbb{R}$ s užitím (E1) vyplývá

$$e^x = e^x(A - \mathrm{i}B), \quad \text{tj.} \quad A = 1,\ B = 0.$$

Závěrem dostáváme definici exponenciální funkce v komplexním oboru

$$E(z) = e^x\cos y + \mathrm{i}e^x\sin y.$$

Tuto funkci budeme označovat obvyklým symbolem e^z, tj.

$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y),\ z = x + \mathrm{i}y. \tag{2.13}$$

Při našem zobecnění e^x na e^z se u výsledné funkce objevila vlastnost, kterou původní e^x nemá. Komplexní exponenciela je periodická. Z definice (2.13) ihned plyne, že e^z se nezmění, přičteme-li k y hodnotu 2π. Jinými slovy, e^z má periodu $T = 2\pi\mathrm{i}$,

$$e^{z+2k\pi\mathrm{i}} = e^z, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

Další vlastnosti funkce e^z jsou ve cvičení 1.

Pro ryze imaginární hodnoty $z = \mathrm{i}y$ je (2.13) tzv. Eulerův vzorec

$$e^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y.$$

Když tento vztah využijeme v goniometrickém tvaru komplexního čísla

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

dostaneme tzv. *exponenciální tvar*

$$z = |z|e^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Z Eulerova vzorce se nechá vyjádřit jak $\cos y$ tak $\sin y$. Nejjednodušší způsob je napsat vzorec ještě pro $-\mathrm{i}y$ a obě formule sečíst a odečíst. Dostaneme tak

$$\sin y = \frac{e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos y = \frac{e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y}}{2}.$$

Protože máme zavedenu komplexní exponencielu, pravé strany obou vztahů mají smysl i pro $z \in \mathbb{C}$. Definujeme tudíž

$$\sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

I když to tak nevypadá, výše zavedené goniometrické funkce mají mnoho vlastností známých z reálné proměnné (viz cvičení 1), ale současně vlastnosti zásadně odlišné (viz řešené úlohy).

Pomocí $\sin z$ a $\cos z$ definujeme obvyklým způsobem

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Další elementární funkce jsou zavedeny ve cvičení 2.

Obraťme teď pozornost k otázce, jak zavést logaritmus komplexního čísla. Ukazuje se, že u logaritmu a některých dalších funkcí se setkáváme s něčím, co reálné funkce nemají.

4 Vícehodnotové funkce

Název tohoto oddílu je, přísně vzato, paradox. Funkce ze své definice má nejvýše jednu hodnotu. V reálném oboru jsme to mohli vždycky dodržet, i když se někdy více hodnot nabízelo. Např. $f(x) = \sqrt{x}$. Ke každému $x > 0$ existují dvě hodnoty odmocniny $\sqrt{x}$ a $-\sqrt{x}$. Zde bylo možné prohlásit symbol $\sqrt{x}$ za tu hodnotu odmocniny, která je kladná. Tak zůstala odmocnina funkcí. Tento postup zcela selhává u odmocniny z komplexního čísla z. Ta má dvě hodnoty, ale není žádné kritérium, podle něhož bychom vybrali jednu z nich a označili $\sqrt{z}$. Proto musíme za hodnotu odmocniny považovat dvouprvkovou množinu obsahující obě hodnoty:

$$\sqrt{z} = \{w_1, w_2\},$$

kde $w_1^2 = w_2^2 = z$ a $w_1 \neq w_2$. Stejně $\sqrt[3]{z}$ je tříprvková množina a obecně symbol

$$\sqrt[n]{z} = \{w_1, \dots, w_n\}, \quad w_i \text{ jsou hodnoty } n\text{-té odmocniny.}$$

Vícehodnotovost je nepříjemná komplikace, protože např. součet $\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}$ má obecně čtyři hodnoty. Obsahuje všechny kombinace součtů hodnot vybraných z $\sqrt{z_1}$ a $\sqrt{z_2}$. Zcela unikátní je z tohoto pohledu funkce logaritmus, která má – jak uvidíme – nekonečně mnoho hodnot.

Komplexní logaritmus budeme označovat symbolem Ln. Je zaveden obvyklým požadavkem: Číslo $w \in \mathbb{C}$ je hodnota $\operatorname{Ln} z$ právě, když

$$e^w = z.$$

Vypočteme nyní w z této rovnice. Označme $w = w_1 + \mathrm{i}w_2$ a číslo z vyjádříme v exponenciálním tvaru $z = |z|e^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi = \arg z$. Pak se výše uvedená rovnice změní na

$$e^{w_1} e^{\mathrm{i}w_2} = |z| e^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Odtud plyne, že jednak

$$e^{w_1} = |z|, \quad \text{tj.} \quad w_1 = \ln |z|,$$

a dále

$$e^{\mathrm{i}w_2} = e^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \text{tj.} \quad w_2 = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

neboť změna exponentu o $2k\pi\mathrm{i}$ nemění hodnotu exponenciály (viz (2.14)). Tím jsme odvodili, že každá právě vypočtená hodnota $w = w_1 + \mathrm{i}w_2$ je hodnotou logaritmu:

$$\mathrm{Ln}\, z = \big\{\ln |z| + \mathrm{i} \arg z + 2k\pi\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z}\big\}. \tag{2.15}$$

Logaritmus je definován pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Každé $k \in \mathbb{Z}$ reprezentuje ve vzorci (2.15) jednu hodnotu funkce $\mathrm{Ln}\, z$. Takovou situaci jsme mohli vlastně očekávat, neboť $\mathrm{Ln}\, z$ představuje „inverzní funkci“ k periodické funkci e^z a u periodické funkce má každá hodnota nekonečně mnoho vzorů.

Když ze všech hodnot logaritmu zvolíme tu, která odpovídá číslu $k = 0$, pak tuto funkci (už opravdovou jednohodnotovou funkci) nazýváme *hlavní hodnotu logaritmu* (nebo také *hlavní větev logaritmu*) a budeme ji označovat

$$\ln_0 z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg z.$$

Jinými slovy to znamená, že za hlavní hodnotu logaritmu jsme vybrali tu část grafu funkce $\mathrm{Ln}(z)$, pro kterou je hodnota v bodě $z = 1$ nulová, $\ln_0 1 = 0$. (Obecně $\mathrm{Ln}\, 1 = \{2k\pi\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.)

Příklad 2.7. Vypočtěte všechny hodnoty $\mathrm{Ln}(1 + \mathrm{i})$ a $\mathrm{Ln}(-1)$.

Z definice (2.15) ihned plyne

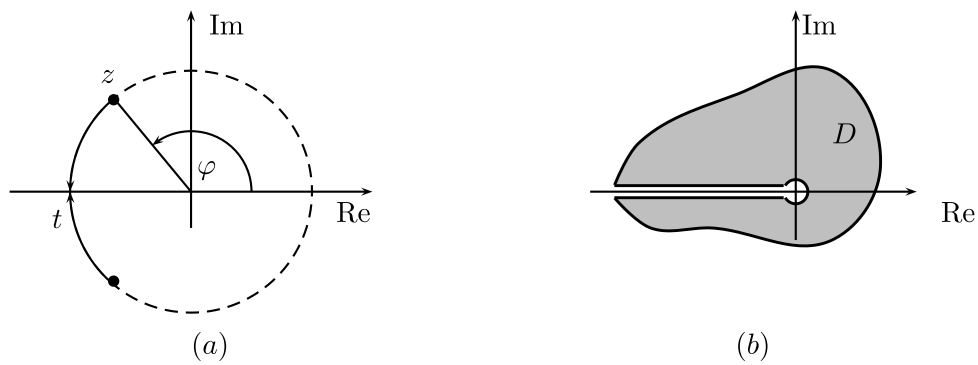
$$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i}) = \big\{\ln |1+\mathrm{i}| + \mathrm{i} \arg(1+\mathrm{i}) + 2k\pi\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z}\big\} = \Big\{\ln \sqrt{2} + \Big(2k + \frac{1}{4}\Big)\pi\mathrm{i} \;\Big|\; k \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\mathrm{Ln}(-1) = \big\{\ln |-1| + \mathrm{i} \arg(-1) + 2k\pi\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z}\big\} = \big\{(2k+1)\pi\mathrm{i} \mid k \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Zjistíme nyní, jestli logaritmus je holomorfní funkce a čemu se eventuelně rovná jeho derivace. Protože derivace je zavedena pro funkce, místo logaritmu $\mathrm{Ln}\, z$ budeme uvažovat jeho hlavní hodnotu

$$\ln_0 z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg z.$$

Tato funkce je definována na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Je ale nespojitá v bodech záporné osy. O tom se lze snadno přesvědčit následujícím výpočtem. Nechť $t \in \mathbb{R}$, $t < 0$ a přibližujme se k bodu t po kružnici se středem v počátku a poloměrem $|t|$ dvěma způsoby: v kladném a záporném smyslu, viz obr. 2.1(a).



Obr. 2.1.

Bod z na této kružnici má vyjádření v exponenciálním tvaru

$$z = |t|e^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi = \arg z \in (-\pi, \pi\rangle.$$

Limita funkce $\ln_0 z$, když se bod z blíží k t v kladném smyslu, odpovídá tomu, že $\varphi \to \pi$:

$$\lim_{\varphi\to\pi} \ln_0(|t|e^{\mathrm{i}\varphi}) = \lim_{\varphi\to\pi} \ln|t| + \mathrm{i}\varphi = \ln|t| + \mathrm{i}\pi.$$

Blížíme-li se k t v záporném smyslu, tak $\varphi \to -\pi$:

$$\lim_{\varphi\to-\pi} \ln_0(|t|e^{\mathrm{i}\varphi}) = \lim_{\varphi\to-\pi} \ln|t| + \mathrm{i}\varphi = \ln|t| - \mathrm{i}\pi.$$

V bodech nespojitosti určitě neexistuje vlastní derivace, jak vyplývá z Tvrzení 2.1. Proto tyto body vyloučíme rovnou z vyšetřování. Zbývá tak funkce $\ln_0 z$ uvažovaná na otevřené množině

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0,\ \arg z \in (-\pi, \pi)\},$$

viz obr. 2.1(b).

Podle Věty 2.1 je třeba ověřit Cauchy-Riemannovy podmínky. Rozložíme $\ln_0 z$ na reálnou a imaginární složku u a v. Pro jednoduchost uvažujme bod z v pravé polorovině, tj. $\operatorname{Re} z > 0$. V tom případě platí

$$\ln_0 z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{i}\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ \text{tj } u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),\ v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Odtud

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Vidíme, že Cauchy-Riemannovy podmínky jsou splněny, proto má funkce $\ln_0 z$ derivaci a platí

$$(\ln_0 z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{1}{z}.$$

Když číslo z bude v levé polorovině, u imaginární složky $\operatorname{arctg}(y/x)$ funkce $\ln_0 z$ se objeví přidaná konstanta $\pm\pi$, viz (1.6). Ta ovšem při derivování zmizí a v Cauchy-Riemannových podmínkách se vůbec neprojeví. Proto náš výpočet platí pro všechna $z \in D$. Hlavní hodnota logaritmu je holomorfní funkce na D a

$$(\ln_0 z)' = \frac{1}{z}.$$

5 Cvičení

Úloha. Rozložte funkci $\sin z$ na reálnou a imaginární část a vypočtěte $|\sin z|$.

Řešení. Funkce $\sin z$ je kombinace exponenciel. Proto rozkladem příslušných exponenciálních funkcí získáme rozklad funkce $\sin z$.

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\big) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)} - e^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}\big) = \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(e^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) - e^{y}(\cos x - \mathrm{i}\sin x)\big) = \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\big((e^{-y} - e^{y})\cos x + \mathrm{i}(e^{y} + e^{-y})\sin x\big) = \\ &= \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x + \mathrm{i}\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos x = \\ &= \sin x\cosh y + \mathrm{i}\cos x\sinh y.\end{aligned}$$

Nyní už můžeme zjistit i $|\sin z|$:

$$\begin{aligned}|\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x\cosh^2 y + (1-\sin^2 x)\sinh^2 y} = \\ &= \sqrt{\sin^2 x(\cosh^2 y - \sinh^2 y) + \sinh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}.\end{aligned}$$

(V posledním kroku jsme užili vzorce $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$.) Poznamenejme, že na rozdíl od reálné funkce $\sin x$ může zde být absolutní hodnota $|\sin z|$ libovolně velká.

Úloha. Nalezněte vyjádření pro $\operatorname{Arcsin} z$ – funkci inverzní k $\sin z$.

Řešení. Úloha spočívá ve vyjádření w z rovnice

$$z = \sin w.$$

Z definice funkce $\sin z$ plyne, že

$$z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}w} - e^{-\mathrm{i}w}\big).$$

Označíme na okamžik $e^{\mathrm{i}w} = u$. Pak

$$z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(u - \frac{1}{u}\Big), \quad \text{tj.} \quad u^2 - 2\mathrm{i}zu - 1 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny

$$\{u_1, u_2\} = \mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2},$$

kde $\sqrt{1-z^2}$ je dvouprvková množina obsahující obě hodnoty odmocniny. Vrátíme se zpět k proměnné z a dostaneme

$$\mathrm{i}w \in \mathrm{Ln}(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}).$$

Odtud

$$w \in \operatorname{Arcsin} z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}).$$

Úloha. Ve kterých bodech mají funkce $f(z) = x^2 + \mathrm{i}y^2$ a $g(z) = \cos^2 \overline{z}$ derivaci?
Řešení. Nejprve funkce $f(z)$. Její složky jsou

$$u(x, y) = x^2, \qquad v(x, y) = y^2.$$

Použitím Cauchy-Riemannových podmínek dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{tj.} \quad 2x = 2y, \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{tj.} \quad 0 = 0.$$

Podmínky jsou splněny pouze v bodech přímky $y = x$. V tomto bodě je pak

$$f'(z) = 2x = 2\,\mathrm{Re}\,z.$$

Stejným způsobem lze zjistit i body diferencovatelnosti funkce $g(z)$. Museli bychom nejprve rozložit funkci $\cos^2 \overline{z}$ na reálnou a imaginární část. Existuje však postup, jak se (v tomoto případě pracnému) rozkladu vyhnout.

Nechť $g(z) = g(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$. Pak

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{i}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\Big) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big).\end{aligned}$$

Uvážením Cauchy-Riemannových podmínek dosteneme

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \tag{2.16}$$

(Tato rovnost je ve skutečnosti ekvivalentní Cauchy-Riemannovým podmínkám.)

Aplikujme (2.16) na naši funkci $g(z) = \cos^2 \overline{z} = \cos^2(x - \mathrm{i}y)$. Protože

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \cos^2(x - \mathrm{i}y) &= 2\cos(x - \mathrm{i}y)\,\sin(x - \mathrm{i}y), \\ \frac{\partial}{\partial y} \cos^2(x - \mathrm{i}y) &= 2\cos(x - \mathrm{i}y)\,\sin(x - \mathrm{i}y)\,(-\mathrm{i}), \end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial g}{\partial y} &= 2\cos(x - \mathrm{i}y)\,\sin(x - \mathrm{i}y) + 2\cos(x - \mathrm{i}y)\,\sin(x - \mathrm{i}y) = \\ &= 4\cos\overline{z}\sin\overline{z} = 2\sin 2\overline{z} = 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost platí pro $z = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Proto $\cos^2 \overline{z}$ má derivaci pouze v bodech

$$\left\{ \frac{k\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Hodnota derivace je

$$g'\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) = \frac{\partial g}{\partial x}\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) + \mathrm{i}\frac{\partial g}{\partial y}\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) = 2\sin k\pi = 0.$$

Úloha. Ukažte, že holomorfní funkce, která na oblasti $D \subset \mathbb{C}$ nabývá jen reálných hodnot, je na D nutně konstantní.

Řešení. Nechť $f = u + \mathrm{i}v$. Protože f nabývá pouze reálných hodnot, je imaginární část nulová, $v = 0$. Z Cauchy-Riemannových podmínek pak vyplývá, že

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{tj.} \quad u = \text{konst.}$$

Úloha. Jaké funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ mohou mít reálnou část

(a) $u(x, y) = x + y$,

(b) $u(x, y) = x^2 + y^2$.

Řešení. (a) Prvním krokem bude ověřit, zda funkce $u(x, y) = x + y$ je harmonická. Přímým dosazením do Laplaceovy rovnice (2.11) vidíme, že ano. Může to tedy být reálná část jisté, zatím neznámé, holomorfní funkce f. Abychom ji určili, využijeme opět Cauchy-Riemannových podmínek. S naší konkrétní funkcí $u(x, y)$ dostaneme

$$1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad -1 = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.17}$$

Integrace první rovnice podle y nám dá

$$v(x, y) = \int 1\,\mathrm{d}y + C(x) = y + C(x),$$

kde $C(x)$ je libovolná funkce proměnné x. (Protože šlo o parciální derivaci podle y, může integrační konstanta C záviset na zbylé proměnné x). Dosadíme vypočtenou funkci $v(x,y)$ do druhé rovnice v (2.17):

$$-1 = C'(x), \quad \text{tj.} \quad C(x) = x + K,\ K \in \mathbb{R}.$$

Odtud

$$v(x,y) = y - x + K$$

a hledané holomorfní funkce $f(z)$ je

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = x + y + \mathrm{i}(y - x) + \mathrm{i}K.$$

Funkce f je ve tvaru rozloženém do složek. Chceme-li získlat původní nerozložený tvar, použijeme vztahy

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ y = \frac{-\mathrm{i}}{2}(z - \overline{z}).$$

Po dosazení a jednoduché úpravě získáme

$$f(z) = (1 - \mathrm{i})z + \mathrm{i}K.$$

Funkce f je určena až na ryze imaginární konstantu $\mathrm{i}K$.

(b) Dosazením funkce $u(x,y) = x^2 + y^2$ do Laplaceovy rovnice vidíme, že $u(x,y)$ není harmonická. Neexistuje tedy žádná holomorfní funkce s reálnou částí rovnou $x^2 + y^2$.

1. Ověřte, že platí
   (a) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$,
   (b) $\lim_{z\to\infty} e^z$ neexistuje.
   (c) $e^{\operatorname{Ln} z} = z$,
   (d) $e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln} z} = \sqrt{z}$, (Na pravé straně je dvouprvková množina!)
   (e) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
   (f) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$,
   (g) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$.

2. Položíme $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ a $\operatorname{tgh} z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$. Ukažte, že
   (a) $\sin \mathrm{i}z = \mathrm{i} \sinh z$,
   (b) $\cos \mathrm{i}z = \cosh z$,
   (c) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$,
   (d) $\operatorname{tg} \mathrm{i}z = \mathrm{i} \operatorname{tgh} z$.

3. Nalezněte reálnou a imaginární část a absolutní hodnotu funkcí

(a) $\cos z$,
(b) $\operatorname{tg} z$,
(c) $\sinh z$,
(d) $\operatorname{tgh} z$.

4. Kde je chyba v následující úvaze?

$$(-z)^2 = z^2, \text{ proto } 2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln} z, \text{ a tedy } \operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z.$$

5. Odvoďte následující vztahy (jde o rovnosti mezi množinami hodnot):

(a) $\operatorname{Arccos} z = -\mathrm{i}\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$,
(b) $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Ln}\Big(\dfrac{\mathrm{i} + z}{\mathrm{i} - z}\Big) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\operatorname{Ln}\Big(\dfrac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z}\Big)$,
(c) $\operatorname{Argsinh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{1 + z^2})$,
(d) $\operatorname{Argtgh} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\Big(\dfrac{1 + z}{1 - z}\Big)$.

6. Zjistěte všechny hodnoty výrazů

(a) $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$,
(b) $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$,
(c) $\operatorname{Arcsin} \mathrm{i}$,
(d) $\operatorname{Arctg}(1 + \mathrm{i})$,
(e) $\operatorname{Argtgh}(1 - \mathrm{i})$.

7. Nalezněte všechna řešení rovnice

(a) $\sin z = \frac{5}{3}$,
(b) $\cos z = \frac{1}{4}(3 + \mathrm{i})$,
(c) $\operatorname{tg} z = \frac{5}{3}\mathrm{i}$,
(d) $\sinh z = \frac{\mathrm{i}}{2}$,
(e) $\sin z + \cos z = 2$,
(f) $\cosh z - \sinh z = 1$,
(g) $e^{z^2} = 1$.

8. Obecná mocnina z^w se definuje jako

$$z^w = e^{w \operatorname{Ln} z}.$$

Použijeme-li místo logaritmu Ln hlavní hodnotu $\ln_0$, pak výraz

$$e^{w \ln_0 z}$$

nazýváme *hlavní hodnota* obecné mocniny.

Zjistěte všechny hodnoty následujících mocnin a určete, která z nich je hlavní hodnotou.

$$\text{(a) } 1^{\sqrt{3}}, \quad \text{(b) } (-2)^{\sqrt{2}}, \quad \text{(c) } 2^{\mathrm{i}}, \quad \text{(d) } 1^{-\mathrm{i}}, \quad \text{(e) } \mathrm{i}^{\mathrm{i}}, \quad \text{(f) } \Big(\frac{1 - \mathrm{i}}{\sqrt{2}}\Big)^{1+\mathrm{i}}.$$

9. Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek ověřte
   (a) $(e^z)' = e^z$,
   (b) $(\sin z)' = \cos z$,
   (c) $(\cos z)' = -\sin z$.
10. Nechť $D \subset \mathbb{C}$ je oblast, která se funkcí $f(z) = e^z$ zobrazí na $U(1;1) = \{z \mid |z-1| < 1\}$.
    (a) Kolik takových oblastí je?
    (b) Je funkce e^z prostá na takové oblasti?
11. Ve kterých bodech existuje derivace funkce
    (a) $f(z) = |z-1|^2$,
    (b) $f(z) = \sin \overline{z}$.
    (c) $f(z) = z^2 \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$,
    (d) $f(z) = \overline{z} e^{\overline{z}}$.
12. Pro jaké koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ je funkce
    $$f(z) = x + ay + \mathrm{i}(bx + cy)$$
    holomorfní na $\mathbb{C}$?
13. Nechť funkce $f(z) = u(x) + \mathrm{i}v(y)$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Ukažte, že pak $f(z)$ je polynom stupně nejvýše 1.
14. Funkce je harmonická, když splňuje Laplaceovu rovnici (2.11).
    (a) Pro které funkce f holomorfní na oblasti D je $|f|^2$ harmonická?
    (b) Nechť f je holomorfní a nenulová na oblasti D. Ověřte, že $\ln |f|$ je harmonická na D přímým výpočtem. Existuje jednodušší způsob?
15. Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek dokažte následující tvrzení:
    (a) Nabývá-li holomorfní funkce na oblasti D pouze imaginárních hodnot, je konstantní na D.
    (b) Má-li holomorfní funkce na oblasti D hodnoty ležící na jednotkové kružnici $|z| = 1$, je konstantní.
16. Nalezněte holomorfní funkce $f = u + \mathrm{i}v$ (existují-li) se zadanou reálnou nebo imaginární částí.
    (a) $u(x, y) = 2 + x^2 - y^2$,
    (b) $u(x, y) = x^3 - 3xy + y$,
    (c) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$,
    (d) $v(x, y) = e^{y/x}$,

(e) $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$.

Výsledky.

3. (a) $\cos x\cosh y - \mathrm{i}\sin x\sinh y$, $(\cos^2 x + \sinh^2 y)^{1/2}$, (b) $\frac{\sin 2x+\sinh 2y}{\cos 2x+\cosh 2y}$, $\frac{\sqrt{\sin^2 2x+\sinh^2 2y}}{\cos 2x+\cosh 2y}$, (c) $\sinh x\cos y + \mathrm{i}\cosh x\sin y$, $(\sinh^2 x + \sin^2 y)^{1/2}$, (d) $\frac{\sinh 2x+\sin 2y}{\cosh 2x+\cos 2y}$, $\frac{\sqrt{\sinh^2 2x+\sin^2 2y}}{\cosh 2x+\cos 2y}$; 4. Množina $2\,\mathrm{Ln}(z)$ je pouze částí množiny $\mathrm{Ln}(z^2)$; 6. (a) $\pi/6 + 2k\pi$, (b) $\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, (c) $2k\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{2}+1)$, (d) $\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + (2k+1)\pi) + \frac{\mathrm{i}}{4}\ln 5$, (e) $\frac{1}{4}\ln 5 + \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{arctg}\,2 + (2k+1)\pi)$; 7. (a) $\pi/2 + 2k\pi \pm \mathrm{i}\ln 3$, (b) $2k\pi \pm (\frac{\pi}{4} - \frac{\mathrm{i}}{2}\ln 2)$, (c) $-\pi/2 + k\pi + \mathrm{i}\ln 2$, (d) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{2}\pm 1)$, (e) $\pi/4 + 2k\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{2}\pm 1)$, (f) $2k\pi\mathrm{i}$, (g) $(-1)^k\sqrt{k\pi}(1+\mathrm{i})$ pro $k \geq 0$ a $(-1)^k\sqrt{|k|\pi}(1-\mathrm{i})$ pro $k < 0$; 8. Ve všech výsledcích je hlavní hodnota pro $k = 0$: (a) $\cos(2k\pi\sqrt{3}) + \mathrm{i}\sin(2k\pi\sqrt{3})$, (b) $2^{\sqrt{2}}(\cos((2k+1)\pi\sqrt{2}) + \mathrm{i}\sin((2k+1)\pi\sqrt{2}))$, (c) $e^{2k\pi}(\cos\ln 2 + \mathrm{i}\sin\ln 2)$, (d) $e^{2k\pi}$, (e) $e^{\pi(4k-1)/2}$, (f) $\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}e^{\pi(8j+1)/4}$; 10. (a) Nekonečně mnoho: pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je $D_k = \{x + \mathrm{i}y \mid y \in (-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi) + 2k\pi,\ x < \ln(1 + 2\cos y)\}$, (b) e^z je prostá na každém D_k; 11. $z = 1$, $f'(z) = 0$, (b) $z = (k + \frac{1}{2})\pi$, $f'(z) = 0$, (c) $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -z_1$, $f'(z_1) = f'(z_2) = 1 - 2\mathrm{i}$, (d) $z = -1$, $f'(z) = 0$; 12. $c = 1$, $a = -b$, $b \in \mathbb{R}$; 13. Z Cauchy-Riemannových podmínek plyne, že $u'(x) = v'(y) = 0$; 14. (a) Pouze pro konstantní funkce, (b) $\ln|f|$ je reálná část funkce $\ln_0 f$; 15. (a) $u = 0$, a tak $v =$konst., (b) Protože $|f(z)| = 1$, je $u^2 + v^2 = 1$. Derivace této rovnice podle x a y dá $u\,u_x + v\,v_x = 0$, $u\,u_y + v\,v_y = 0$, (u_x, u_y, v_x, v_y je stručné označení parciálních derivací funkcí u a v). Vynásobíme první rovnici u, druhou v a sečteme. Dostaneme po použití Cauchy-Riemannových podmínek $u_x(u^2 + v^2) = 0$, tj. $u_x = 0$. Podobně pro ostatní derivace; 16. (a) $f(z) = z^2 + 2 + \mathrm{i}K$, $K \in \mathbb{R}$, (b) $f(z) = z^3 - \mathrm{i}z + \mathrm{i}K$, $K \in \mathbb{R}$, (c) $f(z) = 2\mathrm{i}\ln_0(z) - (2-\mathrm{i})z + K$, $K \in \mathbb{R}$, (d) neexistuje, (e) $f(z) = ze^z$.

Kapitola 3

Integrální reprezentace holomorfní funkce

V předchozí kapitole jsme analyzovali pojem derivace komplexní funkce f. Přirozeně navazující otázka je: A co funkce primitivní k f? Pojem primitivní funkce je synonymem k pojmu integrál. Ze všech druhů integrálů má v komplexní analýze výlučné a prioritní postavení integrál křivkový.

1 Křivkový integrál komplexní funkce

Nejprve se domluvíme na pojmu křivka.

Definice 3.1. *Množina $C \subset \mathbb{C}$ se nazývá **křivka**, jestliže existuje zobrazení*

$$\varphi \colon \langle a, b \rangle \longrightarrow C$$

intervalu $\langle a, b \rangle$ na množinu C splňující

(i) *φ je spojité na $\langle a, b \rangle$,*

(ii) *φ' je je po částech spojitá na $\langle a, b \rangle$, tj. interval $\langle a, b \rangle$ lze rozdělit na konečně mnoho podintervalů $\langle a, t_1 \rangle$, $\langle t_1, t_2 \rangle, \dots \langle t_n, b \rangle$, že φ' je spojitá na každém z nich, přičemž v krajních bodech uvažujeme příslušné jednostranné derivace.*

*Zobrazení φ se nazývá **parametrizace** křivky C.*

Poznámka 3.1. Křivka se nazývá *uzavřená*, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$, tj. počáteční a koncové body splývají. *Jednoduchá křivka* je taková křivka, že kromě počátečního a koncového bodu už žádné další splývat nemohou. Jinými slovy, je-li $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ pro $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$ a $t_1 < t_2$, pak nutně $t_1 = a$ a $t_2 = b$. Geometrický smysl je jasný: Jednoduchá křivka neprotíná sama sebe. Jedinou výjimkou je pouze uzavřená jednoduchá křivka, která má společný počáteční a koncový bod.

Jednoduchá uzavřená křivka může být orientována dvěma způsoby: *Kladná orientace* znamená, že při rostoucí hodnotě parametru $t \in \langle a, b \rangle$ prochází bod $\varphi(t)$ po křivce proti směru hodinových ručiček. V opačném případě nazveme uzavřenou jednoduchou křivku záporně orientovanou.

Pokud má jednoduchá křivka navíc vlastnost, že její parametrizace má na celém $\langle a, b\rangle$ spojitou derivaci φ', budeme takovou křivku nazývat **oblouk**.

Nejjednodušší příklad oblouku je úsečka vedená z bodu z_1 do bodu z_2. Budeme ji značit

$$[z_1, z_2] = \{z \in \mathbb{C} \mid z = (1-t)z_1 + tz_2,\ t \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

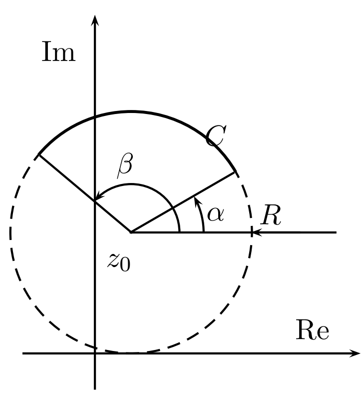
Z tohoto zápisu vyplývá i její možná parametrizace

$$\varphi(t) = (1-t)z_1 + tz_2, \quad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Typický příklad jednoduché křivky je část kružnice, viz obr. 3.1. Její parametrizace vychází z vyjádření bodu v polárních souřadnicích a má tvar

$$\varphi(t) = z_0 + R(\cos t + \mathrm{i}\sin t) = z_0 + Re^{\mathrm{i}t}, \quad t \in \langle \alpha, \beta\rangle.$$

Probíhá-li parametr t celý interval $\langle 0, 2\pi\rangle$, vznikne uzavřená jednoduchá křivka – kružnice o středu z_0 a poloměru $R > 0$, kladně orientovaná.



Obr. 3.1.

Každá parametrizace φ křivky v komplexní rovině má tvar

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \mathrm{i}\varphi_2(t),$$

kde funkce φ_1 a φ_2 jsou po částech třídy C^1. V předchozím příkladu je

$$\varphi_1(t) = \operatorname{Re} z_0 + R\cos t,$$
$$\varphi_2(t) = \operatorname{Im} z_0 + R\sin t.$$

Každá jednoduchá uzavřená křivka C rozdělí komplexní rovinu na dvě části, jednu omezenou a druhou neomezenou. (Toto geometricky zcela jasné tvrzení má poměrně složitý formálně přesný důkaz.) Omezenou část roviny budeme nazývat *vnitřek* křivky C a značit $\operatorname{Int} C$ (od slova interior) a neomezenou část *vnějšek* křivky C a značit $\operatorname{Ext} C$ (od slova exterior).

Křivkový integrál spojité komplexní funkce je analogie křivkového integrálu vektorového pole podél křivky.

Definice 3.2. *Nechť C je křivka s parametrizací $\varphi\colon \langle a, b\rangle \longrightarrow C$ a nechť $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ je komplexní funkce spojitá v bodech křivky C.* ***Křivkový integrál*** *funkce f podél křivky C je*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Často budeme označovat křivkový integrál stručněji $\int_C f$.

Příklad 3.1. Vypočtěte integrál funkce $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$ podél kružnice se středem v počátku, poloměrem $R > 0$ a kladně orientované.

Parametrizace křivky C je $\varphi(t) = Re^{\mathrm{i}t}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Podle definice je tak

$$\int\limits_C f = \int\limits_0^{2\pi} \big(\varphi(t)\big)^k \varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \big(Re^{\mathrm{i}t}\big)^k \mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}\ \mathrm{d}t = \mathrm{i}R^{k+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(k+1)t}\ \mathrm{d}t.$$

Zde musíme rozlišit dva případy: pro $k = -1$ je exponent nulový a máme

$$\int\limits_C z^k = \mathrm{i}R^0 \int\limits_0^{2\pi} e^0\ \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

V opačném případě, $k \neq -1$, je

$$\int\limits_C z^k = \mathrm{i}R^{k+1} \left[\frac{e^{\mathrm{i}(k+1)t}}{\mathrm{i}(k+1)}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Souhrnně

$$\int\limits_C z^k = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & k = -1, \\ 0 & k \neq -1. \end{cases}$$

Křivka C může mít více parametrizací. Definice křivkového integrálu by byla špatná, kdyby se stalo, že pro různé parametrizace *téže* křivky by integrál (3.1) vycházel různě. Čtenář znalý křivkového integrálu (funkce nebo vektorového pole) ví, že je třeba ověřit nezávislost hodnoty integrálu na parametrizaci. My to zde provádět nebudeme, odkážeme se na [2], Kap.6, Věta 6.2.

Hodnoty křivkového integrálu však závisí na orientaci křivky C. Projdeme-li křivku v opačném směru, změní se u integrálu znaménko: Nechť C je křivka s parametrizací φ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Symbolem $-C$ označíme křivku C opačně orientovanou. Ukážeme, že

$$\int\limits_{-C} f = -\int\limits_C f. \tag{3.2}$$

Parametrizace ψ křivky $-C$ se nechá vyjádřit pomocí φ takto

$$\psi(t) = \varphi(a + b - t), \quad t \in \langle a, b \rangle.$$

Je snadné vidět, že $\psi(a) = \varphi(b)$ a $\psi(b) = \varphi(a)$, tj. počáteční bod při parametrizaci ψ je koncový bod při parametrizaci φ a naopak. Takže

$$\int\limits_{-C} f = \int\limits_a^b f\big(\psi(t)\big)\, \psi'(t)\, \mathrm{d}t = \int\limits_a^b f\big(\varphi(a + b - t)\big)\big(-\varphi'(a + b - t)\big)\ \mathrm{d}t.$$

Substitucí $s = a + b - t$ přejde poslední integrál na

$$= \int_b^a f\big(\varphi(s)\big)\,\big(-\varphi'(s)\big)(-\,\mathrm{d}s) = -\int_a^b f\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\ \mathrm{d}s = -\int_C f.$$

Rovněž si můžeme uvědomit, že integrál z absolutní hodnoty derivace parametrizace je délka příslušné křivky.

$$\int_a^b |\varphi'(t)|\ \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\ \mathrm{d}t = \text{délka } C. \tag{3.3}$$

Užitečná budou následující tři jednoduchá tvrzení.

Tvrzení 3.1. *Nechť C je křivka a nechť f je funkce spojitá na C taková, že $|f(z)| \le M$ pro body $z \in C$. Pak*

$$\Big|\int_C f\Big| \le M \cdot \textit{délka } C.$$

Důkaz. Nechť $\varphi\colon \langle a, b\rangle \longrightarrow C$ je parametrizace křivky C. Pak

$$\Big|\int_C f\Big| = \Big|\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\ \mathrm{d}t\Big| \le \int_a^b \big|f\big(\varphi(t)\big)\big|\,|\varphi'(t)|\ \mathrm{d}t \le$$

$$\le M \int_a^b |\varphi'(t)|\ \mathrm{d}t = M \cdot \text{délka } C.$$

□

Druhé tvrzení je zobecněním známého faktu z reálné proměnné o derivaci integrálu podle horní meze.

Tvrzení 3.2. *Nechť f je spojitá v bodě $z \in \mathbb{C}$. Pak*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f = f(z).$$

Důkaz. Symbol $[z, z+h]$ označuje úsečku s počátečním bodem z a koncovým $z + h$. Její parametrizací je např.

$$\varphi(t) = z + th, \quad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Počítejme rozdíl

$$\Big|\frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(w)\ \mathrm{d}w\ - f(z)\Big| = \Big|\frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)\,h\ \mathrm{d}t - f(z)\Big| =$$

$$= \Big|\int_0^1 \big(f(z+th) - f(z)\big)\ \mathrm{d}t\Big| \le \int_0^1 \big|f(z+th) - f(z)\big|\ \mathrm{d}t.$$

Protože f je spojitá v bodě z, je pro zvolené $\varepsilon > 0$

$$\big|f(z+th) - f(z)\big| < \varepsilon,$$

pokud $|h|$ je dostatečně malá. Pro tato h tak máme

$$\Big|\frac{1}{h}\int\limits_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w \; - f(z)\Big| < \int\limits_0^1 \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Tím jsme ověřili, že

$$\lim_{h\to 0}\Bigg(\frac{1}{h}\int\limits_{[z,z+h]} f - f(z)\Bigg) = 0, \quad \text{tj.} \quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{[z,z+h]} f = f(z).$$

□

Poslední tvrzení umožňuje v jistých situacích zaměňovat pořadí integrace a limitního přechodu.

Tvrzení 3.3. *Nechť C je křivka a nechť S_n a S jsou spojité funkce takové, že S_n konverguje k S stejnoměrně na C, tj.*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in C}|S_n(z) - S(z)| = 0. \tag{3.4}$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_C S_n = \int\limits_C S.$$

Poznámka 3.2. Podmínka (3.4) je silnější než pouze požadavek, aby $S_n(z) \to S(z)$ pro každé $z \in C$. K platnosti Tvrzení 3.3 by ovšem pouhá konvergence funkcí $S_n(z)$ k funkci $S(z)$ v každém bodě $z \in C$ nestačila. Se způsobem konvergence zavedené v (3.4), tzv. *stejnoměrnou konvergencí* funkcí S_n k funkci S na množině C, se ještě setkáme v Kapitole 4 a pojednáme tam o něm o něco podrobněji.

Důkaz. Odhadneme rozdíl

$$\Big|\int\limits_C S_n - \int\limits_C S\Big| = \Big|\int\limits_C (S_n - S)\Big| \le \int\limits_C |S_n - S|.$$

Pro zvolené $\varepsilon > 0$ získáme z podmínky (3.4) index n_0 takový, že

$$\sup_{z\in C}|S_n(z) - S(z)| \le \varepsilon$$

pro všechny indexy n větší než n_0. To znamená, že integrovaný výraz v posledním integrálu je nejvýše ε. S využitím Tvrzení 3.1 tak máme

$$\Big|\int\limits_C S_n - \int\limits_C S\Big| \le \varepsilon\,\text{délka } C.$$

Protože $\varepsilon > 0$ je libovolné, dostáváme dokazované tvrzení. □

2 Cauchyova věta

Už jsme se zmínili, že křivkový integrál komplexní funkce je analogií křivkového integrálu vektorového pole. V této podobnosti můžeme postoupit ještě o krok dále. Křivkový integrál holomorfní funkce odpovídá křivkovému integrálu potenciálního vektorového pole. Charakteristickou vlastností potenciálního pole je nulovost integrálů podél uzavřené křivky. Stejný efekt nastává i u integrálu holomorfní funkce. To je obsahem následující věty nazývané *Cauchyova věta*. Je to druhé (po Větě 2.1) netriviální tvrzení, se kterým se setkáváme. Při důkazu budeme používat Greenovu větu, viz [2], Kapitola 11, Věta 11.2.

Věta 3.1. (Cauchy) *Nechť $D \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a nechť f je holomorfní funkce na D. Pak pro každou uzavřenou jednoduchou křivku $C \subset D$ platí*

$$\int_C f = 0.$$

Důkaz. Důkaz provedeme za dodatečného předpokladu, že funkce f má spojitou derivaci. Nechť křivka C má parametrizaci $\varphi\colon \langle a,b\rangle \longrightarrow C$, $\varphi = \varphi_1 + \mathrm{i}\varphi_2$. Bez újmy na obecnosti můžeme také předpokládat, že křivka C je kladně orientovaná. Bude-li totiž integrál nulový při této orientaci, zůstane nulový i při orientaci opačné. Označíme si složky funkce f jako $f = u + \mathrm{i}v$. Potom je

$$\int_C f = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\;\mathrm{d}t = \int_a^b \big(u(\varphi(t)) + \mathrm{i}v(\varphi(t))\big)\,\big(\varphi_1'(t) + \mathrm{i}\varphi_2'(t)\big)\;\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \Big(u(\varphi(t))\,\varphi_1'(t) - v(\varphi(t))\,\varphi_2'(t)\Big)\;\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \Big(v(\varphi(t))\,\varphi_1'(t) + u(\varphi(t))\,\varphi_2'(t)\Big)\;\mathrm{d}t.$$

Zavedeme dvě rovinná vektorová pole

$$\vec{F}(x,y) = \big(u(x,y), -v(x,y)\big), \qquad \vec{G}(x,y) = \big(v(x,y), u(x,y)\big).$$

Pomocí těchto polí se poslední dva integrály nechají přepsat

$$\int_a^b \vec{F}\big(\varphi(t)\big)\cdot\big(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)\big)\;\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \vec{G}\big(\varphi(t)\big)\cdot\big(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)\big)\;\mathrm{d}t = \int_{(C)} \vec{F}\;\mathrm{d}\vec{s} + \mathrm{i}\int_{(C)} \vec{G}\;\mathrm{d}\vec{s}.$$

Převedli jsme původní integrál na dva integrály ze speciálních vektorových polí. (Závorka u symbolu křivky pod integrálem znamená, že ji chápeme i s její orientací, viz [2], Kapitola 7, Definice 7.3.) Protože jsou splněny předpoklady Greenovy věty, použijeme ji u obou integrálů.

$$= \iint_{\mathrm{Int}\,C} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} + \mathrm{i}\iint_{\mathrm{Int}\,C} \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = \iint_{\mathrm{Int}\,C} -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\iint_{\mathrm{Int}\,C} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Funkce f je holomorfní. Podle Věty 2.1 splňují její složky Cauchy-Riemannovy podmínky. Ty ovšem říkají, že oba dva poslední integrální výrazy jsou nulové. Dokázali jsme tak, že

$$\int_C f = 0$$

pro jednoduchou uzavřenou křivku. $\square$

Už zmíněná paralela mezi potenciálním vektorovým polem a holomorfní funkcí se opírá i o další podobnost. Pole $\vec{V}$ je potenciální, existuje-li funkce, tzv. potenciál, jejíž parciální derivace vytváří složky daného pole. S trochou volnosti ve vyjadřování můžeme říci, že potenciál hraje roli primitivní funkce k poli $\vec{V}$. Nebude tedy přílišným překvapením, že stejně jako potenciální pole má i holomorfní funkce funkci primitivní.

Věta 3.2. *Nechť f je spojitá komplexní funkce na jednoduše souvislé oblasti D a nechť $\int_C f = 0$ pro každou jednoduchou uzavřenou křivku $C \subset D$. Pak existuje funkce F holomorfní na D, že $F' = f$. Speciálně, je-li f holomorfní, pak má primitivní funkci.*

Důkaz. Zvolme si pevně bod $z_0 \in D$. Pro libovolný bod $z \in D$ označme symbolem $C(z)$ křivku začínající v bodě z_0 a končící v bodě z, která celá leží v D. Položíme

$$F(z) = \int_{C(z)} f. \tag{3.5}$$

Křivka $C(z)$ je libovolná křivka spojující body z_0 a z. V tomto okamžiku není jasné, zda hodnota $F(z)$ nemůže vycházet pro různé spojovací křivky různě. Byla by to nepříjemná komplikace, neboť definice funkce F by nebyla korektní. Nechť tedy $C_1(z)$ a $C_2(z)$ jsou dvě křivky spojující z_0 se z. Pak křivka

$$C = C_1(z) \cup \big(-C_2(z)\big)$$

je uzavřená a podle předpokladu je

$$0 = \int_C f = \int_{C_1(z)} f + \int_{-C_2(z)} f = \int_{C_1(z)} f - \int_{C_2(z)} f.$$

Z toho vidíme, že integrál v (3.5) nezávisí na cestě a definice funkce F je v pořádku. Zbývá ukázat, že F má derivaci rovnou funkci f.

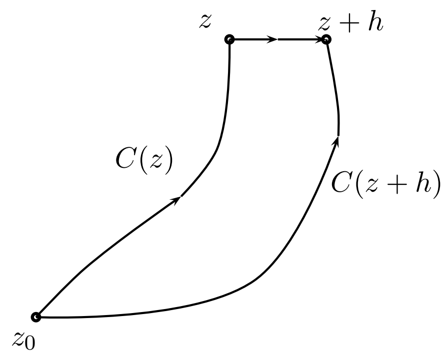
Protože D je otevřená množina a $z \in D$, existuje jisté ε-okolí $U(z;\varepsilon)$ bodu z takové, že $U(z;\varepsilon) \subset D$. Nechť $h \in \mathbb{C}$, $|h| < \varepsilon$. Pak $z + h \in U(z;\varepsilon)$ a můžeme vyjádřit

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\Bigg(\int_{C(z+h)} f - \int_{C(z)} f \Bigg). \tag{3.6}$$

Spojíme-li teď úsečkou $[z, z+h]$ body z a $z+h$, vznikne uzavřená křivka

$$C(z) \cup [z, z+h] \cup \big(-C(z+h)\big),$$

viz obr. 3.2.



Obr. 3.2.

Protože integrál funkce f podél této uzavřené křivky je nulový, musí platit

$$\int_{C(z+h)} f = \int_{C(z)} f + \int_{[z,z+h]} f.$$

Dosazením do (3.6) máme

$$\frac{F(z+h)-(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f.$$

Aplikací limity pro $h \to 0$ na obě strany a použitím Tvrzení 3.2 dostaneme

$$F'(z) = f(z).$$

□

Přestože v předpokladech Cauchyovy věty je podmínka jednoduché souvislosti oblasti D, důležité bylo pouze to, aby funkce f neměla nějaký bod neholomorfnosti ve vnitřku křivky C. Neboť jenom tato část oblasti D v důkaze vystupovala. Bude-li funkce holomorfní na oblasti (nikoli už jednoduše souvislé), bude integrál podél uzavřené opět křivky nulový, nebude-li křivka obíhat „díry“, které může oblast D mít. Nastane-li případ, že naše uzavřená křivka bude mít ve svém vnitřku „díru“ oblasti D, stále ještě není všechno ztraceno. Integrál podél ní sice nulový být nemusí, nicméně můžeme použít Cauchyovu větu na přehození integrace ze složité křivky na jednodušší. Oba tyto aspekty si ukážeme na příkladě.

Příklad 3.2. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a uvažujme funkci

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0}.$$

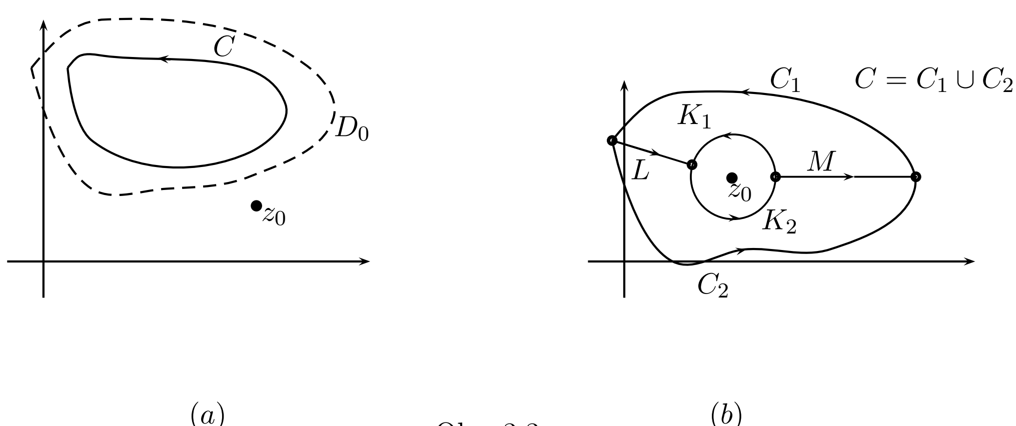
Ta je holomorfní na množině $D = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Množina D je oblast, ale není jednoduše souvislá. Nicméně, potřebujeme-li integrovat funkci f podél křivky C z obr.3.3(a), můžeme Cauchyovu větu použít. Formálně přesný argument je, že budeme uvažovat funkci f na pomocné oblasti $D_0 \subset D$, která je jednoduše souvislá, obsahuje křivku C a neobsahuje bod z_0. Proto

$$\int\limits_C \frac{1}{z - z_0} = 0.$$

Jiný případ je na obr.3.3(b). Zde máme křivku C, která obíhá kolem bodu z_0. Křivka C může být dost složitá pro přímý výpočet křivkového integrálu. Pokusíme se ji nahradit nějakou jednodušší křivkou, ale tak, abychom nezměnili hodnotu integrálu. Kružnice patří mezi jednoduše popsatelné křivky. Uvažujme tedy kružnici K se středem v bodě z_0, která leží uvnitř křivky C. Ukážeme, že

$$\int\limits_C \frac{1}{z - z_0} = \int\limits_K \frac{1}{z - z_0}, \tag{3.7}$$

čímž jsme integraci podél křivky C převedli na integraci podél jednoduché křivky K.



Obr. 3.3.

Zavedeme si pomocné orientované úsečky L a M spojující křivky C a K, jak jsou znázorněny na obr. 3.3(b). Koncové body těchto úseček rozdělí každou z křivek C a K na dvě části

$$C = C_1 \cup C_2 \quad \text{a} \quad K = K_1 \cup K_2.$$

Podívejme se na uzavřenou křivku složenou následovně

$$\Gamma_1 = C_1 \cup L \cup (-K_1) \cup M.$$

V jejím vnitřku není bod z_0, takže jsme v situaci z obr 3.3(a). Tím

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{z - z_0} = 0.$$

Podobně je nulový i integrál podél

$$\Gamma_2 = C_2 \cup (-M) \cup (-K_2) \cup (-L).$$

Sečteme-li tyto dva integrály, je výsledek samozřejmě nulový, ale

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z-z_0} + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{z-z_0} = \\
&= \int_{C_1} \frac{1}{z-z_0} + \int_{L} \frac{1}{z-z_0} + \int_{-K_1} \frac{1}{z-z_0} + \int_{M} \frac{1}{z-z_0} + \\
&\qquad + \int_{C_2} \frac{1}{z-z_0} + \int_{-M} \frac{1}{z-z_0} + \int_{-K_2} \frac{1}{z-z_0} + \int_{-L} \frac{1}{z-z_0} = \\
&= \int_{C} \frac{1}{z-z_0} + \int_{-K} \frac{1}{z-z_0} = \int_{C} \frac{1}{z-z_0} - \int_{K} \frac{1}{z-z_0}.
\end{aligned}$$

V tomto výpočtu jsme užili vztah (3.2). Tím je rovnost (3.7) dokázána. Když už jsme zredukovali křivku C na kružnici K, můžeme tento integrál dopočítat. Parametrizace kružnice K je

$$\varphi(t) = z_0 + Re^{\mathrm{i}t}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

kde R je poloměr kružnice K. Pak

$$\int_K \frac{1}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + Re^{\mathrm{i}t} - z_0}\, \mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}\, \mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

Díky (3.7) tak můžeme uzavřít: Pro každou jednoduchou uzavřenou křivku C platí

$$\int_C \frac{1}{z-z_0} = \begin{cases} 0 & \text{leží-li } z_0 \text{ vně } C, \\ 2\pi\mathrm{i} & \text{leží-li } z_0 \text{ uvnitř } C. \end{cases} \tag{3.8}$$

3 Cauchyův integrální vzorec

V předešlém příkladu jsme viděli, jak změnit integrační křivku při zachování hodnoty integrálu. Využijeme toho k důkazu tzv. Cauchyova integrálního vzorce, který je zesílením Cauchyovy věty (Věta 3.1).

Věta 3.3. (Cauchyův integrální vzorec) *Nechť $D \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a nechť f je holomorfní na D. Pak pro každou jednoduchou uzavřenou křivku $C \subset D$ kladně orientovanou a pro každý bod $z_0 \in \operatorname{Int} C$ platí*

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi\mathrm{i} f(z_0). \tag{3.9}$$

Poznámka 3.3. (i) Ještě před důkazem si můžeme všimnout, že speciální případ $f = 1$ jsme už dokázali v Příkladu 3.2.

(ii) Rovněž si ukážeme, jak z Cauchyova integrálního vzorce vyplývá tvrzení Cauchyovy věty. Mějme funkci f holomorfní na D a nechť C je jednoduchá uzavřená křivka. Zvolíme si libovolný bod z_0 z vnitřku křivky C a položíme

$$g(z) = f(z)\,(z - z_0). \tag{3.10}$$

Na tuto funkci aplikujeme Cauchyův integrální vzorec,

$$\int_C \frac{g(z)}{z - z_0} = 2\pi \mathrm{i} g(z_0).$$

Když vyjádříme $g(z)$ pomocí (3.10) a dosadíme do poslední rovnice, dostaneme $\int_C f = 0$.

(iii) Podmínka na orientaci křivky C je kvůli tomu, abychom měli v rovnosti (3.9) jednoznačně určené znaménko před integrálem. Při volbě orientace uvedené ve Větě 3.3 vychází integrál se znaménkem $+$. Později uvidíme, že tuto větu lze formulovat bez zmínky o orientaci a dokonce pro uzavřené křivky bez předpokladu jednoduchosti.

Důkaz. Začneme tím, že ukážeme

$$\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0. \tag{3.11}$$

Jakmile tuto rovnici budeme mít, tak jsme hotovi, neboť (3.11) je ekvivalentní s

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} = \int_C \frac{f(z_0)}{z - z_0}.$$

Integrál napravo je pak podle (3.8) roven

$$\int_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} = f(z_0) \int_C \frac{1}{z - z_0} = 2\pi \mathrm{i} f(z_0).$$

Vraťme se tedy k (3.11). Protože f je holomorfní na D, existuje $f'(z)$ ve všech bodech $z \in D$, speciálně v bodě z_0:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Z definice limity můžeme najít δ-okolí $U(z_0; \delta)$ bodu z_0 takové, že

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \leq 1$$

pro všechna $z \in U(z_0; \delta)$. Pro tato z tak platí

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) + f'(z_0) \right| \leq 1 + |f'(z_0)|. \tag{3.12}$$

Nechť $K(r)$ je kružnice se středem v z_0 a poloměrem $r < \delta$. Nyní použijeme trik popsaný v Příkladu 3.2 (viz obr.3.3(b)) s redukcí křivky C na kružnici $K(r)$. Získáme tak rovnost

$$\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \int_{K(r)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{3.13}$$

Protože $K(r) \subset U(z_0; \delta)$, můžeme použít odhad (3.12) pro body $z \in K(r)$. Podle Tvrzení 3.1 dostaneme

$$\Big| \int_{K(r)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Big| \leq \big(1 + |f'(z_0)|\big) \text{ délka } K(r) = \big(1 + |f'(z_0)|\big)\, 2\pi r.$$

Protože poloměr r může být libovolně malý, je nutně

$$\Big| \int_{K(r)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Big| = 0, \qquad \text{tj.} \qquad \int_{K(r)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0.$$

Díky (3.13) je důkaz ukončen. □

Vztah (3.9) lze výhodně použít k výpočtu integrálů, ve kterých objevíme uvedený typ pro nějakou vhodnou funkci f. Příklady takového použití Cauchyova integrálního vzorce jsou ve cvičení k této kapitole. Nicméně v Kapitole 7 přijdeme k univerzálnějšímu způsobu výpočtu integrálů, k tzv. reziduové větě.

Integrální vzorec (3.9) nám také dává další představu, jak pevně musí být hodnoty komplexní funkce svázány mezi sebou, aby vytvořili funkci holomorfní. První takovou vazbu jsme už potkali ve formě Cauchy-Riemannových podmínek. Ty dávaly do vztahu reálnou a imaginární část holomorfní funkce. Nyní je to Cauchyův integrální vzorec: Představme si, že bychom chtěli najít holomorfní funkci f, u které známe její hodnoty v bodech jednotkové kružnice $K = \{z \mid |z| = 1\}$. Pak nemáme příliš na výběr. V každém vnitřním bodě z_0 jednotkového kruhu musí být hodnota dána integrálem (3.9), ve kterém vystupují zadané hodnoty f na kružnici. Tím je funkce f na jednotkovém kruhu jednoznačně určena svými hodnotami na hranici K. Řečeno ještě jinak, hodnoty na kružnici K obsahují v sobě všechny informace o hodnotách uvnitř a lze funkci f z nich zpět zrekonstruovat. Taková „ztuhlost“ holomorfních funkcí nemá analogii v reálných funkcích. Když reálnou funkci diferencovatelnou na $\mathbb{R}$ zúžíme např. na doplněk intervalu $\langle a, b\rangle$, můžeme ji zpět rozšířit nekonečně mnoha způsoby, aby zůstala diferencovatelná.

4 Liouvilleova věta, Základní věta algebry a Princip maxima

V této části se setkáme s několika hlubšími důsledky plynoucími z Cauchyova integrálního vzorce. První z nich uvádí překvapivou vlastnost holomorfních funkcí, která opět nemá žádný protějšek v reálném oboru.

Věta 3.4. (Liouville) *Je-li funkce f holomorfní a omezená na celé komplexní rovině, je nutně konstantní.*

Důkaz. Nechť f je omezena konstantou M, tj. $|f(z)| \le M$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Zvolme si libovolně čísla z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Ukážeme, že $f(z_1) = f(z_2)$. Odtud už zřejmě vyplývá, že $f = \text{konst.}$

Nechť $K(r)$ je kružnice se středem v z_1 a poloměrem $r > |z_1 - z_2|$. To znamená, že oba dva body z_1, z_2 leží uvnitř kruhu ohraničeného kružnicí $K(r)$. Můžeme pro ně použít Cauchyův integrální vzorec:

$$
\begin{aligned}
|f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{K(r)} \frac{f(z)}{z - z_1} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{K(r)} \frac{f(z)}{z - z_2} \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{K(r)} \left(\frac{f(z)}{z - z_1} - \frac{f(z)}{z - z_2} \right) \right| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{K(r)} |f(z)| \left| \frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right| \le \\
&\le \frac{M}{2\pi} \int\limits_{K(r)} \left| \frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)} \right| = \frac{M}{2\pi} |z_1 - z_2| \int\limits_{K(r)} \frac{1}{|z - z_1|\,|z - z_2|}.
\end{aligned}
$$

Integrační proměnná z se pohybuje po kružnici $K(r)$, takže $|z - z_1| = r$ a

$$|z - z_2| \ge r - |z_1 - z_2|.$$

Můžeme proto pokračovat v odhadování

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{M}{2\pi} |z_1 - z_2| \int\limits_{K(r)} \frac{1}{r(r - |z_1 - z_2|)} = \frac{M}{2\pi} \frac{|z_1 - z_2|}{r(r - |z_1 - z_2|)} 2\pi r = \\
&= \frac{M\,|z_1 - z_2|}{r - |z_1 - z_2|}.
\end{aligned}
$$

Tento odhad platí pro každou kružnici s poloměrem $r > |z_1 - z_2|$. Pro limitní přechod $r \to \infty$ tak dostaneme

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le \lim_{r \to \infty} \frac{M\,|z_1 - z_2|}{r - |z_1 - z_2|} = 0,$$

což zakončuje důkaz. $\square$

Uvažujme funkci $\sin z$. Ta je holomorfní na $\mathbb{C}$ a rozhodně není konstantní. Liouvilleova věta pak říká, že $|\sin z|$ je neomezená funkce. Je to zásadní odlišnost od reálné funkce $\sin x$, neboť $|\sin x| \le 1$.

Pomocí Liouvilleovy věty ukážeme tzv. Základní větu algebry.

Věta 3.5. (Základní věta algebry) *Nechť $P(z)$ je polynom stupně alespoň 1. Pak $P(z)$ má kořen v $\mathbb{C}$.*

Důkaz. Postupujme sporem: Nechť $P(z)$ je polynom stupně alespoň 1, který nemá žádný kořen, tj. $P(z) \ne 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$. Pak funkce

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

je definována na celém $\mathbb{C}$ a je tam holomorfní. Protože stupeň $P \geq 1$, tak

$$\lim_{z\to\infty} |P(z)| = \infty, \quad \text{tj.} \quad \lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0.$$

Z definice limity plyne existence kruhu $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ takového, že mimo U má funkce f hodnoty $|f(z)| \leq 1$. Na kruhu U, což je uzavřená omezená množina, je $|f|$ spojitá funkce. Nabývá tam proto svého maxima (viz [1], Kap. 4, Věta 4.1). Speciálně je omezená jistou konstantou M, $|f(z)| \leq M$ na U. Celkově

$$|f(z)| \leq \max\{1, M\}.$$

Z Liouvilleovy věty plyne, že $f = \text{konst}$. Pak i $P = \text{konst}$, tj. P je polynom stupně 0 – spor. $\square$

Důsledek 3.1. *Polynom stupně n má n komplexních kořenů kořenů, počítáme-li je i s jejich násobnostmi.*

Důkaz. Mějme polynom P_n stupně n, $n \geq 1$. Základní věta algebry zaručuje existenci kořene z_1. Platí tak

$$P_n(z) = (z - z_1)\, P_{n-1}(z),$$

kde P_{n-1} je polynom stupně $n-1$. Je-li $n-1$ alespoň 1, použijeme Základní větu algebry na P_{n-1}. Dostaneme tak kořen z_2 a můžeme psát

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\, P_{n-2}(z).$$

Postupujeme stejně i dále, až stupeň zbytkového polynomu je nula. Tak získáme n kořenů polynomu P_n. $\square$

Poznámka 3.4. Čtenář by se mohl pozastavit nad názvem Věty 3.5. Jestliže se něco jmenuje „Základní věta“ čehokoliv, očekáváme tvrzení obzvláštní důležitosti. Co je tak důležitého na tom, že každý polynom má v $\mathbb{C}$ kořen? Na první pohled nic moc. Ovšem při bližším zkoumání objevíme následující aspekt Věty 3.5.

Představme si, že známe pouze přirozená čísla $\mathbb{N}$. Ve světě přirozených čísel bychom chtěli řešit algebraické rovnice. To jsou rovnice typu

$$P(z) = 0,$$

kde P je polynom. V této chvíli má polynom P koeficienty z $\mathbb{N}$, neboť jiná čísla zatím neznáme. S rovnicí např.

$$2x - 6 = 0$$

bychom potíže neměli. Kdyby nám ale někdo zlomyslně změnil znaménko v této rovnici na

$$2x + 6 = 0,$$

tak máme problém. Buď řekneme, že tato rovnice je neřešitelná (ona opravdu neplatí pro žádné $x \in \mathbb{N}$) nebo si všimneme, že chyba není v rovnici. Ta je příliš jednoduchá na to, abychom ji prohlásili za neřešitelnou. Chyba je v číselném oboru. Východisko z této situace najdeme tak, že číselný obor $\mathbb{N}$ zvětšíme, abychom mohli naší rovnici vyhovět. Přidáme záporná celá čísla. Získali jsme množinu $\mathbb{Z}$ celých čísel.

Spokojenost nám dlouho nevydrží. Zlomyslník přijde s rovnicí

$$2x + 5 = 0.$$

Máme tu situaci, ve které jsme už byli. Rozšíříme tedy obor $\mathbb{Z}$ přidáním všech zlomků a dostaneme racionální čísla $\mathbb{Q}$. V oboru racionálních čísel už mají všechny polynomy stupně 1 s racionálními koeficienty kořen. Jenomže s lineárními rovnicemi nevystačíme. Objeví se např. rovnice

$$x^2 - 2 = 0.$$

Žádné racionální číslo jí nevyhovuje. Přidáme proto opět něco k číselnému oboru. Tentokrát iracionální čísla. Dostaneme se k množině $\mathbb{R}$ reálných čísel. Už zmíněný zlomyslník si ale nedá pokoj a změní nám znaménko v rovnici

$$x^2 + 2 = 0.$$

Nezbývá nám než opět zvětšovat číselný obor $\mathbb{R}$ na komplexní čísla $\mathbb{C}$. A co dál? Kdo zaručí, že se proces rozšiřování někde zastaví? Co když někdo obzvlášť nám nepřející přijde s algebraickou rovnicí s komplexními koeficienty, která není řešitelná v $\mathbb{C}$? Pak bychom museli opět zvětšovat množinu $\mathbb{C}$ na jakási „hyperkomplexní“ čísla. Naštěstí máme Větu 3.5. Ta garantuje, že proces se zastaví u množiny $\mathbb{C}$. Jinými slovy, komplexních čísel je dost na to, aby se staly všechny algebraické rovnice řešitelné.

Na závěr kapitoly uvedeme větu, která je opět specifikem komplexních funkcí, protože pro reálné funkce neplatí.

Věta 3.6. (Princip maxima modulu) *Nechť f je holomorfní a nekonstantní funkce na oblasti D. Pak $|f|$ nenabývá svého maxima v žádném bodě $z \in D$.*

Dříve než přistoupíme k důkazu, uvedeme si důsledek, který bývá někdy také pokládán za možnou formulaci principu maxima modulu.

Důsledek 3.2. *Nechť f je holomorfní na omezené oblasti D a spojitá na uzávěru $\overline{D}$ oblasti D. Pak $|f|$ nabývá svého maxima vždy na hranici ∂D. Stručně zapsáno*

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial D} |f(w)|, \qquad z \in D.$$

Důkaz. (Důsledku) Protože $|f|$ je funkce spojitá na uzavřené omezené množině $\overline{D}$, nabývá svého maxima v nějakém bodě $z_0 \in \overline{D}$, viz [1], Kap. 4, Věta 4.1. Věta 3.6 ale vylučuje případ, že by $z_0 \in D$. Zbývá tak $z_0 \in \overline{D} \setminus D = \partial D$. □

Nyní můžeme začít s důkazem Věty 3.6.

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že existuje $z_0 \in D$, kde $|f|$ nabývá maximum, tj.

$$|f(z_0)| = \max_{z \in D} |f(z)| \equiv a.$$

Tím pro každý bod $z \in D$ platí, že buď $|f(z)| = a$ nebo $|f(z)| < a$. Položíme

$$G = \{z \in D \mid |f(z)| = a\} \qquad \text{a} \qquad H = \{z \in D \mid |f(z)| < a\}.$$

Tyto množiny tvoří disjunktní rozklad oblasti D

$$D = G \cup H, \quad G \cap H = \emptyset \quad \text{a} \quad z_0 \in G. \tag{3.14}$$

Následující krok bude spočívat v ověření faktu, že obě množiny G a H jsou otevřené. Začneme s množinou G. Nechť $z \in G$ je libovolný. Hledáme nějaké ε-okolí $U(z;\varepsilon)$ bodu z, které je celé obsaženo v G, $U(z;\varepsilon) \subset G$. Protože D je otevřená, existuje vhodné $\varepsilon > 0$, že $U(z;\varepsilon) \subset D$. Ukážeme, že toto okolí leží rovněž v G. Podle Cauchyova integrálního vzorce platí pro každou kružnici $K(r)$ o středu z a poloměru $r < \varepsilon$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K(r)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}z.$$

Nechť $K(r)$ má parametrizaci $\varphi(t) = z + re^{\mathrm{i}t}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Pak

$$a = |f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K(r)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}z \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f\bigl(z + re^{\mathrm{i}t}\bigr)}{re^{\mathrm{i}t}} r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\bigl(z + re^{\mathrm{i}t}\bigr) \right| \mathrm{d}t.$$

Převedením na jednu stranu a vynásobením 2π dostaneme

$$0 \leq \int_0^{2\pi} \left| f\bigl(z + re^{\mathrm{i}t}\bigr) \right| \mathrm{d}t - 2\pi a = \int_0^{2\pi} \Bigl(\left| f\bigl(z + re^{\mathrm{i}t}\bigr) \right| - a \Bigr) \, \mathrm{d}t. \tag{3.15}$$

Protože a je maximální hodnota $|f|$, máme

$$\left| f\bigl(z + re^{\mathrm{i}t}\bigr) \right| \leq a, \quad \text{tj.} \quad \left| f\bigl(z + re^{\mathrm{i}t}\bigr) \right| - a \leq 0.$$

Vidíme, že v (3.15) integrujeme spojitou funkci, která je menší nebo rovna nule, a přitom integrál je nezáporný. Nezbývá nic jiného, než že integrál je roven nule, a tím i integrovaná funkce. To znamená, že

$$\left| f\bigl(z + re^{\mathrm{i}t}\bigr) \right| = a \qquad \text{pro } t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Zjistili jsme tak, že $|f|$ má ve všech bodech kružnice $K(r)$ hodnotu a. Protože kružnice $K(r)$ má libovolný poloměr $r \in (0, \varepsilon)$, platí, že $|f| = a$ ve všech bodech $U(z;\varepsilon)$. Jinými slovy $U(z;\varepsilon) \subset G$.

Otevřenost množiny H je snazší. Nechť $z \in H$. Zvolíme si $\varepsilon > 0$ tak, aby splňovalo

$$0 < \varepsilon < \bigl(a - |f(z)|\bigr).$$

Ze spojitosti funkce f v bodě z nalezneme δ-okolí $U(z;\delta)$, že pro všechna $w \in U(z;d)$ platí

$$|f(w) - f(z)| < \varepsilon.$$

Díky speciální volbě čísla ε tak dostaneme, že

$$|f(w)| < |f(z)| + \varepsilon < |f(z)| + a - |f(z)| = a$$

pro všechna $w \in U(z;\delta)$. Proto $U(z;\delta) \subset H$.

Protože množina D je souvislá, není množné ji pokrýt dvěma otevřenými disjunktními množinami, které obě by měli neprázdný průnik s D (viz Definice 1.5). Porovnáme-li tento fakt s (3.14), tak zbývá pouze možnost, že $H \cap D = \emptyset$. To ovšem znamená, že

$$D = G.$$

Pak ale funkce $|f|$ je konstantní na D. Tento spor uzavírá důkaz. $\square$

Princip maxima modulu opět zdůrazňuje, že není žádná jednoduchá analogie mezi diferencovatelnými reálnými a komplexními funkcemi.

Uvažujme následující jednoduchý příklad. Reálná funkce $f(x) = 1 - x^2$ na $\langle -1, 1\rangle$ nabývá svého maxima v bodě 0, což je vnitřní bod intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Komplexní analogií je funkce

$$f(z) = 1 - z^2 \quad \text{na } D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}.$$

Princip maxima zakazuje, aby maximum $|f|$ bylo ve vnitřním bodě. Opravdu, snadným výpočtem zjistíme, že maximum $|f|$ se nabývá v hraničních bodech $\pm\mathrm{i}$ a $|f(\pm\mathrm{i})| = 2$.

5 Cvičení

Úloha: Vypočtěte

$$\int_C \frac{z}{z^4 - 1},$$

v případě, že

(a) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| = \alpha\}$, $\alpha > 0$, $\alpha \ne \frac{1}{2}$, C je kladně orientovaná;

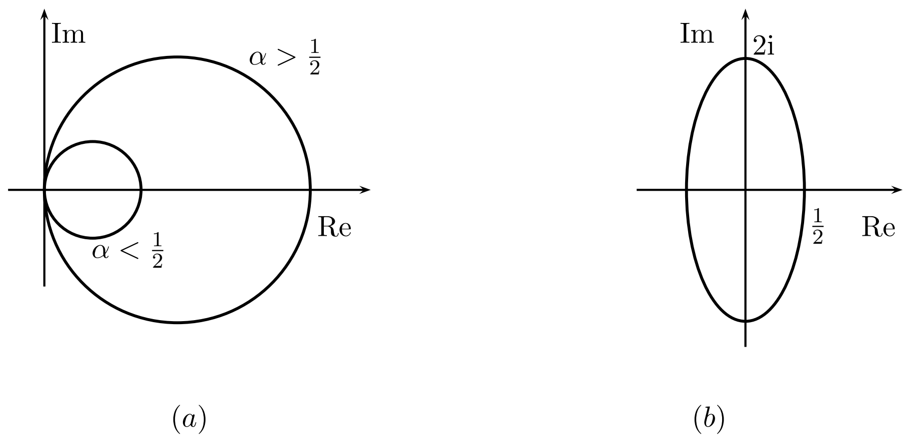
(b) C je elipsa s poloosami $\frac{1}{2}$ (na reálné ose) a 2 (na imaginární ose).

Řešení: a) Křivka C je kružnice se středem α a poloměrem α, viz obr.3.4(a). Abychom mohli použít Cauchyův integrální vzorec, musíme si integrovanou funkci představit v příhodném tvaru. Zjistíme kořeny jmenovatele:

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i}).$$

Jedná se o body $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. Pro $\alpha < \frac{1}{2}$ žádný z nich neleží uvnitř kružnice C. Proto podle Cauchyovy věty je

$$\int_C \frac{z}{z^4-1} = 0, \quad \alpha < \frac{1}{2}.$$



Obr. 3.4.

Je-li $\alpha > \frac{1}{2}$, pak uvnitř C leží bod 1. Proto napíšeme

$$\int_C \frac{z}{z^4-1} = \int_C \frac{z}{(z+1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} \, \frac{1}{z-1}.$$

Tím je integrál ve tvaru (3.9), kde

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}, \quad \text{a} \quad z_0 = 1.$$

Aplikací tohoto vzorce ihned máme

$$\int_C \frac{z}{z^4-1} = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{4} = \frac{\pi\mathrm{i}}{2}.$$

(b) Uvnitř křivky leží body $\pm\mathrm{i}$, viz obr.3.4(b). Zde budeme muset integrovanou funkci alespoň částečně rozložit na parciální zlomky.

$$\frac{z}{z^4-1} = \frac{z}{z^2-1} \, \frac{1}{z^2+1} = \frac{z}{z^2-1} \, \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} =$$
$$= \frac{z}{z^2-1} \, \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}} \right).$$

Nyní můžeme psát

$$\int_C \frac{z}{z^4-1} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_C \frac{z}{z^2-1} \, \frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_C \frac{z}{z^2-1} \, \frac{1}{z+\mathrm{i}}.$$

První integrál je žádaného typu (3.9) pro $f(z) = z/(z^2-1)$ a $z_0 = \mathrm{i}$; druhý s toutéž funkcí, ale pro $z_0 = -\mathrm{i}$. Závěrem

$$\int\limits_C \frac{z}{z^4-1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}}{-2} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\,2\pi\mathrm{i}\frac{-\mathrm{i}}{-2} = -\pi\mathrm{i}.$$

Úloha: Pomocí Věty 3.6 – Princip maxima modulu – odvoďte její protějšek pro minimum, tzv. Princip minima modulu:

Je-li f holomorfní, nekonstantní a nenulová na oblasti D, pak $|f|$ nenabývá svého minima v žádném bodě $z \in D$.

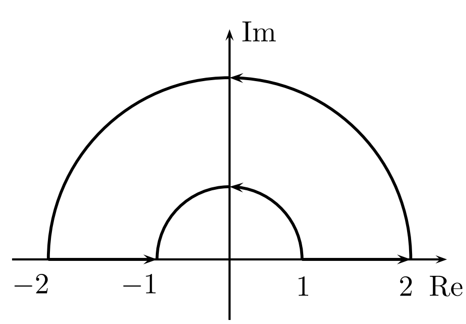
Řešení: Protože $f(z) \neq 0$ pro všechna $z \in D$, je funkce

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

holomorfní a nekonstantní na D. Podle Věty 3.6 $|g|$ nenabývá v žádné bodě $z \in D$ svého maxima. Jinými slovy, $|f|$ nenabývá svého minima na D.

Stejně jako Důsledek 3.2 Principu maxima modulu, má i Princip minima modulu podobný důsledek, viz cvičení 12.

1. Vypočtěte integrály podél zadaných křivek.
   - (a) $\int_C \mathrm{Re}(z)$, $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$, kladně orientovaná;
   - (b) $\int_C |z|$, C je úsečka $[0, 2-\mathrm{i}]$;
   - (c) $\int_C |z|\overline{z}$, $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \cup [-1, 1]$, kladně orientovaná;
   - (d) $\int_C f$, f je hlavní hodnota logaritmu, $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, kladně orientovaná;
   - (e) $\int_C e^{-z}$, $C = \{t + 2\mathrm{i}t \mid t \in \langle 1, \infty)\}$;
   - (f) $\int_C \frac{\overline{z}}{z}$, C je na obr.3.5;
   - (g) $\int_C (z-\mathrm{i})^2$, $C = \{t + \mathrm{i}t^2 \mid t \in \langle -1, 1\rangle\}$. Zjistěte hodnotu integrálu jednak přímým výpočtem a jednak integrací podél úsečky $[-1+\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}]$ a aplikací Cauchyovy věty.



Obr. 3.5.

2. Pro která $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\text{(a)} \int_0^1 \sin(tz)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{(b)} \int_{-2}^1 z e^{\mathrm{i}tz}\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}.$$

3. Nechť C je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná křivka neprocházející bodem $z_0 \in \mathbb{C}$. Zjistěte, jakých možných hodnot může nabývat integrál

$$\int_C (z - z_0)^n$$

v závislosti na $n \in \mathbb{Z}$ a poloze bodu z_0 vůči křivce C.

4. Nechť C je uzavřená jednoduchá kladně orientovaná křivka. Vypočtěte hodnoty integrálu

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 9}$$

v případě, že

   (a) bod 3i je uvnitř a bod −3i vně C;

   (b) bod −3i je uvnitř a bod 3i vně C;

   (c) oba body 3i a −3i leží vně C;

   (d) oba body 3i a −3i leží uvnitř C.

5. Nechť $P(z)$ je polynom

$$P(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n),$$

kde $z_1, \dots, z_n$ jsou navzájem různá čísla. Nechť C je uzavřená jednoduchá křivka kladně orientovaná neprocházející žádným z bodů $z_1, \dots, z_n$. Jaký je maximální počet různých hodnot integrálu

$$\int_C \frac{1}{P(z)}$$

v závislosti na poloze křivky C vůči bodům $z_1, \dots, z_n$?

6. Nechť C je uzavřená jednoduchá a kladně orientovaná křivka neprocházející body $\pm\mathrm{i}a$, $a > 0$. Zjistěte všechny hodnoty integrálu

$$\int_C \frac{e^z}{z^2 + a^2}$$

v závislosti na křivce C.

7. Nechť $f(z) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{t - z}\,\mathrm{d}t$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

(a) Je $\operatorname{Re} f$ omezená funkce na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$?
(b) Je $\operatorname{Im} f$ omezená funkce na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$?
(c) Je f holomorfní na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$?
(d)* Existuje $\lim_{z\to\infty} zf(z)$?
(e)* Spočtěte $\int_C f$ přes uzavřenou jednoduchou a kladně orientovanou křivku C mající ve svém vnitřku úsečku $[-1, 1]$.

8. Nechť f je holomorfní na $\mathbb{C}$ taková, že existuje $a > 0$ s vlastností

$$f(z) = f(z + a) = f(z + \mathrm{i}a)$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Ukažte, že f musí být nutně konstantní.

9. Nalezněte všechny funkce f holomorfní na $\mathbb{C}$ takové, že

(a) f má omezenou primitivní funkci;
(b) f má omezenou derivaci $f^{(k)}$ řádu $k \geq 0$.

10. Ukažte přímo bez užití Věty 3.6, že funkce $|e^z|$ nabývá svého maxima na hranici omezené oblasti D.

11. Vypočtěte minima a maxima absolutních hodnot následujících funkcí

(a) $f(z) = z^2 - z$ na $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$;
(b) $f(z) = \sin z$ na $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| \leq \pi,\ |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$.

12. Z Principu minima modulu vyvoďte jeho následující verzi:

> Nechť f je holomorfní v omezené oblasti D spojitá na uzávěru $\overline{D}$. Pak buď $f(z) = 0$ pro nějaké $z \in D$ nebo $|f|$ nabývá své minimum na hranici ∂D.

13. Nechť f je holomorfní a nekonstantní na oblasti $U(0; 1)$ a spojitá na $\overline{U(0; 1)}$. Nechť $|f(z)| = 1$ pro $|z| = 1$. Ukažte, že pak f musí mít kořen v $U(0; 1)$.

Výsledky.

1.(a) $\pi \mathrm{i} r^2$, (b) $\sqrt{5}(1 - \mathrm{i}/2)$, (c) $\pi\mathrm{i}$, (d) $-2\pi\mathrm{i}r$, (e) $-1 - 2\mathrm{i}$, (f) $4/3$, (g) $2/3$; 2.(a) $z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (b) $z = (2k + 1)\pi$, $z = 2k\pi - \mathrm{i} \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $z = (2k + 1)\pi - \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 3. 0 pro $n \neq -1$, $2\pi\mathrm{i}$ pro $n = -1$ a z_0 uvnitř C, 0 pro $n \neq -1$ a z_0 vně C; 4. (a) $\pi/3$, (b) $-\pi/3$, (c) 0, (d) 0; 5. $2^n - 1$ pro $n > 1$ a 2 pro $n = 1$; 6. $2\pi\mathrm{i}\frac{\sin a}{a}$ pro $\pm\mathrm{i}a$ uvnitř C, 0 pro $\pm\mathrm{i}a$ vně C, $\frac{\pi}{a}e^{\mathrm{i}a}$ pro $\mathrm{i}a$ uvnitř a $-\mathrm{i}a$ vně C, $-\frac{\pi}{a}e^{\mathrm{i}a}$ pro $-\mathrm{i}a$ uvnitř a $\mathrm{i}a$ vně C; 7. (a) neomezená, (b) omezená, (c) z Cauchy-Riemannových podmínek plyne, že f je holomorfní, (d) existuje a je rovna 2, využijte toho, že $|zf(z) + 2| = \left|\int_{-1}^{1} \frac{t}{t-z}\, dt\right|$, (e) $-4\pi\mathrm{i}$, zaměňte pořadí integrace v $\int_C \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t-z}\, dz$; funkce f je $f(z) = \ln_0 \frac{z-1}{z+1}$; 8. Funkce f je omezená na $\mathbb{C}$, užijte Větu 3.4; 9. (a) $f = 0$, (b) f je polynom stupně k; 11. (a) minimum je v bodě $z = 0$, maximum v bodě $z = -1$, (b) minimum je v bodech 0, $\pm\pi$, maximum v bodech $\pm\pi/2 \pm \mathrm{i}$; 12. Protože $|f|$ je spojitá na omezené uzavřené množině $\overline{D}$, nabývá na ní svého minima. Je-li $f \neq 0$ na D a nekonstantní, pak nenabývá minima na D. Odtud plyne, že minima se nabývá na $\overline{D} \setminus D = \partial D$; 13. Z Důsledku 3.2 a cvičení 12 plyne, že nemá-li f kořen v $U(0;1)$, pak ke $|f| = 1$ na $U(0;1)$. Cvičení 13 (b) v Kapitole 2 dává, že pak $f =$konst.

Kapitola 4

Reprezentace holomorfní funkce mocninnou řadou

V této kapitole završíme studium holomorfních funkcí. Zatím jsme odvodili důležitou integrální reprezentaci holomorfní funkce — Cauchyův integrální vzorec. Teď postoupíme o krok dále a z integrální reprezentace vyvodíme jinou, v mnoha případech ještě důležitější reprezentaci holomorfní funkce ve formě mocninné řady. Je to opět jeden z výsledků typických pro komplexní funkce. V reálném oboru neplatí.

Předpokládáme, že se čtenář s pojmem řady jakéhokoli druhu už někdy setkal.

1 Mocninné řady

Protože zde bude vše více či méně souviset s mocninnou řadou, začneme přesnou definicí.

Definice 4.1. *Řada tvaru*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{4.1}$$

*se nazývá **mocninná řada** se středem z_0 a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$. Výrazy*

$$S_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n (z - z_0)^n$$

*nazýváme **částečnými součty** řady (4.1) .*

První problém, se kterým se u každé nekonečné řady musíme vypořádat, je otázka konvergence. V případě číselné řady jsou v podstatě dvě možnosti: buď řada konverguje nebo diverguje. Sčítáme-li však funkce jako v případě mocninné řady, lze konvergenci ještě rozlišit.

Definice 4.2. *Řekneme, že mocninná řada (4.1) **konverguje bodově** na množině M, jestliže pro každé $z \in M$ existuje vlastní limita $S(z)$ částečných součtů*

$$S(z) = \lim_{m \to \infty} S_m(z).$$

*Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{m\to\infty} S_m(z)$, říkáme, že řada **diverguje** v bodě z.*

Funkci $S(z)$ prohlásíme za součet řady (4.1) a budeme ho značit

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Definiční obor součtu $S(z)$ mocninné řady jsou přesně ty body $z \in \mathbb{C}$, ve kterých řada konverguje. Každá mocninná řada typu (4.1) triviálně konverguje v bodě $z = z_0$, přičemž její součet je $S(z_0) = a_0$.

Víme-li, že řada má za součet funkci $S(z)$, můžeme se ptát na způsob konvergence. Některé druhy konvergence jsou „kvalitnější“ v tom smyslu, že přenesou vlastnosti sčítaných funkcí i na součet $S(z)$. To je i případ popsaný v následující definici.

Definice 4.3. *Řekneme, že mocninná řada (4.1)* ***konverguje stejnoměrně*** *na množině M, jestliže existuje funkce $S(z)$ taková, že*

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{z \in M} |S_m(z) - S(z)| = 0,$$

kde $S_m(z)$ jsou částečné součty řady (4.1).

Poznámka 4.1. Pozastavme se chvíli u rozdílu mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí mocninné řady. Nechť řada (4.1) konverguje bodově na množině M. Znamená to, že ke každému zvolenému bodu $z \in M$ a k odchylce $\varepsilon > 0$ nalezneme index m_0, že všechny částečné součty s indexem vyšším se v bodě z liší od $S(z)$ pouze o ε:

$$|S_m(z) - S(z)| < \varepsilon \quad \text{pro } m \geq m_0.$$

Ponecháme-li si stejné $\varepsilon > 0$, ale změníme vyšetřovaný bod z na jiný, např. $z' \in M$, pak opět existuje index m_0', že

$$|S_m(z') - S(z')| < \varepsilon \quad \text{pro } m \geq m_0'.$$

Index m_0' může být mnohem větší než m_0. Ke stejné odchylce $\varepsilon > 0$ tak v různých bodech množiny M musíme brát obecně vyšší a vyšší indexy, abychom se s částečným součtem přiblížili k $S(z)$ se zadanou chybou.

Naproti tomu stejnoměrná konvergence zaručuje, že k $\varepsilon > 0$ existuje index m_0 s vlastností

$$\sup_{z \in M} |S_m(z) - S(z)| < \varepsilon \quad \text{pro } m \geq m_0.$$

Zde se částečný součet $S_{m_0}(z)$ liší od $S(z)$ o zadané $\varepsilon > 0$ *ve všech* bodech M najednou. Odtud vyplývá, že stejnoměrná konvergence je silnější pojem než bodová konvergence, tj. konverguje-li řada stejnoměrně, konverguje i bodově. Obrácená implikace neplatí. Ilustrujme si to na příkladu.

Příklad 4.1. Uvažujme geometrickou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{4.2}$$

s kvocientem z, $|z| < 1$. Jistě si ještě pamatujeme vzorec pro součet takové řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

V naší terminologii řada (4.2) konverguje bodově na množině $M = \{z \mid |z| < 1\}$ k funkci $1/(1-z)$. Nekonverguje tam však stejnoměrně. Částečný součet $S_m(z)$ je roven

$$S_m(z) = \sum_{n=0}^{m} z^n = \frac{1-z^{m+1}}{1-z}.$$

Odtud

$$\begin{aligned}\sup_{z\in M} |S_m(z) - S(z)| &= \sup_{z\in M} \left| \frac{1-z^{m+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| = \\ &= \sup_{z\in M} \left| \frac{z^{m+1}}{1-z} \right| = \sup_{z\in M} \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|} = \infty.\end{aligned}$$

Zde není šance učinit rozdíl dokonce jen konečným. Řada (4.2) nekonverguje stejnoměrně na M.

Kdybychom se ale uskromnili a místo celé množiny M uvažovali pouze podmnožinu $M_r = \{z \mid |z| \le r\}$ pro jisté $r \in (0, 1)$, pak se situace změní. Snadno zjistíme, že

$$\sup_{z\in M_r} |S_m(z) - S(z)| = \sup_{z\in M_r} \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|} = \frac{r^{m+1}}{1-r}.$$

Protože $0 < r < 1$, lze zvyšováním mocniny $m + 1$ docílit toho, aby

$$\frac{r^{m+1}}{1-r} < \varepsilon$$

pro předem zadané $\varepsilon > 0$. Můžeme tak učinit závěrečnou rekapitulaci: řada (4.2) konverguje bodově na množině $M = \{z \mid |z| < 1\}$, stejnoměrně na každé množině M_r, ale nikoli stejnoměrně na celé množině M.

Postačující podmínkou pro to, aby řada (4.1) konvergovala v bodě $z \in \mathbb{C}$ je, aby konvergovala (reálná) řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|z - z_0|^n.$$

V tom případě říkáme, že mocninná řada *konverguje absolutně* v bodě $z \in \mathbb{C}$. Konverguje-li řada absolutně pro každé $z \in M$, říkáme, že řada konverguje absolutně na M.

Nutnou podmínkou ke konvergenci mocninné řady (4.1) je, aby její členy konvergovaly k nule

$$\lim_{n\to\infty} a_n (z - z_0)^n = 0. \tag{4.3}$$

O tom se snadno přesvědčíme. Nechť řada konverguje v bodě $z \in \mathbb{C}$. Pak

$$a_n(z-z_0)^n = S_n(z) - S_{n-1}(z).$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z-z_0)^n = \lim_{n\to\infty} S_n(z) - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}(z) = S(z) - S(z) = 0.$$

Také pro stejnoměrnou konvergenci máme jedno kritérium, nazývané Weierstrassovo. Je formulované obecněji, pro řady funkcí.

Věta 4.1. (Weierstrassovo kritérium) *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ je řada funkcí a nechť $M \subset \mathbb{C}$. Položíme*

$$c_n = \sup_{z\in M} |g_n(z)|.$$

Je-li $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ konverguje stejnoměrně na M.

Důkaz. Z podmínky $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$ ihned vyplývá, že daná řada konverguje absolutně pro všechna $z \in M$. Nechť $S(z)$ značí její součet a $S_m(z)$ její m-tý částečný součet. Pak

$$\sup_{z\in M} |S(z) - S_m(z)| = \sup_{z\in M} \Big|\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) - \sum_{n=0}^{m} g_n(z)\Big| = \tag{4.4}$$

$$= \sup_{z\in M} \Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} g_n(z)\Big| \le \sup_{z\in M} \sum_{n=m+1}^{\infty} |g_n(z)| \le \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n.$$

Protože $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ je konvergentní, lze poslední výraz ve (4.4) učinit volbou vysoké mocniny $m+1$ libovolně malým. Jinými slovy, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje m_0, že

$$\sup_{z\in M} |S_m(z) - S(z)| < \varepsilon \quad \text{pro } m \ge m_0.$$

Tím je stejnoměrná konvergence dokázána. □

K vyšetřování konvergence mocninné řady budeme potřebovat pojem *limes superior* posloupnosti (t_n) reálných čísel. Značí se $\overline{\lim}$ a definice je následující

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{t_k \mid k \ge n\}. \tag{4.5}$$

Čísla $\sup\{t_k \mid k \ge n\}$ tvoří nerostoucí posloupnost v indexu n. Proto limita napravo existuje (může být i nevlastní). Tak každá posloupnost má limes superior. Čím se liší od limity? Pokud existuje limita $\lim_{n\to\infty} t_n$, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n.$$

To je vidět z následující analýzy definice (4.5). Nechť $\overline{\lim}_{n\to\infty} t_n = A \in \mathbb{R}$. Pak

(i_A) pro každé $\varepsilon > 0$ je splněna nerovnost $t_n \ge A - \varepsilon$ pro nekonečně mnoho členů posloupnosti (t_n);

(ii_A) pro každé $\varepsilon > 0$ je splněna nerovnost $t_n \le A + \varepsilon$ pro všechny členy posloupnosti (t_n) od jistého indexu n_0.

Pokud bychom podmínku (i_A) zesílili na požadavek

$$t_n \ge A - \varepsilon \quad \text{od jistého indexu } n_0,$$

dávali by obě podmínky přesně definici limity. Je-li A limitou posloupnosti (t_n), je i limes superior pro (t_n).

I když jsme předešlý rozbor provedli pro konečnou hodnotu A, platí i v případě nevlastního limes superior. Nechť např. $A = \infty$. Podmínka (ii_A) je automaticky splněna, protože $t_n \le \infty + \varepsilon = \infty$. Ovšem podmínku ($i_A$) musíme v tomto případě přeformulovat. Pro konečné A znamenalo číslo $A - \varepsilon$ vlastně jakékoli číslo menší než A. Označíme-li si ho např. $\lambda = A - \varepsilon$, pak ($i_A$) říká, že pro každé $\lambda < A$ cosi platí. V tomto tvaru už nevadí, že $A = \infty$ a dostáváme

(i_∞) Pro každé $\lambda < \infty$ je splněna nerovnost $t_n \ge \lambda$ pro nekonečně mnoho členů posloupnosti (t_n).

Příklad 4.2. Nechť (t_n) je jakákoli posloupnost nul a jedniček. Obsahuje-li pouze konečně mnoho nul, je jasné, že

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n = 1.$$

Obsahuje-li pouze konečně mnoho jedniček, pak analogicky

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n = 0.$$

Zbývá případ, že v posloupnosti (t_n) je nekonečně mnoho nul i jedniček. Pak zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} t_n \quad \text{neexistuje.}$$

Ale

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{t_k \mid k \ge n\} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

V tomto okamžiku jsme připraveni k formulaci věty, ve které vyšetříme otázku oboru konvergence mocninné řady.

Věta 4.2. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je mocninná řada a nechť $R \in \langle 0, \infty\rangle$ je číslo dané*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{4.6}$$

Pak platí

(i) *Je-li $R = 0$, řada konverguje pouze pro $z = z_0$.*

(ii) *Je-li $R = \infty$, řada konverguje absolutně pro všechna $z \in \mathbb{C}$.*

(iii) *Je-li* $0 < R < \infty$, *řada konverguje absolutně na* $U(z_0; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$, *stejnoměrně na každé množině* $\overline{U(z_0; r)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$, $0 < r < R$ *a diverguje pro* $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > R\}$.

(Ve vzorci (4.6) užíváme konvenci $1/0 = \infty$ *a* $1/\infty = 0$.*)*

Poznámka 4.2. Číslo R se nazývá *poloměr konvergence*. Je to přirozený název vyplývající z vlastností (i) – (iii). Mocninná řada tudíž konverguje absolutně na otevřeném kruhu o středu z_0 a poloměru R – viz bod (iii). Tento kruh $U(z_0; R)$ budeme někdy nazývat *kruhem konvergence*. Dále, řada stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném kruhu o středu z_0 a poloměru menším než poloměr konvergence. Mimo uzavřený kruh $\overline{U(z_0; R)}$ řada diverguje. Ve větě se nic neříká o bodech ležících na hranici kruhu konvergence, tj. $|z - z_0| = R$. Tam mohou nastat různé možnosti závisející na konkrétní řadě. Některé si ukážeme v Příkladu 4.3 za důkazem Věty 4.2.

Důkaz. Budeme postupně dokazovat všechny případy (i), (ii) a (iii).

(i) Je-li $R = 0$, znamená to, že

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty.$$

Nechť $z \neq z_0$, tj. $|z - z_0| > 0$. Využijeme vlastnost (i_∞) pro $\overline{\lim}$. Pro volbu $\lambda = 1/|z - z_0|$ dostaneme

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|z - z_0|} \quad \text{pro nekonečně indexů } n.$$

To je ekvivalentní s

$$|a_n|\,|z - z_0|^n \geq 1$$

pro nekonečně mnoho n. Členy řady tak nekonvergují k nule a podle (4.3) řada diverguje.

(ii) Je-li $R = \infty$, pak

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Protože každá mocninná řada konverguje pro $z = z_0$, stačí se zde omezit na $z \neq z_0$. Opět $|z - z_0| > 0$ a podmínka (ii_A) říká, že

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2|z - z_0|}$$

od jistého indexu n_0. To znamená, že pro $n \geq n_0$ platí

$$|a_n|\,|z - z_0|^n \leq \frac{1}{2^n}.$$

Mocninná řada je tak majorizována konvergentní geometrickou řadou. Odtud vyplývá žádaná absolutní konvergence.

(iii) Je-li $0 < R < \infty$, pak

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \in (0, \infty).$$

Nechť z leží uvnitř kruhu konvergence, $|z-z_0|<R$. Zvolíme si $\varrho>0$ takové, aby

$$|z-z_0|<\varrho<R. \tag{4.7}$$

Podle (ii_A) od jistého indexu n_0 platí

$$\sqrt[n]{|a_n|}\le\frac{1}{\varrho},\quad \text{tj.}\quad |a_n|\le\frac{1}{\varrho^n}. \tag{4.8}$$

Nerovnost vynásobíme výrazem $|z-z_0|^n$:

$$|a_n|\,|z-z_0|^n\le\frac{|z-z_0|^n}{\varrho^n}=\left(\frac{|z-z_0|}{\varrho}\right)^n\quad \text{pro } n\ge n_0.$$

Z podmínky (4.7) vidíme, že číslo

$$q=\frac{|z-z_0|}{\varrho}<1,$$

a tudíž mocninná řada je majorizována konvergentní geometrickou řadou s kvocientem q. To ovšem znamená, že řada $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ konverguje absolutně pro všechna z splňující $|z-z_0|<R$.

Ukážeme pomocí Weierstrassova kritéria, že zkoumaná řada konverguje taká stejnoměrně na množině $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|\le r\}$ pro každé $0\le r<R$. Vsuneme opět pomocné číslo ϱ mezi r a R:

$$|z-z_0|\le r<\varrho<R. \tag{4.9}$$

Takto zvolené ϱ splňuje i (4.7), a tím rovněž (4.8). Proto můžeme provést následující odhad:

$$\sup_{|z-z_0|\le r}|a_n|\,|z-z_0|^n\le\sup_{|z-z_0|\le r}\frac{|z-z_0|^n}{\varrho^n}=\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n.$$

Protože volba (4.9) zaručuje, že

$$\frac{r}{\varrho}<1,$$

je řada $\sum_{n=0}^{\infty}(r/\varrho)^n$ konvergentní. Podle Weierstrassova kritéria je tak vyšetřovaná řada stejnoměrně konvergentní na množině $\{z\in\mathbb{C}\mid\ |z-z_0|\le r\}$.

Zbývá ukázat, že pro $|z-z_0|>R$ řada diverguje. Z vlastnosti (i_A) pro $\overline{\lim}$ vyplývá, že nerovnost

$$\sqrt[n]{|a_n|}\ge\frac{1}{|z-z_0|}$$

platí pro nekonečně mnoho indexů n. Pro tyto indexy je

$$|a_n|\,|z-z_0|^n\ge 1.$$

Není splněna nutná podmínka (4.3) pro konvergenci, tudíž řada diverguje. □

Právě dokázaná věta zahrnuje v sobě i kritérium konvergence pro číselné řady, se kterým se čtenář během svého života určitě již setkal. Mějme číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a nechť

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Utvoříme-li mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, její poloměr konvergence R je větší než 1, $R > 1$. Tato řada tudíž konverguje např. pro $z = 1$, což je ale původní číselná řada. Analogicky vypadá i případ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

udávající kritérium divergence.

Můžeme si ještě uvést další užitečné důsledky Věty 4.2. Z toho, že na kruhu konvergence $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konverguje absolutně vyplývá, že číselná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, \varrho^n \tag{4.10}$$

konverguje pro každé $0 \le \varrho < R$

Nakonec, ze stejnoměrné konvergence řady na každém uzavřeném kruhu obsaženém v kruhu konvergence vyplývá s pomocí Tvrzení 3.3, že

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z - z_0)^n \tag{4.11}$$

pro každou křivku C ležící uvnitř kruhu konvergence. Tyto dva postřehy se nám brzy budou hodit.

Příklad 4.3. Nechť $p \in \mathbb{R}$ je zvolený parametr. Vyšetříme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \, z^n \tag{4.12}$$

v závislosti na hodnotách p. Jedná se o řadu se středem $z_0 = 0$ a koeficienty $a_n = n^p$. Zjistíme poloměr konvergence.

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{p/n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^p.$$

Protože p je pevně zvolené, stačí vyšetřit chování $n^{1/n}$.

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1.$$

Odtud $R = 1$ a řada (4.12) konverguje na $U(0;1)$ bez ohledu na hodnotu p.

Rozebereme si nyní několik speciálních případů. Nechť $p = 1$. Pak se jedná o řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n. \tag{4.13}$$

Pro z ležící na hranici $\partial U(0;1)$ platí $|z| = 1$. V tom případě

$$\lim_{n\to\infty} |nz^n| = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

a tudíž řada (4.13) nekonverguje v žádném bodě hranice kruhu konvergence.

Nechť $p = -2$. Dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n.$$

Pro $z \in \partial U(0;1)$ je absolutní hodnota členu řady rovna

$$\left|\frac{1}{n^2} z^n\right| = \frac{1}{n^2}.$$

Tato řada konverguje pro všechna z ležící na hranici $\partial U(0;1)$.

Do třetice zvolíme $p = -1$. Získáme tak řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n. \tag{4.14}$$

Zde je situace poněkud delikátnější co do chování řady na hranici kruhu konvergence. Nechť $z \in \partial U(0;1)$. Můžeme ho zapsat v exponenciálním tvaru

$$z = e^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi\rangle.$$

Pokud $\varphi = 0$, tj. $z = 1$, dostaneme harmonickou řadu, a ta diverguje. Nechť $\varphi \neq 0$. V tomto případě musíme použít tzv. Dirichletovo kritérium pro konvergenci číselné řady:

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ konverguje, pokud

(1) $\alpha_n \geq 0$, tvoří nerostoucí posloupnost s $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$;

(2) existuje konstanta K, že $\left|\sum_{n=1}^{m} \beta_n\right| \leq K$ pro každé m.

Členy naší mocninné řady jsou tvaru součinu. Položíme

$$\alpha_n = \frac{1}{n}, \qquad \beta_n = e^{\mathrm{i}n\varphi}.$$

Požadavek (1) je zjevně splněn. Ověříme i požadavek (2). Jde o konečný součet geometrické řady s kvocientem $q = e^{\mathrm{i}\varphi}$.

$$\left|\sum_{n=1}^{m} e^{\mathrm{i}n\varphi}\right| = \left|e^{\mathrm{i}\varphi} \frac{1 - e^{\mathrm{i}m\varphi}}{1 - e^{\mathrm{i}\varphi}}\right| \leq \frac{2}{|1 - e^{\mathrm{i}\varphi}|} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}} = \frac{2}{\sqrt{2 - 2\cos\varphi}} = \frac{1}{\sin(\varphi/2)}.$$

Pro pevné $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle \setminus \{0\}$ je hledané K pro podmínku (2) Dirichletova kritéria

$$K = \frac{1}{\sin(\varphi/2)}.$$

Řada (4.14) tak konverguje ve všech bodech hraniční kružnice kromě bodu $z = 1$.

V tomto textu nás nebude zajímat chování mocninné řady na hranici kruhu konvergence, které je často velmi obtížné vyšetřit. Úplně postačí fakt, že řada konverguje uvnitř tohoto kruhu.

Podívejme se znovu na řadu (4.12). Přestože koeficienty $a_n = n^p$ závisely na volbě parametru $p \in \mathbb{R}$, poloměr konvergence zůstával stejný. Důvodem bylo, že

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

Z tohoto jednoduchého pozorování můžeme vytěžit více. Změníme-li koeficienty a_n dané řady na $n^p a_n$, poloměr konvergence zůstane stejný. Plyne to z následujícího výpočtu

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n^p|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} (n^{1/n})^p \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{4.15}$$

Vraťme se ještě ke vzorci (4.6) pro poloměr konvergence. Je vždycky lepší mít k dispozici co nejvíce prostředků použitelných k řešení problémů. Ukážeme si proto, že i vzorec pro poloměr konvergence má svoji alternativu.

Tvrzení 4.1. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence R. Pokud existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \tag{4.16}$$

je rovna poloměru konvergence R.

Důkaz. Nechť existuje limita (4.16). Pak také existuje limita převrácených hodnot, jejíž hodnotu si označíme L.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Ukážeme, že limes superior posloupnosti $\sqrt[n]{|a_n|}$ je rovno L. Tím bude důkaz hotov.

Začneme s případem $L = 0$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje index N, že pro všechna $n \geq N$ máme

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad |a_{n+1}| < \varepsilon\,|a_n|.$$

Opětovným použitím této nerovnosti pro indexy $n > N$ získáme

$$|a_n| < \varepsilon\,|a_{n-1}| < \varepsilon^2|a_{n-2}| < \cdots < \varepsilon^{n-N}|a_N|.$$

Tím ovšem

$$|a_n|^{1/n} < \varepsilon^{\frac{n-N}{n}}|a_N|^{1/n}.$$

Aplikace limes superior pro $n \to \infty$ na předchozí nerovnost dává

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \varepsilon^{\frac{n-N}{n}}|a_N|^{1/n} = \varepsilon.$$

V důsledku libovolnosti ε je tak

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = 0.$$

Nechť $L = \infty$. Pak ke každému libovolně velkému K existuje index N, že pro všechna $n \geq N$ platí

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > K, \quad \text{tj.} \quad |a_{n+1}| > K\,|a_n|.$$

Stejně jako výše aplikujeme tuto podmínku několikrát za sebou a dostaneme

$$|a_n|^{1/n} > K^{\frac{n-N}{n}} |a_N|^{1/n}, \quad \text{pro } n > N.$$

Požitím $\overline{\lim}$ pro $n \to \infty$ dává

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \geq K.$$

Protože K bylo jakkoli velké číslo, nutně musí být

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty.$$

Zbývá případ $0 < L < \infty$. Z definice limity vyplývá, že pro libovolně malé ε existuje index N, že

$$\left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L\right| < \varepsilon$$

pro všechna $n \geq N$. Nechť ε je tak malé, že $0 < \varepsilon < L$. V tom případě si poslední nerovnost můžeme přepsat do tvaru

$$L - \varepsilon < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L + \varepsilon. \tag{4.17}$$

Představme si, že vypíšeme tyto nerovnosti postupně pro $n = N, N+1, \ldots, m$, a pak je spolu vynásobíme. Díky volbě ε jsou všechny členy v (4.17) kladné, proto se nerovnost při násobení zachová. V součinu prostředních členů se téměř všechno pokrátí:

$$\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|} \cdot \frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|} \cdot \cdots \cdot \frac{|a_m|}{|a_{m-1}|} = \frac{|a_m|}{|a_N|}.$$

Protože činitelů je $m - N$, dostáváme

$$(L-\varepsilon)^{m-N} < \frac{|a_m|}{|a_N|} < (L+\varepsilon)^{m-N}.$$

Nerovnost vynásobíme $|a_N|$ a umocníme na $1/m$.

$$|a_N|^{1/m}(L-\varepsilon)^{\frac{m-N}{m}} < |a_m|^{1/m} < |a_N|^{1/m}(L+\varepsilon)^{\frac{m-N}{m}}.$$

Nyní, stejně jako v předešlých případech, aplikujeme limes superior na všechny členy v nerovnosti. Vyjde nám

$$L - \varepsilon \leq \varlimsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} \leq L + \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolně malé, musí nutně platit

$$L = \varlimsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m}.$$

$\square$

Typický případ, kdy je výhodnější podílový tvar (4.16) vzorce pro poloměr konvergence, nastává, když koeficienty a_n obsahují faktoriál $n!$.

Příklad 4.4. Jaký má poloměr konvergence řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n?$$

Podle (4.16) platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^n}{n!}}{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2\,n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty.$$

Řada konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Kdybychom použili původní odmocninový vzorec (4.6), tak bychom museli počítal limitu posloupnosti

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n!}},$$

což je v porovnání s podílovým tvarem mnohem složitější.

Zde je na místě jedno varování. Tvrzení 4.1 má předpoklad existence limity z podílu koeficientů. Když tato limita neexistuje, musíme použít univerzálně platný odmocninový vzorec (4.6). Nepomohlo by nám ani změnit v (4.16) limitu na limes superior. Uvažujme např. řadu s koeficienty

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ sudé}, \\ 2 & n \text{ liché}. \end{cases}$$

Pak

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2.$$

Poloměr konvergence řady s těmito koeficienty je však

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \quad \text{tj.} \quad R = 1.$$

Každá mocninná řada definuje na kruhu konvergence jistou komplexní funkci. Bude nás teď zajímat, mají-li funkce dané mocninnou řadou nějaké speciální či překvapivé vlastnosti.

2 Derivace a jednoznačnost mocninných řad.

Nechť funkce f je dána mocninnou řadou

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{4.18}$$

První, na co se u komplexní funkce obvykle ptáme, je její holomorfnost. Tuto otázku řeší následující věta.

Věta 4.3. *Nechť f je dána mocninnou řadou (4.18) s poloměrem konvergence $R > 0$. Pak f je holomorfní na $U(z_0; R)$ a její derivace f' je dána řadou*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \tag{4.19}$$

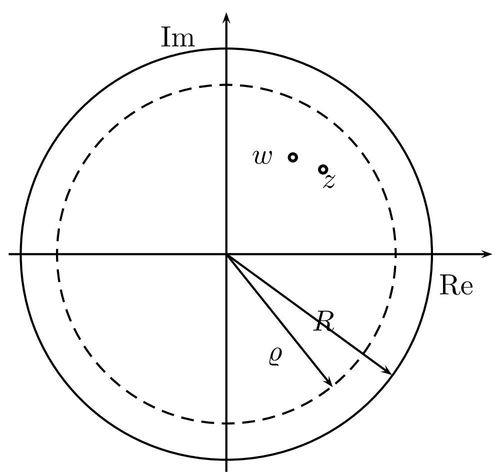
která má stejný poloměr konvergence R.

Důkaz. Snadná část důkazu je uvědomit si, že obě řady (4.18) a (4.19) mají stejný poloměr konvergence. Vyplývá to přímo z rovnosti (4.15), kde položíme $p = 1$.

Zbývá obtížná část důkazu, tj. ukázat, že funkce f má derivaci. Bez újmy na obecnosti můžeme položit $z_0 = 0$. Nechť $z \in U(0; R)$ je libovolný bod. Protože $|z| < R$, můžeme mezi ně vsunout pomocné číslo ϱ,

$$|z| < \varrho < R.$$

Takže bod z leží rovněž v otevřeném kruhu $U(0; \varrho)$. Nechť $w \in U(0; \varrho)$, $z \neq w$, viz obr. 4.1.



Obr. 4.1.

Budeme analyzovat rozdíl mezi diferenčním podílem funkce f

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

a hodnotou řady (4.19) v bodě z.

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n =$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big[\frac{w^n - z^n}{w - z} - n z^{n-1} \Big]. \tag{4.20}$$

Náš plán je dokázat, že tento výraz se při $w \to z$ blíží nule. Pro $n = 1$ je hranatá závorka v poslední sumě nulová. Stačí tedy uvažovat $n \geq 2$. Pro tato n užijeme vzorce

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + A\,B^{n-2} + B^{n-1})$$

a provedeme následující úpravu výrazu v hranaté závorce.

$$\begin{aligned}\frac{w^n - z^n}{w - z} - nz^{n-1} &= w^{n-1} + w^{n-2}z + \cdots + w\,z^{n-2} + z^{n-1} - nz^{n-1} = \\ &= w^{n-1} + w^{n-2}z + \cdots + w\,z^{n-2} - (n-1)z^{n-1}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Získali jsme polynom v proměnné w. Povšimněme si, že jeho hodnota pro $w = z$ je nulová. Znamená to, že lze z něj vytknout $(w - z)$. Vydělíme proto polynom v (4.21) rozdílem $(w - z)$ a dostaneme tvar

$$= (w - z)(w^{n-2} + 2zw^{n-3} + 3z^2w^{n-4} + \cdots + (n-1)z^{n-2}) = (w - z)\sum_{k=1}^{n-1} kz^{k-1}w^{n-k-1}.$$

Protože $|z| < \varrho$ a $|w| < \varrho$ můžeme odhadnout absolutní hodnotu posledního výrazu

$$\begin{aligned}\Big|(w - z)\sum_{k=1}^{n-1} kz^{k-1}w^{n-k-1}\Big| &\leq |w - z|\sum_{k=1}^{n-1} k|z|^{k-1}|w|^{n-k-1} \leq |w - z|\sum_{k=1}^{n-1} k\varrho^{n-2} = \\ &= |w - z|\varrho^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1} k \; = |w - z|\varrho^{n-2}\frac{n(n-1)}{2} \leq |w - z|\varrho^{n-2}n^2.\end{aligned}$$

Vraťme se zpět k (4.20). S použitím posledního odhadu máme

$$\Big|\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\Big| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\,|w - z|\,n^2\varrho^{n-2} = |w - z|\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|\varrho^{n-2}.$$

Mocninná řada s koeficienty $n^2 a_n$ má stejný poloměr konvergence R jako původní řada díky (4.15). Proto je v bodě ϱ absolutně konvergentní. Označme si hodnotu této sumy

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|\varrho^{n-2}.$$

Pak máme

$$\Big|\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^n\Big| \leq A|w - z|.$$

Aplikujeme-li limitu $w \to z$, dostaneme požadované tvrzení. □

Funkce daná mocninnou řadou je podle právě dokázané věty holomorfní. Speciálně, z Tvrzení 2.1 vyplývá, že je spojitá. Zajímavější jsou ale následující dvě pozorování. Věta 4.3 zcela otevřeně dovoluje derivovat řadu člen po členu. Zároveň, a to už poněkud skrytě, dovoluje tutéž řadu integrovat člen po členu.

Důsledek 4.1. *Nechť f je dána mocninnou řadou $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ na kruhu konvergence $U(z_0; R)$. Pak funkce*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} \tag{4.22}$$

je primitivní funkce k f na $U(z_0; R)$.

Důkaz. Řada (4.22) má podle (4.15) také poloměr konvergence R. Funkce $F(z)$ daná touto řadou je podle Věty 4.3 holomorfní a platí

$$F'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z).$$

□

Další důsledek se opírá o jednoduchou úvahu. Derivace f' funkce f dané mocninnou řadou je opět mocninná řada. Můžeme požít Větu 4.3 na funkci f' a dostaneme, že i f' je holomorfní. Její derivace f'' je opět mocninná řada vyhovující předpokladům věty. Tímto postupem získáme

Důsledek 4.2. *Funkce f daná mocninnou řadou*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

má derivace všech řádů na kruhu konvergence a platí

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k$$

pro všechna $k \geq 0$.

Důkaz. Jediné, co potřebuje nějakou argumentaci, je vzorec pro a_k. Zderivujeme-li k-krát funkci f, pak díky Větě 4.3 dostaneme

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Dosazení $z = z_0$ ihned dává

$$f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k.$$

□

Příklad 4.5. Mějme funkci
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$
Zjistíme poloměr konvergence. Zde je výhodné použít podílový tvar (4.16) vzorce z Tvrzení 4.1.
$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty.$$
Řada konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Její derivace je
$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m = f(z).$$
(V předposledním kroku jsme provedli substituci ve sčítacím indexu $m = n - 1$.) Podivná rovnost $f'(z) = f(z)$ napovídá, že $f(z) = e^z$. V Příkladu 4.7 se opravdu přesvědčíme, že výše uvedená řada je komplexní exponenciela.

Důsledek 4.2 v sobě skrývá ještě jednu podivnost týkající se mocninných řad. Představme si, že funkce f je daná mocninnou řadou a že na jistém malém okolí jejího středu z_0 je $f(z) = 0$. Pak také všechny derivace $f^{(k)}(z) = 0$ na tomtéž okolí, speciálně $f^{(k)}(z_0) = 0$ pro všechna $k \geq 0$. Z Důsledku 4.2 plyne, že všechny koeficienty a_k jsou nulové a tedy $f = 0$ na celém kruhu konvergence. Vidíme, že nulovost f na jakkoli malém okolí bodu z_0 vynutí nulovost f všude. To lze ekvivalentně formulovat i takto: Nechť jsou dvě funkce f a g dány mocninnou řadou o společném středu z_0. Platí-li na nějakém okolí bodu z_0, že $f = g$, pak $f = g$ na celém kruhu konvergence. (Stačí použít fakt o nulovosti pro rozdíl $f - g$.) V tomto smyslu lze říci, že mocninná řada je jednoznačně určena svými hodnotami na libovolně malém okolí středu z_0. K jednoznačnosti však stačí i menší množina než je okolí bodu z_0.

Věta 4.4. (O jednoznačnosti mocninné řady) *Nechť f je dána mocninnou řadou*
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
s kladným poloměrem konvergence R. Nechť existuje posloupnost $z_k \in U(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ taková, že $z_k \to z_0$ a $f(z_k) = 0$. Pak $f = 0$ na $U(z_0; R)$.

Důkaz. Důkaz povedeme matematickou indukcí a ukážeme, že všechna $a_n = 0$.

1. krok. Protože f je spojitá v z_0, platí
$$a_0 = f(z_0) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = 0.$$

2. krok. Nechť $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Ukážeme, že i $a_n = 0$. Z indukčního předpokladu plyne, že řada začíná až n-tou mocninnou
$$f(z) = a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \dots .$$

Zavedeme si pomocnou funkci

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} = a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \dots .$$

Funkce g je opět mocninná řada, a proto je spojitá v bodě z_0. Odtud

$$a_n = g(z_0) = \lim_{k\to\infty} g(z_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{(z_k - z_0)^n} = 0.$$

□

Obsah Věty 4.4 lze ekvivalentně přeformulovat pro dvojici funkcí: Nechť

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{a} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n.$$

Shodují-li se $f(z_k)$ a $g(z_k)$ pro nějakou posloupnost $z_k \to z_0$, $z_k \neq z_0$, pak $a_n = b_n$ pro všechna $n \geq 0$, tj. $f = g$ na kruhu konvergence.

3 Rozvoj holomorfní funkce v mocninnou řadu

Blížíme se k místu, kdy se naše postupně vyvozované znalosti o holomorfních funkcích jistým způsobem vrátí do počátečního bodu a kruh se uzavře. Začali jsme s definicí holomorfnosti. Odtud jsme odvodili Cauchyův integrální vzorec (Věta 3.3). Z této integrální reprezentace za okamžik získáme rozvoj v mocninnou řadu. Věta 4.3 pak zakončuje cestu tvrzením, že funkce daná mocninnou řadou je holomorfní.

Věta 4.5. *Nechť f je holomorfní na oblasti $D \subset \mathbb{C}$ a nechť $z_0 \in D$. Pak existují koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$, že*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

pro všechna z ležící v největším otevřeném kruhu se středem v z_0 a obsaženém v D.

Důkaz. Nechť R je poloměr maximálního otevřeného kruhu ležícího v D se středem v bodě z_0. Ukážeme, že f se nechá vyjádřit ve tvaru mocninné řady konvergující na $U(z_0; R)$.

Zvolme $z \in U(z_0; R)$, tj. $|z - z_0| < R$. Nechť ϱ je číslo splňující

$$|z - z_0| < \varrho < R.$$

Označíme symbolem $K(\varrho)$ kladně orientovanou kružnici o středu z_0 a poloměru ϱ

$$K(\varrho) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_0| = \varrho\}.$$

Podle Cauchyova integrálního vzorce (Věta 3.3) můžeme psát

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K(\varrho)} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w. \tag{4.23}$$

Zlomek $1/(w-z)$ vyjádříme jako mocninnou řadu v proměnné z se středem v z_0.

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0}}.$$

Protože $|z-z_0| < \varrho = |w-z_0|$, je

$$q = \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1. \tag{4.24}$$

Použijeme-li vzorec pro součet geometrické řady s kvocientem q, dostaneme

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Dosadíme do (4.23):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K(\varrho)} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w. \tag{4.25}$$

Nyní bychom potřebovali prohodit pořadí integrálu a nekonečné sumy. Nekonečná suma je limitou částečných součtů. Označme si je

$$S_m(w) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Podobně si celou sumu označíme

$$S(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Abychom mohli použít Tvrzení 3.3 o záměně integrálu a limity, musíme ověřit, že funkce $S_m(w)$ konvergují stejnoměrně k funkci $S(w)$ na kružnici $K(\varrho)$. Jinými slovy, musíme dokázat, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \tag{4.26}$$

je v proměnné w stejnoměrně konvergentní na množině $K(\varrho)$. K tomu užijeme Weierstrassova kritéria. S využitím označení z (4.24) můžeme psát

$$c_n = \sup_{w \in K(\varrho)} \left|\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| = \sup_{w \in K(\varrho)} \frac{1}{|w-z_0|} \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|^n = \frac{1}{\varrho} q^n.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ je konvergentní, a tudíž z Weierstrassova kritéria plyne, že řada (4.26) konverguje stejnoměrně. Předpoklad (3.4) Tvrzení 3.3 je splněn, a tak můžeme pokračovat v (4.25) následovně

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{K(\varrho)} f(w)\, S(w)\, \mathrm{d}w = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{K(\varrho)} f(w)\, S_m(w)\, \mathrm{d}w = \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{K(\varrho)} \sum_{n=0}^{m} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \, \mathrm{d}w = \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{K(\varrho)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right) (z-z_0)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{K(\varrho)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right) (z-z_0)^n .
\end{aligned}
$$

Je vhodné si uvědomit, že Tvrzení 3.3 o záměně integrálu a limity jsme použili hned v prvním řádku předešlého výpočtu. Označíme-li si

$$
a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{K(\varrho)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w, \tag{4.27}
$$

máme výsledný tvar

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n .
$$

Protože z bylo libovolné číslo z množiny $U(z_0; R)$, řada konverguje na $U(z_0; R)$.

Poslední věc, kterou si musíme ujasnit, se týká vztahu (4.27). Koeficient a_n je křivkový integrál přes kružnici $K(\varrho)$, závisí tedy obecně na volbě poloměru ϱ. Ukážeme ale, že tato závislost je jen zdánlivá. Ve skutečnosti hodnota integrálu (4.27) je pro všechna $\varrho \in (0, R)$ stejná. Nechť $0 < \varrho < \tau < R$ jsou dva zvolené poloměry. Pro z ležící v menším z obou kruhů samozřejmě platí, že zároveň

$$
|z - z_0| < \varrho \quad \text{a} \quad |z - z_0| < \tau .
$$

Podle výše provedeného důkazu můžeme tak funkci f vyjádřit ve tvaru mocninné řady

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{a} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n ,
$$

kde koeficienty a_n byly vypočteny podle vzorce (4.27) s užitím poloměru ϱ a koeficienty b_n podle téhož vzorce avšak pro poloměr τ. Protože obě řady reprezentují tutéž funkci $f(z)$, musí se shodovat na kruhu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varrho\}$. Podle věty o jednoznačnosti mocninné řady (Věta 4.4) musí mít identické koeficienty

$$
a_n = b_n \qquad \text{pro všechna } n \geq 0 .
$$

Odtud plyne, že integrál v (4.27) má pro všechna $\varrho \in (0, R)$ stejnou hodnotu. $\square$

Obsah Věty 4.5 lze stručně vyjádřit formulací, že každá holomorfní funkce je *lokálně* reprezentovatelná mocninnou řadou. Slovo lokálně znamená přesně to, co je uvedeno ve Větě 4.5: Kolem každého bodu z_0 existuje okolí, na němž je funkce f dána jako součet mocninné řady. Máme-li holomorfní funkci f již vyjádřenu ve tvaru řady, víme z Důsledku 4.2, že příslušné koeficienty splňují

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Porovnáme-li to s (4.27), dostaneme tzv. *zobecněný Cauchyův integrální vzorec*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}, \tag{4.28}$$

kde C je jednoduchá kladně orientovaná uzavřená křivka mající z_0 ve svém vnitřku. Pro případ $n = 0$ vychází původní Cauchyův integrální vzorec (3.9). Podobně jako jsme využívali Cauchyův integrální vzorec pro výpočet jistých integrálů podél jednoduché uzavřené křivky, je možné použít (4.28). Dokonce i v těch případech, kdy integrální vzorec (3.9) aplikovat nešlo.

Příklad 4.6. Zjistěte hodnotu integrálu

$$\int\limits_C \frac{ze^z}{(a-z)^3},$$

je-li C jednoduchá kladně orientovaná uzavřená křivka a bod a leží uvnitř C.

Integrál si napíšeme ve tvaru

$$-\int\limits_C \frac{ze^z}{(z-a)^3}.$$

Porovnáním s (4.28) vidíme, že $z_0 = a$, $f(z) = ze^z$ a $n = 2$. Proto máme ihned

$$\int\limits_C \frac{ze^z}{(a-z)^3} = -\frac{2\pi \mathrm{i}}{2!}\left(ze^z\right)'' \Big|_{z=a} = -\pi \mathrm{i} e^a(a+2).$$

Můžeme si uvědomit, že pomocí původního integrálního vzorce (3.9) bychom tento integrál počítat nemohli.

Kombinací Věty 4.5 o lokálním rozvoji holomorfní funkce v řadu a Důsledku 4.2 získáme překvapivou informaci. Má-li funkce první derivaci, pak automaticky má i všechny vyšší derivace. Přesně:

Důsledek 4.3. *Holomorfní funkce má derivace všech řádů.*

Důkaz. Nechť z je libovolný prvek ležící v oblasti D, na které je funkce f holomorfní. Podle Věty 4.5 můžeme na jistém okolí bodu z psát

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z)^n.$$

Z Důsledku 4.2 ovšem plyne, že f má v bodě z derivace všech řádů. □

Možnost lokálního rozvoje holomorfní funkce v mocninnou řadu spolu s Větou 4.4 o jednoznačnosti naznačuje, že nějaký typ jednoznačnosti musí platit i pro holomorfní funkce. Jediné místo, které si v této úvaze vyžaduje dodatečnou argumentaci je, jak z lokální informace o chování funkce f získat informaci o celkovém (globálním) chování.

Důsledek 4.4. (Věta o jednoznačnosti holomorfní funkce) *Nechť f je holomorfní funkce na oblasti $D \subset \mathbb{C}$. Předpokládejme, že $f(z_k) = 0$ v bodech prosté posloupnosti (z_k) prvků z D konvergující k bodu $z_0 \in D$. Pak $f = 0$ na D.*

Ekvivalentně, platí-li $f(z_k) = g(z_k)$ pro dvě funkce holomorfní na D, pak $f = g$ na D.

Důkaz. Protože f je holomorfní, existuje okolí $U(z_0; R)$ bodu z_0 takové, že

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0; R).$$

Podle Věty 4.5 o jednoznačnosti mocninné řady je $f(z) = 0$ na $U(z_0; R)$. Zbytek důkazu bude spočívat v „rozšiřování“ množiny, kde f je nulová, na celé D.

Oblast D si rozložíme na dvě části

$$G = \{w \in D \mid \text{existuje prostá posloupnost } w_k \in D,\ w_k \to w \text{ a } f(w_k) = 0\},$$

$$H = D \setminus G.$$

Zřejmě G a H tvoří disjunktní rozklad oblasti D

$$D = G \cup H, \quad G \cap H = \emptyset. \tag{4.29}$$

Množina G je otevřená díky jednoznačnosti mocninné řady: Nechť $w \in G$. Funkci f můžeme na jistém okolí $U(w; r) \subset G$ napsat ve tvaru mocninné řady o středu w

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n.$$

Protože $w \in G$, existuje posloupnost $w_k \to w$ taková, že $f(w_k) = 0$. Podle Věty 4.4 je $f(z) = 0$ na celém $U(w; r)$. Odtud ihned vyplývá, že všechny body $z \in U(w; r)$ mají vlastnost požadovanou v definici množiny G. Proto $U(w; r) \subset G$ a G je otevřená.

Rovněž množina H je otevřená: Nechť $w \in H$. To ovšem znamená, že k bodu w se nelze přiblížit posloupností bodů $w_k \in D$, ve kterých je funkce f nulová. Existuje tak okolí $U(w; r)$ bodu w, že $f(z) \neq 0$ pro všechna

$$z \in U(w; r) \setminus \{w\}.$$

V tom případě se k žádnému prvku z $U(w; r)$ nelze přiblížit posloupností bodů, ve kterých je funkce nulová. Jinými slovy $U(w; r) \subset H$ a H je otevřená.

Oblast D je souvislá množina. Podle definice souvislosti (Definice 1.5) ji nelze napsat jako disjunktní sjednocení dvou otevřených množin G a H z nichž obě splňují

$$D \cap G \neq \emptyset \quad \text{a} \quad D \cap H \neq \emptyset.$$

Protože $z_0 \in D \cap G$, a tedy $D \cap G \neq \emptyset$, musí být

$$D \cap H = \emptyset.$$

Podle (4.29) je pak nutně $D = G$. Proto každý bod $w \in D$ je limitou jisté prosté posloupnosti w_k, pro kterou $f(w_k) = 0$. Ze spojitosti funkce f dostáváme, že i $f(w) = 0$. Tím je dokázáno, že $f = 0$ na celém D. □

Věta o jednoznačnosti holomorfní funkce se s výhodou používá k důkazu platnosti identit, které jsou známy v reálném oboru. Např. známe vzorec

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkce $f(z) = \cos 2z$ a $g(z) = \cos^2 z - \sin^2 z$ jsou holomorfní na $\mathbb{C}$. K tomu, aby byly totožné stačí, když se budou shodovat na nějaké konvergentní posloupnosti $z_k \to z_0$. Za takovou posloupnost si vezmeme *jakoukoli* konvergentní posloupnost reálných čísel $x_k \to x_0$. Pro $x_k \in \mathbb{R}$ rovnost platí, proto platí pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

Věta 4.5 zaručuje existenci rozvoje holomorfní funkce v libovolném bodě. Podívejme se, jak je možné nalézt takové rozvoje v konkrétních případech.

Příklad 4.7. (i) Jaký je rozvoj funkce $f(z) = e^z$ v mocninnou řadu o středu z_0?

Podle Důsledku 4.2 je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \tag{4.30}$$

Snadno zjistíme, že $f^{(n)}(z_0) = e^{z_0}$ pro všechna $n \geq 0$. Hledaná mocninná řada je

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!} (z - z_0)^n.$$

Speciálně, rozvoj v bodě $z_0 = 0$ dává tvar

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Poloměr konvergence je $R = \infty$, jak jsme už zjistili v Příkladu 4.5.

(ii) Mějme funkci

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z}. \tag{4.31}$$

Nalezneme její rozvoj v bodech $z_1 = -1 + \mathrm{i}$ a $z_2 = 1 + \mathrm{i}$.

V principu je vždy možné uvažovat tvar (4.30) a pokusit se zjistit, jak obecně vypadá n-tá derivace $f^{(n)}(z_0)$. To má naději pouze u velmi speciálních funkcí. Zadaná funkce f mezi ně nepatří. Alespoň ne ve tvaru (4.31). Nejprve ji rozložíme na parciální zlomky.

$$\frac{1}{z^2 - z} = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}.$$

Obě části bychom už dovedli rozvinout pomocí vzorce (4.30). Ukážeme si však jinou metodu založenou na součtu geometrické řady. Začneme upravovat první část rozdílu.

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{1-z_1-(z-z_1)} = -\frac{1}{1-z_1} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-z_1}{1-z_1}}.$$

Je-li

$$\left|\frac{z-z_1}{1-z_1}\right| < 1, \quad \text{tj.} \quad |z-z_1| < |1-z_1|, \tag{4.32}$$

můžeme pokračovat

$$= -\frac{1}{1-z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_1)^n}{(1-z_1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(1-z_1)^{n+1}} (z-z_1)^n.$$

Dosazením konkrétní hodnoty $z_1 = -1 + \mathrm{i}$ dostaneme

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(2-\mathrm{i})^{n+1}} (z+1-\mathrm{i})^n.$$

Druhý člen upravíme podobně.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= -\frac{1}{z_1-(z-z_1)} = -\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-z_1}{z_1}} = \\ &= -\frac{1}{z_1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_1)^n}{z_1^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z_1^{n+1}} (z-z_1)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(-1+\mathrm{i})^{n+1}} (z+1-\mathrm{i})^n.\end{aligned}$$

Tato úprava je oprávněná pouze pro

$$\left|\frac{z-z_1}{z_1}\right| < 1, \quad \text{tj.} \quad |z-z_1| < |z_1|. \tag{4.33}$$

Spojením obou řad máme

$$\frac{1}{z^2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\frac{-1}{(2-\mathrm{i})^{n+1}} + \frac{1}{(-1+\mathrm{i})^{n+1}}\Big] (z+1-\mathrm{i})^n.$$

Právě předvedený postup má jednu výhodu. Chceme-li zjistit poloměr konvergence takové řady, nemusíme už nic dalšího počítat. Použití vzorce pro součet geometrické řady vyžadovalo splnění podmínek (4.32) a (4.33):

$$|z-z_1| < |1-z_1| = |2-\mathrm{i}| = \sqrt{5}, \quad \text{a} \quad |z-z_1| < |z_1| = |-1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}.$$

Protože obě musí platit současně, vidíme, že $R = \min\{\sqrt{5}, \sqrt{2}\} = \sqrt{2}$.

Případ rozvoje o středu z_2 je zcela stejný. Proto ho projdeme krátce.

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(1-z_2)^{n+1}}(z-z_2)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^{n+1}(z-1-\mathrm{i})^n$$

za předpokladu, že $|z-z_2| < |1-z_2| = 1$. Rovněž

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z_2^{n+1}}(z-z_2)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\mathrm{i})^{n+1}}(z-1-\mathrm{i})^n$$

za předpokladu, že $|z-z_2| < |z_2| = \sqrt{2}$. Dohromady tak máme

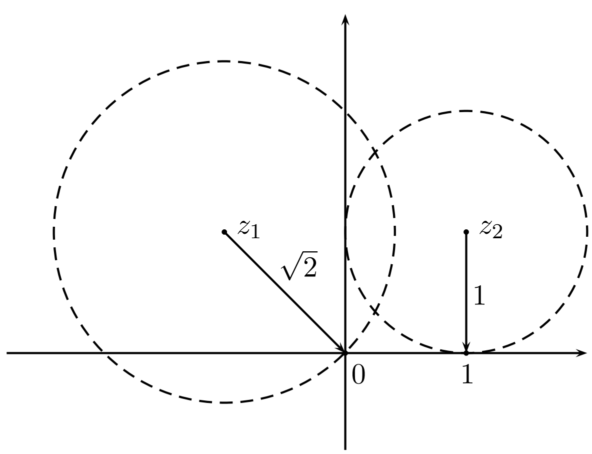
$$\frac{1}{z^2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\mathrm{i}^{n+1} + \frac{1}{(1+\mathrm{i})^{n+1}}\right](z-1-\mathrm{i})^n$$

a poloměr konvergence je $R = 1$.

Na závěr si ukážeme, že poloměr konvergence výsledné řady jsme mohli určit ještě dříve, než jsme vůbec začali počítat. Věta 4.5 říká, že příslušný rozvoj v mocninnou řadu platí v největším kruhu obsaženém v oblasti D, na které je f holomorfní. V našem případě je

$$D = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Proto maximální kruh v D se středem v $z_1 = -1 + \mathrm{i}$ má poloměr $\sqrt{2}$ a kruh o středu $z_2 = 1 + \mathrm{i}$ má poloměr 1, viz obr. 4.2.



Obr. 4.2.

Jak už jsme se zmínili na začátku této části, uzavírá se zde pomyslný kruh tvořený různými vlastnostmi holomorfní funkce. Přesná formulace je následující.

Věta 4.6. *Nechť $D \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a nechť f je komplexní funkce spojitá na D. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *f je holomorfní na D;*

(ii) *platí Cauchyův integrální vzorec (3.9);*

(iii) *$\int_C f = 0$ pro každou uzavřenou jednoduchou křivku $C \subset D$;*

(iv) *f je lokálně reprezentovatelná mocninnou řadou.*

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Tato implikace je obsahem Věty 3.3.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Důkaz byl proveden v Poznámce 3.3.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Podle Věty 3.2 má funkce f primitivní funkci F. Funkce F je zřejmě holomorfní. Z Důsledku 4.3 vyplývá, že F má derivace všech řádů. Speciálně existuje $F'' = f'$. Proto f je rovněž holomorfní.

V tuto chvíli už víme, že podmínky (i), (ii) a (iii) jsou ekvivalentní. Zbývá připojit poslední tvrzení.

(i) $\Rightarrow$ (iv). Tato implikace je Věta 4.5.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Důkaz této implikace představuje Věta 4.3 □

Poznámka 4.3. Implikace (iii) $\Rightarrow$ (i) se nazývá *Morerova věta.* Znovu zdůrazňuje podobnost holomorfní funkce s potenciálním vektorovým polem.

Informace obsažené ve Větě 4.6 můžeme mnoha způsoby zužitkovat. Ukážeme si na závěr jeden důležitý důsledek.

Věta 4.7. *Nechť f_n jsou funkce holomorfní na jednoduše souvislé oblasti D. Předpokládejme, že funkce f_n konvergují na D stejnoměrně k funkci f, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Pak i f je holomorfní na D.

Důkaz. Abychom ověřili, že limitní funkce f je holomorfní, použijeme ekvivalentní kritérium (iii) z Věty 4.6 a ověříme pouze, že integrál funkce f podél jednoduché uzavřené křivky je nulový. Nechť tedy C je jednoduchá uzavřená křivka ležící v D. Protože funkce f_n konvergují k funkci f stejnoměrně na D, a tedy i na C, můžeme využít Tvrzení 3.3:

$$\int_C f = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n = 0.$$

neboť integrály holomorfních funkcí f_n podél uzavřené křivky jsou nulové. □

Porovnáme-li toto tvrzení se situací reálných funkcí, zjistíme, že něco podobného nemá šanci platit. U reálných funkcí se může totiž stát, že posloupnost dokonce nekonečněkrát diferencovatelných funkcí konverguje stejnoměrně k funkci, která nemá derivaci v žádném bodě.

4 Cvičení.

Úloha: Určete kruh konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+\mathrm{i})^n,$$

kde (a_n) je jakákoli posloupnost sestávající se z čísel $-2, 1, 5$.

Řešení: Protože pro všechna uvažovaná čísla platí

$$\sqrt[n]{|-2|} \to 1, \quad \sqrt[n]{1} \to 1, \quad \text{a} \quad \sqrt[n]{5} \to 1,$$

je $R = 1$.

Úloha: Existuje funkce f holomorfní na okolí 0 taková, že

$$f\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right) = \frac{\mathrm{i}}{n}\left(1 + (-1)^n\right)$$

pro všechna dosti velká $n \in \mathbb{N}$?

Řešení: Pro n lichá je

$$f\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right) = 0.$$

Z věty o jednoznačnosti vyplývá, že $f = 0$ na okolí bodu 0. Pak ale nemůže platit pro sudá n, že

$$f\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right) = \frac{2\mathrm{i}}{n} \neq 0.$$

Taková holomorfní funkce neexistuje.

Úloha: Mějme mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

s poloměry konvergence R_1 a R_2. Co lze říci o poloměru konvergence R řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n?$$

Může nastat případ, že tato řada bude mít poloměr konvergence větší než obě původní?

Řešení: Zřejmě platí

$$|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| \le 2\max\{|a_n|, |b_n|\}.$$

Odtud

$$\sqrt[n]{|a_n + b_n|} \le \sqrt[n]{2}\, \max\{\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}\}.$$

Aplikací limes superior na obě strany dostaneme

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n + b_n|} \le \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \varlimsup_{n\to\infty} \max\{\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}\} =$$
$$= \max\{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}\} = \max\Big\{\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\Big\}.$$

Ekvivalentně zapsáno

$$R \ge \min\{R_1, R_2\}.$$

Vidíme, že obecně je poloměr R alespoň tak velký, jak velký byl menší z obou původních poloměrů. R se může skutečně zvětšit např. při $a_n = -b_n$.

Úloha: Rozviňte hlavní větev logaritmu $\ln_0 z$ v mocninnou řadu o zadaném středu $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z \mid \operatorname{Re} z \le 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$.

Řešení: Zde je vhodné použít vzorec (4.30), neboť snadno zjistíme hodnotu n-té derivace funkce $\ln_0 z$.

$$\big(\ln_0 z\big)^{(n)} = (-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)!}{z^n} \quad \text{pro } n \ge 1.$$

Proto

$$\ln_0 z = \ln_0 z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{z_0^n n!}\,(z - z_0)^n = \ln_0 z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z_0^n n}\,(z - z_0)^n.$$

Nejčastěji používaný rozvoj je se středem $z_0 = 1$:

$$\ln_0 z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, z^n.$$

1. Určete kruh konvergence následujících mocninných řad

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}\,(z-1)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, z^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z+2)^n$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5^n\, z^{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \big[3 + (-1)^n\big]^n (z-3)^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\,(3z+1)^n$ (ch) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos \mathrm{i} n\,(z+2\mathrm{i})^n$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n)\, z^n.$

2. Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ má poloměr konvergence $0 < R < \infty$. Určete poloměr konvergence řady

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) a_n z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 + z_0^n) a_n z^n.$

3. Nechť řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mají poloměry konvergence $R_1 > 0$ a $R_2 > 0$. Určete koeficienty c_n, aby platilo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right). \tag{4.34}$$

   Ukažte, že poloměr konvergence R řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ splňuje

$$R \geq \min\{R_1, R_2\}.$$

4. Přechodem k derivaci či primitivní funkci nalezněte součet řady pro $|z| < 1$

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^n \qquad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$

$$(e)\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 z^n.$$

5. Nalezněte – pokud existuje – funkci f holomorfní na okolí 0 takovou, že

   (a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$;

   (b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$, $n \geq 1$;

   (c) $f\left(\frac{1+\mathrm{i}}{n}\right) = \frac{n}{n+1+\mathrm{i}}$, $n \geq 1$;

   (d) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2}$, $n \geq 1$;

   (e) $\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$.

6. Nechť funkce f je holomorfní na $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (-\pi/4, \pi/4)\}$ a nechť

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in (0, \pi/4).$$

   Ukažte, že rovnice $f(z) = \mathrm{i}$ nemá řešení.

7. Rozviňte funkci f v mocninnou řadu se středem v z_0 a určete poloměr konvergence této řady.

   (a) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \frac{\pi}{4}$;

   (b) $f(z) = \sinh z$, $z_0 = 0$;

   (c) $f(z) = \cosh^2 z$, $z_0 = 0$;

   (d) $f(z) = z^2 + z$, $z_0 = -1$;

   (e) $f(z) = \ln_0 \frac{1+z}{1-z}$, $z_0 = 0$;

   (f) $f(z) = \ln_0(z^2 - 3z + 2)$, $z_0 = 0$;

(g) $f(z) = \dfrac{1}{az+b}$, $z_0 \neq -\frac{b}{a}$;

(h) $f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, $z_0 = 1$;

(ch) $f(z) = \dfrac{z}{z^2-2z+5}$, $z_0 = 1$;

(i) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$, $z_0 = 0$;

(j) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$, $z_0 = 1$.

8. Je pravda, že sudá funkce holomorfní na okolí 0 má v mocninném rozvoji o středu $z_0 = 0$ pouze členy se sudou mocninnou?

9. Ukažte, že funkce daná
$$f(z) = \int_0^1 \frac{\sin zt}{t}\,\mathrm{d}t$$
je holomorfní na $\mathbb{C}$

   (a) pomocí Věty 4.6;

   (b) nalezením rozvoje v mocninnou řadu.

10. Nalezněte rozvoj v mocninnou řadu o středu v $z_0 = 0$ funkce F primitivní k

    (a) e^{z^2},

    (b) $\dfrac{\sin z}{z}$,

    splňující podmínku $F(0) = 0$. Jaký je poloměr konvergence?

11. Jaký má rozvoj v mocninnou řadu o středu $z_0 = 0$ funkce $f(z) = \sqrt{1+z}$ při výběru

    (a) $\sqrt{1} = 1$,

    (b) $\sqrt{1} = -1$?

12. Nechť f je funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ s následující vlastností:

    (a) Pro každý bod $z_0 \in \mathbb{C}$ má mocninná řada funkce f o středu z_0 koeficient $a_{17} = 0$. Ukažte, že f je polynom.

    (b*) Nechť M_{17} je množina těch středů z_0, pro které má rozvoj funkce f v mocninnou řadu o středu z_0 koeficient $a_{17} = 0$. Ukažte, že pokud je M_{17} nekonečná v kruhu $K = \{z \mid |z| \leq 1\}$, je f polynom.

    (c*) Rozvoj funkce f v mocninnou řadu v každém z_0 má alespoň jeden koeficient nulový. Pak f je polynom.

13. Ukažte, že holomorfní funkce na oblasti D má tzv. *vlastnost průměru*:

    Nechť $z_0 \in D$. Pak

    $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\big(z_0 + re^{\mathrm{i}t}\big)\ \mathrm{d}t$$

    kdykoli uzavřený kruh o středu z_0 a poloměru r leží v D.

14. Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ na $U(z_0; R)$. Ukažte, že pro $0 < r < R$ platí

    $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big|f(z_0 + re^{\mathrm{i}t}\big|\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

15. S využitím cvičení 14 ukažte tzv. *Cauchyův odhad*: Nechť f je holomorfní na kruhu $U(z_0; r)$ a nechť $|f| \le M$. Pak

    $$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{m\,n!}{r^2}.$$

16. S využitím cvičení 14 ukažte, že každá harmonická funkce $u(x, y)$ na oblasti D má vlastnost průměru, tj. že platí:

    $$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{U(z_0;r)} u(x, y)$$

    pro každý kruh $U(z_0; r)$ jehož uzávěr leží v D, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$.

17. S pomocí cvičení 14 vymyslete jiný důkaz Liouvilleovy věty.

18. Nechť f je holomorfní na $U(0; 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, prostá a nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Ukažte, že obsah množiny $f\big(U(0; 1)\big)$ je roven

    $$\text{obsah}\, f\big(U(0; 1)\big) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2.$$

Výsledky.

1.(a) $U(1; 2)$, (b) $U(0; e)$, (c) $\{-2\}$, (d) $U(0; 1)$, (e) $U(0; 1)$, (f) $\mathbb{C}$, (g) $U(3; 1/4)$, (h) $U(-.\mathrm{i}/3; 1)$, (ch) $U(-2\mathrm{i}; 1/e)$, (i) $U(0; \min\{1, 1/|a|\})$; 2.(a) $R/2$, (b) ∞, (c) R^2, (d) $R{\cdot}\min\{1, 1/|z_0|\}$; 3. $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, pro $|z| < \min\{R_1, R_2\}$ obě řady vpravo ve (4.34) konvergují. Proto $R \ge \min\{R_1, R_2\}$; 4.(a) $-\ln_0(1 - z)$, (b) $-\frac{1}{(1+z)^2}$, (c) $\frac{1}{2}\ln_0 \frac{1+z}{1-z}$, (d) $\ln_0(1 + z)$, (e) $\frac{1+z}{(1-z)^3}$; 5. (a) $f(z) = z^2$, (b) neexistuje, (c) $f(z) = \frac{1}{1+z}$, (d) $f(z) = \frac{z}{1+2z}$,

(e) neexistuje; 6. $f(z)$ musí být jedině $\operatorname{tg} z$; 7. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-1)^{[n/2]}}{n!}\Big(z - \frac{\pi}{4}\Big)^n$, $R = \infty$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$, (c) $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$, $R = \infty$, (d) $-(z+1) + (z+1)^2$, $R = \infty$, (e) $\displaystyle 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$, (f) $\displaystyle\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{2^n n} z^n$, $R = 1$, (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{(az_0 + b)^{n+1}}(z - z_0)^n$, $R = |z_0 + b/a|$, (h) $\displaystyle\frac{1}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}(z-1)^n$, $R = 3$, (ch) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{4^{n+1}}\Big[(z-1)^{2n} + (z-1)^{2n+1}\Big]$, $R = 2$, (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} n\, z^{n+1}$, $R = 1$, využijte cvičení 4(b), (j) $\displaystyle\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(n-3)(z-1)^n$, $R = 2$; 8. Ano, ukažte, že derivace sudé funkce je lichá a liché funkce sudá; 9.(b) $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} z^{2n+1}$; 10. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\, n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$; 11.(a) $\displaystyle 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-3)!!}{2^n n!} z^n$, (b) $\displaystyle -1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-3)!!}{2^n n!} z^n$; 12. (a) $f^{(17)}(z) = 0$, (b) Existuje posloupnost $z_n \in K$, $z_n \to z \in K$, že $f^{(17)}(z_k) = 0$. (c) Existuje $k \geq 0$, že množina $\{z \mid f^{(k)}(z) = 0\}$ je nekonečná v jednotkovém kruhu K. Pak použijte (b); 13. Použijte Cauchyho integrální vzorec; 14. $f(z_0 + re^{\mathrm{i}t}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{nit}$. Vynásobte tuto rovnici rovnicí komplexně sdruženou a obě stranu integrujte od 0 do 2π; 15. Ze cvičení 14 plyne, že $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2$, tj. $|a_n| \leq M/(r^2)$. Důsledek 4.1 dává žádanou nerovnost; 16. Integrál přes kruh počítejte v polárních souřadnicích se středem v z_0; 17. Je-li $|f(z)| \leq M$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ pro jakkoli velké $r > 0$; 18. Jacobián zobrazení f je $|f'|^2$ a užijte větu o substituci ve dvojném integrálu.

Kapitola 5

Reprezentace holomorfní funkce Laurentovou řadou

1 Úvod

V předchozí kapitole jsme viděli, že každou holomorfní funkci je možné lokálně rozvést v mocninnou řadu. Tento rozvoj umožňuje efektivní popis holomorfní funkce i její numerický výpočet. Omezující je ovšem skutečnost, že mocninná řada konverguje vždy v kruhu. Z toho vyplývá, že na množinách, které nejsou kruhy, není možno holomorfní funkce globálně vyjádřit jako součet jediné mocninné řady. K důležitým příkladům takovýchto množin patří např. kruh s vyjmutým středem odpovídající situaci, kdy je funkce holomorfní na okolí daného bodu s výjimkou bodu samotného. Podívejme se na následující funkci

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Tato funkce je holomorfní v množině $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Standardní rozvoj funkce f v mocninnou řadu se středem v počátku je

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots, \qquad |z| < 1.$$

Geometrická řada na pravé straně konverguje právě když $|z| < 1$. Tím jsme získali rozvoj pouze v jednotkovém kruhu se středem v počátku. Funkce f je ovšem holomorfní i na vnějšku jednotkového kruhu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, tedy za hranicí konvergence dané mocninné řady. Zde již není možno vyjádřit f jako součet mocninné řady se středem v nule. Kdyby totiž taková řada existovala, musela by konvergovat i v $z = 1$. To je však nemožné, neboť f nemá vlastní limitu v bodě 1.

Na druhé straně, vzdáme-li se požadavku mít f pouze ve tvaru mocninné řady, je možno pro $|z| > 1$ psát

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{z}\frac{1}{\dfrac{1}{z} - 1} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \qquad |z| > 1. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že funkci f je možno vyjádřit pomocí řady, která obsahuje záporné mocniny z. Jakmile připustíme záporné mocniny dostáváme nový typ řady, který umožní rozvoje na takových oblastech „s dírami“ jako je například mezikruží.

2 Laurentovy řady

Definice 5.1. *Řada tvaru*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \cdots \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots, \tag{5.1}$$

se nazývá ***Laurentova řada*** *se středem v bodě z_0 a koeficienty a_n, $n \in \mathbb{Z}$. Řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

se nazývá ***regulární část*** *Laurentovy řady, řada*

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$$

se nazývá ***hlavní část*** *Laurentovy řady.*

Řada (5.1) konverguje v daném bodě $z \in \mathbb{C}$, konverguje-li současně v tomto bodě její hlavní i regulární část. Její součet je přitom definován jako součet regulární a hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Stejná terminologie se týká absolutní konvergence a konvergence stejnoměrné.

Obor konvergence Laurentovy řady je průnikem oborů konvergence její hlavní a regulární části, což dává i návod na jeho nalezení.

Příklad 5.1. Zjistíme obor konvergence Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}(z-1)^n.$$

Podíváme se nejdříve na regulární část

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(z-1)^n.$$

Jedná se o obyčejnou mocninnou řadu. Ze vztahu (4.6) ve Větě 4.2 je její poloměr konvergence

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{-n}}} = 2.$$

Na hranici $\partial U(1;2)$ kruhu konvergence regulární část nekonverguje v žádném bodě, neboť v těchto bodech je $2^{-n}|z-1|^n = 1$, tudíž členy řady nekonvergují k nule.

Nyní se podíváme na hlavní část. Nejprve provedeme záměnu sčítacího indexu $n = -m$:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-|n|}(z-1)^n = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{1}{(z-1)^m}.$$

Tuto řadu pomocí substituce $u = \dfrac{1}{1-z}$ převedeme na mocninnou řadu

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} u^m.$$

Její poloměr konvergence je 2. Hlavní část tedy konverguje absolutně pro

$$\left|\frac{1}{z-1}\right| < 2 \quad \text{tj.} \quad |z-1| > \frac{1}{2}.$$

Jde o vnějšek kruhu se středem v bodě $z = 1$ a poloměrem $\frac{1}{2}$. Stejně jako v předchozím případě můžeme ukázat, že na hranici tohoto kruhu řada nekonverguje v žádném bodě.

Závěrem tedy máme, že obor konvergence je mezikruží se středem v bodě 1, vnitřním poloměrem 1/2 a vnějším poloměrem 2, tj. množina

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{1}{2} < |z-1| < 2 \right\}.$$

Postup v předchozím příkladě je zcela obecný. Regulární část Laurentovy řady je mocninná řada s jistým poloměrem konvergence R. Z Kapitoly 4 víme, že tato řada konverguje absolutně v otevřeném kruhu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ a diverguje ve všech bodech množiny $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > R\}$. Hlavní část Laurentovy řady (5.1) není řada mocninná, lze ji nicméně na mocninnou řadu převést pomocí substituce

$$u = \frac{1}{z - z_0}.$$

Dostaneme tak řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} u^n.$$

Nechť K je poloměr konvergence této mocninné řady a položíme

$$r = \frac{1}{K}.$$

(Opět pokládáme $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.) Pak hlavní část konverguje absolutně pro všechna z splňující nerovnost

$$\left|\frac{1}{z - z_0}\right| < K \quad \text{tj.} \quad |z - z_0| > r.$$

V bodech množiny $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ hlavní část diverguje. Číslo r budeme nazývat poloměr konvergence hlavní části Laurentovy řady. Celkově tedy máme, že Laurentova řada (5.1) konverguje absolutně v každém bodě množiny

$$\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

a nekonverguje v žádném bodě množiny

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z - z_0 < r\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > R\}.$$

Kvůli pohodlí si pro množiny vznikající jako obory absolutní konvergence Laurentových řad zavedeme značení

$$P(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\},$$

kde $0 \leq r, R \leq \infty$. V závislosti na možných hodnotách r a R je množina $P(z_0; r, R)$ buď mezikruží se středem v bodě z_0 a poloměry r a R $(0 < r < R)$ nebo kruh bez svého středu $(r = 0 < R)$ nebo vnějšek kruhu $(r > 0, R = \infty)$ nebo $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ $(r = 0, R = \infty)$ nebo prázdná množina $(r \geq R)$. Závěr této úvahy shrneme ve větě o konvergenci Laurentových řad, která je zobecněním Věty 4.2.

Věta 5.1. *Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ je Laurentova řada. Je-li R poloměr konvergence regulární části a r poloměr konvergence hlavní části, pak Laurentova řada konveguje absolutně na množine $P(z_0; r, R)$ a stejnoměrně na každém mezikruží $P(z_0; \varrho_1, \varrho_2)$, kde $0 < r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$, viz obr. 5.1. Je-li $r \neq R$, pak Laurentova řada diverguje v každém bodě mimo uzávěr množiny $P(z_0; r, R)$.*

Poznámka 5.1. Obsahem Věty 5.1 je skutečnost, že množina $P(z_0; r, R)$ je maximální otevřenou množinou, na které konverguje Laurentova řada absolutně. Budeme ji nazývat *mezikruží konvergence* Laurentovy řady. Vyšetřování řady na hranici této množiny je obecně komplikované. Pro naše účely však postačí stanovit parametry r a R.

Ve druhé části Věty 5.1 je předpoklad $r \neq R$ důležitý. Je-li totiž $r = R$, pak sice $P(z_0; r, R) = \emptyset$, nicméně se může stát, že na kružnici $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r = R\}$ Laurentova řada v nějakém bodě konverguje. (Viz cvičení 1.(c).)

Důkaz. Jediné, co ještě vyžaduje argument, je stejnoměrná konvergence Laurentovy řady. Znamená stejnoměrnou konvergenci hlavní i regulární části. Víme již, že regulární část konverguje stejnoměrně na každém kruhu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varrho_2\}$, kde $\varrho_2 < R$.

Podívejme se tedy na hlavní část

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}. \tag{5.2}$$

Pro $|z - z_0| > \varrho_1 > r$ platí odhad

$$\left| \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \right| < \frac{|a_{-n}|}{\varrho_1^n}. \tag{5.3}$$

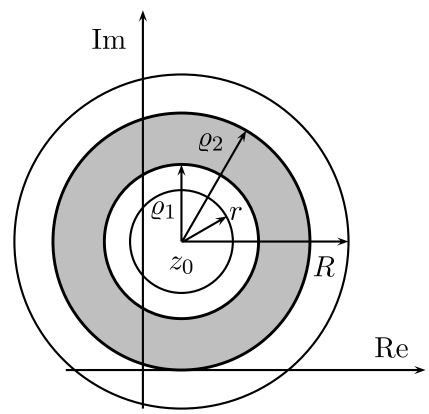
Podle Weierstrassova kritéria (Věta 4.1) bude hlavní část konvergovat stejnoměrně, jestliže zaručíme, aby

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{-n}|}{\varrho_1^n} < \infty.$$

Nechť z leží na kružnici $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \varrho_1\}$. Tato kružnice je částí oblasti absolutní konvergence řady (5.2). Proto řada (5.2) konveguje absolutně i pro naše zvolené z, což přesně znamená, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{-n}|}{\varrho_1^n} < \infty.$$

Tím je důkaz ukončen. □



Obr. 5.1.

Laurentova řada je řadou funkcí, její součet je tedy komplexní funkce. Věta 5.1 říká, že tuto funkci je možno na určitých mezikružích stejnoměrně aproximovat polynomy v proměnných $z - z_0$ a $\frac{1}{z-z_0}$. Tyto polynomy jsou na uvažovaných mezikružích holomorfní funkce. Protože podle Věty 4.7 je stejnoměrná limita holomorfních funkcí opět funkce holomorfní, je součet Laurentovy řady holomorfní funkce na mezikruží konvergence $P(z_0; r, R)$, $(r < R)$. Důležitá je i opačná otázka. Je možno každou funkci holomorfní na daném mezikruží o středu z_0 vyjádřit jako součet Laurentovy řady o témž středu? Prozradíme, že odpověď je kladná. K jejímu odvození však budeme potřebovat následující modifikaci Cauchyova integrálního vzorce pro mezikruží.

Věta 5.2. (Cauchyův integrální vzorec pro mezikruží) *Nechť f je funkce holomorfní na otevřené množině obsahující mezikruží*

$$P(z_0; r, R), \text{ kde } 0 < r < R < \infty.$$

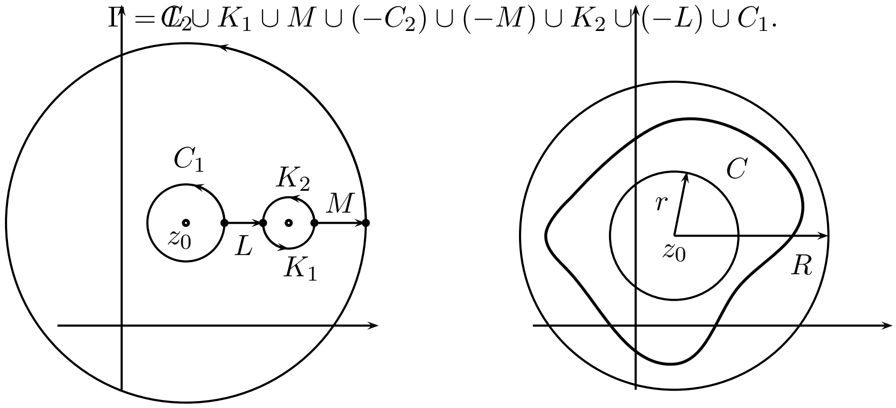
Pak pro všechna $z \in P(z_0; r, R)$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \right), \tag{5.4}$$

kde C_1 a C_2 jsou kladně orientované kružnice se středem v bodě z_0 a poloměry r a R.

Důkaz. Zvolme pevně bod $z \in P(z_0; r, R)$ a opišme kolem něho kladně orientovanou kružnici K ležící v mezikruží $P(z_0; r, R)$. Kružnice C_1, C_2 a K spojíme orientovanými úsečkami tak, jak je to naznačeno na obr. 5.2 a). Tím se kružnice K rozpadne na dva orientované oblouky K_1 a K_2. Definujme dále uzavřenou křivku Γ skládající se z oblouků kružnic C_1, C_2, K_1, K_2 a spojujících úseček L a M (viz schématické zobrazení na obr. 5.2 (a)):

$$\Gamma = L \cup K_1 \cup M \cup (-C_2) \cup (-M) \cup K_2 \cup (-L) \cup C_1.$$



(a) (b)

Obr. 5.2.

Funkce $\dfrac{f(w)}{w-z}$ (proměnné w) je holomorfní v mezikruží, ze kterého jsme odstranili kruh ohraničený kružnicí K. Podle Cauchyovy věty platí

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \\
&= \int_L \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \int_{K_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \int_M \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \\
&- \int_M \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \int_{K_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int_L \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \\
&= \int_K \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w. \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Uvážíme-li, že podle Cauchyova integrálního vzorce (3.9) je

$$\int_K \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi \mathrm{i} f(z),$$

je rovnost (5.5) už požadovanou identitou

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \left(\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \right).$$

□

Nyní se dostáváme k nejdůležitější větě teorie Laurentových řad.

Věta 5.3. *Nechť f je funkce holomorfní na mezikruží $P(z_0; r, R)$, kde $0 \le r < R \le \infty$. Pak existují koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, že*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pro všechna $z \in P(z_0; r, R)$. Přitom koeficienty této Laurentovy řady jsou určeny jednoznačně a platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{5.6}$$

kde C je libovolná kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka ležící v mezikruží $P(z_0; r, R)$ a mající bod z_0 ve své vnitřní oblasti (viz obr. 5.2(b)).

Důkaz. V první fázi ukážeme, že funkce f je součet nějaké Laurentovy řady. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $z_0 = 0$, neboť posunutím celé situace se vyšetřované vlastnosti nezmění. Zvolme si nyní kladně orientované kružnice $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \varrho_1\}$, $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \varrho_2\}$, pro poloměry $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ a bod $z \in P(0; \varrho_1, \varrho_2)$. Podle Cauchyova vzorce pro mezikruží je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int\limits_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w - \int\limits_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w \right). \tag{5.7}$$

Podívejme se teď na funkci (proměnné w) $\dfrac{f(w)}{w - z}$ na množině C_1. Pro každé $w \in C_1$ je $|w| = \varrho_1 < |z|$. To nás vede k myšlence rozvést výraz $\dfrac{f(w)}{w - z}$ v geometrickou řadu s kvocientem $\dfrac{w}{z}$. Máme

$$\begin{aligned} \frac{f(w)}{w - z} &= \frac{f(w)}{z(\frac{w}{z} - 1)} = -f(w) \frac{1}{z} \, \frac{1}{1 - \frac{w}{z}} = -f(w) \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^n} = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{w^n}{z^{n+1}}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Máme řadu vzniklou v rovnosti (5.8) integrovat podél křivky C_1. Za tím účelem bychom rádi prohodili pořadí integrálu a sumy. K tomu je ovšem zapotřebí ověřit stejnoměrnou konvergenci příslušné řady na C_1. Funkce $|f|$ má na množině C_1 maximum, řekněme M. Je tedy možno odhadnout

$$\left| f(w) \frac{w^n}{z^{n+1}} \right| \le M \frac{|w|^n}{|z|^{n+1}} = M \frac{\varrho_1^n}{|z|^{n+1}}, \qquad w \in C_1.$$

Protože $\dfrac{\varrho_1}{|z|} < 1$ má řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{w^n}{z^{n+1}}$ na C_1 konvergentní číselnou majorantu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{\varrho_1^n}{|z|^{n+1}}$

a podle Weierstrassova kritéria (Věta 4.1) je tedy stejnoměrně konvergentní na C_1. Integrací (5.8) přes křivku C_1 tak získáme

$$\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = -\int_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{w^n}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}w = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{C_1} f(w)w^n\,\mathrm{d}w\right)\frac{1}{z^{n+1}}. \tag{5.9}$$

Tento typ řady má tvar hlavní části nějaké Laurentovy řady. Jak to vypadá s integrálem podél křivky C_2? Pro $w \in C_2$ je

$$|w| = \varrho_2 > |z|.$$

Postup bude proto analogický jako výše, pouze s tím rozdílem, že výraz $\dfrac{f(w)}{w-z}$ napíšeme jako geometrickou řadu s kvocientem z/w:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w(1-\frac{z}{w})} = f(w)\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{z^n}{w^{n+1}}.$$

Zcela stejně se ověří, že při integraci podél C_2 můžeme zaměnit pořadí integrace a sumy, a tak nakonec dostaneme

$$\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{C_2}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\right)z^n. \tag{5.10}$$

Dosazením (5.9) a (5.10) do (5.7) máme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{C_1} f(w)w^n\,\mathrm{d}w\right)\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{C_2}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\right)z^n. \tag{5.11}$$

To dokazuje existenci rozvoje v nějakou Laurentovu řadu.

Zbývá odvodit integrální vyjádření koeficientů Laurentova rozvoje a tím i jeho jednoznačnost. Víme již, že existují koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

na $P(z_0; r, R)$. Zvolme křivku C s vlastnostmi uvedenými ve Větě 5.3. Pro všechna $w \in C$ platí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (w-z_0)^k = f(w)$$

a po vynásobení výrazem $\dfrac{1}{(w-z_0)^{n+1}}$ (pro pevně zvolené $n \in \mathbb{Z}$) máme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (w-z_0)^{k-n-1} = \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Díky stejnoměrné konvergenci Laurentovy řady můžeme integrovat řadu vlevo člen po členu a získat tak

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_C (w-z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}w = \int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \tag{5.12}$$

Klíčovým pozorováním je nyní skutečnost, že integrál $\int_C (w-z_0)^m$ je roven nule vyjma případu $m=-1$. Je-li $m \geq 0$, je integrovaná funkce holomorfní na celé komplexní rovině. Podle Cauchyovy věty je integrál nulový. Je-li $m<0$, užijeme zobecněný Cauchyův integrální vzorec (4.28) pro konstantní funkci $f(z)=1$. Dostaneme tak, že vyšetřovaný integrál je nenulový pouze pro $m=-1$ a jeho hodnota je $2\pi\mathrm{i}$. Řada na levé straně rovnosti (5.12) má tedy nejvýše jeden nenulový člen a to pro index $k=n$. Rovnice (5.12) se tak redukuje na vztah

$$2\pi\mathrm{i}\, a_n = \int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w,$$

což dává integrální vyjádření koeficientů a ukončuje důkaz. □

Poznámka 5.2. Laurentova řada ve Větě 5.3 se nazývá ***Laurentovou řadou funkce f*** v mezikruží $P(z_0; r, R)$.

Jednoznačnost koeficientů v Laurentově rozvoji implikuje, že funkci holomorfní v $P(z_0; r, R)$ je možno „zakódovat“ do posloupnosti koeficientů (a_n) jejího Laurentova rozvoje. To také znamená, že pro Laurentovy řady se stejným součtem jsou odpovídající koeficienty stejné. Přesněji, rovnost

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

na jistém otevřeném mezikruží implikuje $a_n = b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Tento princip budeme často využívat.

Příklad 5.2. Nalezneme Laurentovu řadu o středu $z_0 = 0$ funkce

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

v oblasti $P(0; 2, 3)$ a využijme ji k výpočtu integrálů

$$\int_C \frac{f(z)}{z^{10}}\,\mathrm{d}z \ \text{ a } \int_C f(z) z^{10}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice zadaná vztahem $|z| = 5/2$.

Funkce f je holomorfní ve všech bodech $\mathbb{C}$ kromě bodů 2 a 3. Je tedy holomorfní v mezikruží $P(0; 2, 3)$ a úloha má řešení. Při hledání Laurentova rozvoje racionální funkce se standardně využívá rozkladu na parciální zlomky. V našem případě je

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}.$$

U jednotlivých zlomků využijeme součtu geometrické řady. Dostaneme tak

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \qquad \text{pro } |z|<3,$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1}z^n \text{ pro } |z|>2.$$

Závěrem máme

$$f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \qquad \text{pro } 2<|z|<3.$$

Získaná Laurentova řada má tedy nenulovou hlavní i regulární část. U prvního z částečných zlomků $\frac{1}{z-3}, \frac{1}{z-2}$ jsme nalezli vyjádření pomocí mocninné řady a u druhého pomocí řady se zápornými mocninami. Tento výsledek je možno odhadnout předem. Funkce $\frac{1}{z-3}$ je totiž holomorfní v kruhu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|<3\}$ obsahujícím dané mezikruží. Její Laurentova řada bude proto pouze obyčejná mocninná řada. Naproti tomu funkce $\frac{1}{z-2}$ je holomorfní v množině $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|>2\}$, což je doplněk kruhu, a proto zde musíme hledat Laurentův rozvoj obsahující záporné mocniny.

Máme-li k dispozici Laurentovu řadu můžeme okamžitě nalézt oba zadané integrály, které souvisí s koeficienty Laurentova rozvoje. Z integrálního vyjádření

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

plyne pro $n=9$ a $n=-11$, že

$$\int_C \frac{f(z)}{z^{10}}\,\mathrm{d}z = a_9\cdot 2\pi\mathrm{i} = -2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{3^{10}}$$

$$\int_C f(z)z^{10}\,\mathrm{d}z = a_{-11}\cdot 2\pi\mathrm{i} = -2^{11}\pi\mathrm{i}.$$

V závěru této části se zmíníme o Laurentově řadě se středem $z=\infty$.

Definice 5.2. *Řada*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{z^n} = \cdots + a_{-2}z^2 + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots,$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, se nazývá ***Laurentovou řadou se středem v bodě*** ∞ *(nebo také s nevlastním středem) a koeficienty a_n. Část*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}, \quad \left(\textit{resp.} \quad \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{a_n}{z^n}\right)$$

se nazývá ***regulární část Laurentovy řady,*** *(resp.* ***hlavní část Laurentovy řady****).*

Řada s nevlastním středem je vlastně jenom jinak zorganizovanou Laurentovou řadou se středem v bodě 0. Na rozdíl od středu ve vlastním bodě obsahuje hlavní část nezáporné mocniny a regulární část mocniny záporné. Na první pohled to vypadá jako uměle zavedený pojem. Skutečně nepřináší žádnou novou informaci o Laurentově řadě, nicméně výhodnost této konvence se ukáže posléze.

Příklad 5.3. Nalezněme Laurentův rozvoj se středem v bodě ∞ funkce

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}.$$

Příklad vede na použití mocninného rozvoje exponenciální funkce v počátku.

$$\begin{aligned} z^2 e^{\frac{1}{z}} &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = z^2 + z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-2}} = \\ &= z^2 + z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{z^n}, \qquad |z| > 0. \end{aligned}$$

(V posledním kroku jsme provedli změnu sčítacího indexu $n \to n+2$.) Tedy

$$a_{-2} = a_{-1} = 1, \qquad a_n = \frac{1}{(n+2)!}, \qquad \text{pro } n \geq 0.$$

Daný Laurentův rozvoj má konečnou hlavní část $z^2 + z$ a nekonečnou regulární část

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^2} + \cdots$$

3 Cvičení

Úloha: Stanovte obor konvergence Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n.$$

Řešení: Všimneme si, že hlavní i regulární část jsou geometrické řady s kvocienty $\frac{1}{2z}$ a $3z$. Hlavní část tedy konverguje právě, když

$$\left| \frac{1}{2z} \right| < 1 \quad \text{tj.} \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

Pro absolutní konvergenci regulární části je nutná a postačující podmínka

$$|3z| < 1 \quad \text{tj.} \quad |z| < \frac{1}{3}.$$

Vidíme tedy, že obory konvergence se neprotnou a tedy obor konvergence zadané řady je prázdná množina.

Úloha: Stanovte obor konvergence Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}(z-1)^n.$$

Řešení: Podívejme se nejdříve na regulární část

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}(z-1)^n.$$

Použijeme odmocninového kritéria absolutní konvergence

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0, \text{ tj. } R = \infty.$$

Regulární část konverguje v celé komplexní rovině.

Konvergence hlavní části je ekvivalentní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} u^n, \quad \text{kde } u = \tfrac{1}{z-1}.$$

Opětovným použitím odmocninového kritéria dostáváme

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Hlavní část tedy konverguje pro všechna $u \in \mathbb{C}$, tj. pro všechna $z \neq 1$. Oborem konvergence zadané řady je celá komplexní rovina vyjma bodu 1, formálně $P(1; 0, \infty)$. Rozmyslete si, že komplexní rovina bez bodu je maximální množina konvergence Laurentovy řady s nenulovou hlavní částí!

Úloha: Vyšetřete konvergenci Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}(z-\mathrm{i})^n.$$

Řešení: Použitím podílového kritéria pro regulární část $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}(z-\mathrm{i})^n$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^{n+1}+1}}{\frac{1}{3^n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3^{-n}}{3+3^{-n}} = \frac{1}{3}.$$

Regulární část tedy konverguje absolutně pro $|z - \mathrm{i}| < 3$. Pro hlavní část přepsanou do tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n}+1} \frac{1}{(z-\mathrm{i})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n}+1} u^n, \qquad \text{kde } u = \tfrac{1}{z-\mathrm{i}},$$

je limita v podílovém kritériu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^{-n-1}+1}}{\frac{1}{3^{-n}+1}} = 1.$$

Tato část konverguje absolutně pro $|u| < 1$, tj. $|z - \mathrm{i}| > 1$. Obor konvergence zadané řady je mezikruží

$$P(\mathrm{i}; 1, 3) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - \mathrm{i}| < 3\}.$$

(Na hranici tohoto mezikruží řada nekonverguje neboť členy řady nekonvergují k nule.)

Úloha: Pro zadané poloměry $0 < r < R < \infty$ nalezněte Laurentovy řady, které konvergují právě v následujících množinách
(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$
(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$.

Řešení: Ve všech případech musíme volit nekonečnou řadu. Budeme ji však hledat jako co nejjednodušší, tedy jako řadu geometrickou.
(a) Podmínce vyhovíme mocninnou řadou

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n,$$

která konverguje právě když $|cz| = |c| \cdot |z| < 1$. Ekvivalentně, $|z| < \dfrac{1}{|c|}$. Volbou $c = \dfrac{1}{R}$ tak dostaneme řadu, jejíž obor konvergence je právě zadaná množina. To odpovídá řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} z^n.$$

(b) V tomto případě se pokusíme nalézt hlavní část Laurentovy řady ve tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c^n z^n,$$

tedy ve tvaru geometrické řady s kvocientem $\dfrac{1}{cz}$. Podmínka konvergence dá

$$\left|\frac{1}{cz}\right| < 1 \quad \text{tj.} \quad |z| > \frac{1}{|c|}.$$

Požadovaný obor konvergence tedy získáme například volbou $c = \dfrac{1}{r}$. Tím máme řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{r^n}.$$

(c) Na základě výsledků v předchozích částech je možno zvolit Laurentovu řadu

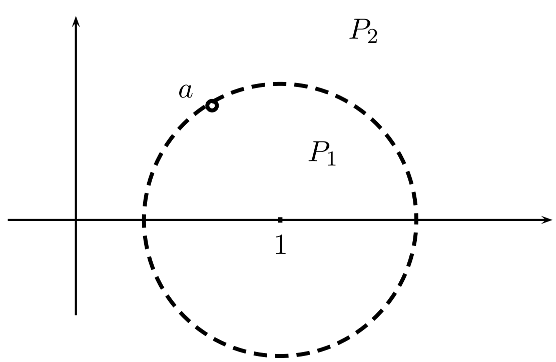
$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{r^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} z^n.$$

Úloha: Nalezněte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{1}{z-a}, \qquad a \neq 1$$

se středem v bodě 1 a to ve všech možných oblastech.

Řešení: Zadaná funkce je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. V úvahu tedy přicházejí dvě oblasti: kruh se středem v bodě 1 a poloměrem $|1-a|$ a vnějšek tohoto kruhu. Na obr. 5.3 jsou označeny jako P_1 a P_2.



Obr. 5.3.

Podívejme se na první případ. Funkci upravíme následujícím způsobem:

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-1+1-a} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{\frac{z-1}{1-a}+1}.$$

Pro $|z-1| < |1-a|$ je splněna podmínka

$$\left|\frac{z-1}{1-a}\right| < 1,$$

které využijeme k rozvoji v geometrickou řadu

$$\frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{\frac{z-1}{1-a}+1}=\frac{1}{1-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(a-1)^n}.$$

Máme tedy rozvoj

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(a-1)^{n+1}}.$$

Nyní se budeme zabývat případem $|z-1|>|1-a|$. V této oblasti platí

$$\left|\frac{1-a}{z-1}\right|<1,$$

proto využijeme následujících algebraických úprav a rozvoje v geometrickou řadu:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a}&=\frac{1}{z-1+1-a}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-a}{z-1}}\\&=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)^n}{(z-1)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)^n}{(z-1)^{n+1}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(a-1)^{-n-1}(z-1)^n.\end{aligned}$$

Na P_2 má funkce rozvoj

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(a-1)^{n+1}}(z-1)^n.$$

Úloha: Nalezněte Laurentův rozvoj o středu $z=1$ funkce

$$f(z)=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}$$

v oblasti $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-1|>\sqrt{2}\}$.

Řešení: Funkce f je holomorfní v zadané množině, která je vnějškem kruhu se středem v bodě 1 a poloměrem $\sqrt{2}$. Očekáváme proto rozvoj do záporných mocnin členu $z-1$. Bod i leží na hranici této oblasti. Nejdříve rozvineme pro $z\in\{z\in\mathbb{C}\mid |z-1|>\sqrt{2}\}$ funkci

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-\mathrm{i}}&=\frac{1}{z-1+1-\mathrm{i}}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-\mathrm{i}}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-\mathrm{i})^n}{(z-1)^n}=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-\mathrm{i})^n}{(z-1)^{n+1}},\quad |z-1|>\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vzniklou identitu budeme derivovat podle proměnné z. Vzhledem k tomu, že Laurentova řada konverguje stejnoměrně na každé omezené uzavřené množině obsažené v $P(1;\sqrt{2},\infty)$ můžeme Laurentův rozvoj derivovat člen po členu. Tím dostáváme

$$-\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\mathrm{i})^n(-n-1)\frac{1}{(z-1)^{n+2}}.$$

Závěrem,

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\mathrm{i})^n \frac{n+1}{(z-1)^{n+2}} =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^{n+1}(1-\mathrm{i})^{-n-2}(n+1)(z-1)^n.$$

Tento příklad ukazuje obecnou početní metodu rozvoje racionální funkce v Laurentovu řadu. Nejdříve danou racionální funkci rozložíme na parciální zlomky typu

$$\frac{A}{(z-a)^k}.$$

Poté rozvineme funkci

$$\frac{A}{z-a}$$

v geometrickou řadu a výsledek $k-1$ krát derivujeme. Kombinací rozvojů parciálních zlomků pak získáme konečný výsledek.

Úloha: Nalezněte první čtyři členy Laurentova rozvoje funkce

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$$

pro oblast $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

Řešení: Ze zadání plyne, že střed hledané řady je v $z_0 = 0$. Využijeme standardního rozvoje

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

a nalezneme též rozvoj funkce $\dfrac{1}{z(z^2+1)}$ v $P(0;0,1)$.

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-1} =$$
$$= \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \cdots .$$

Tedy

$$f(z) = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots\right)\cdot\left(\frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \cdots\right).$$

Laurentovy řady můžeme násobit stejně jako polynomy. V součinu na pravé straně předchozí rovnosti tedy dostáváme nejnižší mocninu z^{-1} a po vynásobení

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \cdots .$$

Úloha: Nalezněte několik prvních členů Laurentova rozvoje funkce $f(z) = \operatorname{cotg} z$ v prstencovém okolí bodu 0.

Řešení: Funkce $\operatorname{cotg} z$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ kromě bodů $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Maximální prstencové okolí nuly, ve kterém můžeme rozvinout $\operatorname{cotg} z$ v Laurentovu řadu je tedy $P(0; 0, \pi)$. Pro hledaný rozvoj použijeme algoritmu dělení nekonečných polynomů

$$\operatorname{cotg} z = (\cos z) : (\sin z) = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) : \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right).$$

Máme tak,

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \cdots\right) : \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \cdots\right) = z^{-1} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \cdots \\
&-\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \frac{z^6}{5040} + \cdots\right) \\
&\qquad -\frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{30} - \frac{z^6}{840} + \cdots \\
&\quad -\left(-\frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{18} - \frac{z^6}{360} + \cdots\right) \\
&\qquad\qquad -\frac{z^4}{45} + \frac{z^6}{630} - \cdots .
\end{aligned}$$

Dalším pokračování v dělení (například za pomoci počítače) máme

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \frac{z^7}{4725} - \frac{2z^9}{93555} - \cdots . \tag{5.13}$$

Úloha: Nalezněte rozvoje funkce $f(z) = z \sin \dfrac{1}{z}$ v Laurentovy řady se středy v bodech 0 a ∞. Stanovte v obou případech koeficienty a_{-2} a a_{10}.

Řešení: Pro střed v počátku máme

$$\begin{aligned}
z \sin \frac{1}{z} &= z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n}} \\
&= 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{(-2n+1)!} z^{2n}.
\end{aligned}$$

To dává $a_{-2} = -\frac{1}{6}$, $a_{10} = 0$. Pro střed v nekonečnu použijeme stejného rozvoje

$$z \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n}}.$$

Odtud $a_{-2} = 0, a_{10} = -\frac{1}{11!}$.

Úloha: Pomocí rozvoje v Laurentovu řadu nalezněte následující integrály

$$I_1 = \int_C \frac{2z+1}{(z^2+z-2)z^{100}}\,\mathrm{d}z$$
$$I_2 = \int_C \frac{(2z+1)z^{100}}{z^2+z-2}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka ležící v mezikruží $P(0;1,2)$ a obsahující bod 0 ve svém vnitřku.

Řešení: Z integrálního vztahu pro koeficienty Laurentova rozvoje plyne $I_1 = 2\pi\mathrm{i}a_{99}$, $I_2 = 2\pi\mathrm{i}a_{-101}$, kde a_{99} a a_{-101} jsou koeficienty v Laurentově rozvoji funkce

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

v mezikruží $1 < |z| < 2$. Rozkladem na částečné zlomky máme

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}.$$

Rozvojem v řady pak dostáváme

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}, \qquad |z| < 2.$$
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}, \qquad |z| > 1.$$

Tedy

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad 1 < |z| < 2,$$

což dává

$$I_1 = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{-1}{2^{100}} = -\frac{1}{2^{99}}\pi\mathrm{i}$$
$$I_2 = 2\pi\mathrm{i}a_{-101} = 2\pi\mathrm{i}.$$

Před poslední úlohou se zmíníme o souvislosti Laurentovy a Fourierovy řady. Nechť funkce $f(t)$ je tvaru

$$f(t) = R(\cos t, \sin t),$$

kde $R\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ je racionální funkce ve dvou proměnných, tj. podíl dvou polynomů dvou proměnných. Předpokládáme, že $f(t)$ je definována pro všechna $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Nalezneme metodu výpočtu Fourierovy řady funkce f pomocí Laurentova rozvoje vhodné komplexní funkce. Využijeme Eulerovu identitu $e^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, ze které plyne, že pro $z = e^{\mathrm{i}t}$ platí

$$\cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$
$$\sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2\mathrm{i}} = \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}.$$

Definujeme tedy komplexní funkci

$$\tilde{f}(z) = R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right).$$

Dostali jsme tím racionální funkci komplexní proměnné, pro kterou platí

$$\tilde{f}(e^{\mathrm{i}t}) = R(\cos t, \sin t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Jinými slovy, $\tilde{f}$ nabývá v odpovídajících bodech na jednotkové kružnici C hodnotu $f(t)$. Funkce $\tilde{f}$ proto musí být holomorfní v jistém mezikruží obsahujícím C. Rozviňme v tomto mezikruží funkci $\tilde{f}$ v Laurentovu řadu se středem v počátku:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Dosazením $z = e^{\mathrm{i}t}$ máme

$$R(\cos t, \sin t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\mathrm{i}nt}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Vidíme tedy, že koeficienty Laurentova rozvoje funkce $\tilde{f}$ jsou současně koeficienty komplexní Fourierovy řady funkce f. Tato metoda umožňuje často pohodlnější výpočet než je výpočet koeficientů a_n pomocí integrálního vzorce.

Úloha: Pomocí Laurentovy řady nalezněte Fourierovu řadu funkce

$$f(t) = \frac{1}{2+\cos t}.$$

Řešení: Funkce $f(t)$ vyhovuje předpokladům předešlé úlohy. Spočítáme si nejdříve

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2 + \frac{z^2+1}{2z}} = \frac{2z}{z^2+4z+1}.$$

Funkce $\tilde{f}(z)$ je racionální funkce definovaná všude kromě bodů $z_1 = -2+\sqrt{3}$ a $z_2 = -2-\sqrt{3}$. Budeme hledat Laurentův rozvoj funkce $\tilde{f}$ v mezikruží obsahující jednotkový kruh, tedy v oblasti dané nerovnicemi $|z_1| = 2-\sqrt{3} < |z| < |z_2| = 2+\sqrt{3}$. Rozklad ne částečné zlomky má tvar

$$\tilde{f}(z) = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2},$$

kde, po krátkém výpočtu

$$A = \frac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \qquad B = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Laurentovy rozvoje parciálních zlomků jsou

$$\frac{A}{z-z_1} = \frac{A}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{z_1}{z}} = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{z^{n+1}}, \qquad |z|>|z_1|$$

$$\frac{B}{z-z_2} = \frac{B}{z_2}\frac{1}{\frac{z}{z_2}-1} = -\frac{B}{z_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^n} = -B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^{n+1}}, \qquad |z|<|z_2|.$$

Platí tedy

$$f(z) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{z^{n+1}} - B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n, \qquad |z_1|<|z|<|z_2|,$$

kde

$$a_0 = -\frac{B}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

a pro $n\geq 1$

$$a_n = -\frac{B}{z_2^{n+1}} = -\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\;\frac{1}{(-2-\sqrt{3})^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\;\frac{1}{(-2-\sqrt{3})^n},$$

$$a_{-n} = Az_1^{n-1} = \frac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(-2+\sqrt{3})^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2+\sqrt{3})^n.$$

Všimněme si jedné důležité vlastnosti koeficientů

$$a_n = a_{-n} \qquad n = 1,2,\ldots$$

(Stačí rozšířit zlomek $\dfrac{1}{(-2-\sqrt{3})^n}$ výrazem $(-2+\sqrt{3})^n$!) Tento vztah je obecnou zákonitostí, která plyne ze skutečnosti, že pro koeficienty komplexního Fourierova rozvoje reální funkce platí $a_n = \overline{a}_{-n}$. Znamená to, že vždy postačí stanovit pouze regulární část daného rozvoje. Vrátíme se nyní k funkci $f(t)$.

$$f(t) = \tilde{f}(e^{\mathrm{i}t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{n\mathrm{i}t} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n(e^{n\mathrm{i}t}+e^{-n\mathrm{i}t}) =$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}2a_n\cos nt.$$

Po dosazení numerických hodnot

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}(-2+\sqrt{3})^n\cos nt.$$

1. Nalezněte obor konvergence následujících Laurentových řad

   (a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+e^{-n}} z^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} e^{|n|}(z-2\mathrm{i})^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

2. Nalezněte Laurentovu řadu která a) konverguje právě v mezikruží $P(0,1,2)$ b) konverguje právě v uzavřeném mezikruží $\overline{P(0,1,2)}$.

3. Nalezněte Laurentovy rozvoje zadaných funkcí v uvedených oblastech

   (a) $\displaystyle\frac{1}{z^2+2z-8}$ v $P(-2,2,4)$,

   (b) $\displaystyle\frac{3z}{(2z-1)(2-z)}$ v $P(0,0,\frac{1}{2})$

   (c) $\displaystyle\frac{3z}{(2z-1)(2-z)}$ v $P(0,\frac{1}{2},2)$

   (d) $\displaystyle\frac{3z}{(2z-1)(2-z)}$ v $P(0,2,\infty)$

   (e) $\displaystyle 3z\sin\frac{\pi z}{z+5}$ v maximálním mezikruží se středem $z_0=-5$

   (f) $\displaystyle\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ v $P(0,1,2)$

   (g) $\displaystyle\frac{1}{(z^2+1)^2}$ v $P(\mathrm{i},0,2)$

   (h) $\displaystyle\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ pro $1<|z|<2$

   (ch) $\displaystyle\sin\frac{z}{z-1}$, pro $|z-1|>1$.

   (i) $e^{\frac{z}{z+2}}$, $z_0=\infty$, pro $|z|>2$

   (j) $\displaystyle\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, pro $|z-2|>0$.

4. Rozhodněte zda lze dané funkce rozvést v Laurentovy řady se středem z_0 v mezikruží $P(z_0,0,\infty)$.

   (a) $\displaystyle\cos\frac{1}{z}$, $z_0=0$

   (b) $\displaystyle\cos\frac{1}{z}$, $z_0=\infty$

   (c) $\displaystyle\operatorname{tgh}\frac{1}{z}$, $z_0=\infty$

(d) $\mathrm{Ln}\, z,\ z_0 = \infty$

(e) $\mathrm{Ln}\, z,\ z_0 = 1.$

5. Rozviňte funkci $f(z) = \dfrac{z}{1+z^3}$ a) v mocninou řadu s nezápornými mocninami z, b) v Laurentovu řadu se zápornými mocninami z. Určete obory konvergence!

6. Rozviňte funkci $f(z) = \mathrm{Ln}\,\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ v Laurentovu řadu se středem v bodě ∞ v maximální možné oblasti!

7. Nalezněte první tři členy Laurentova rozvoje funkce $f(z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ se středem v bodě 0 a určete oblast konvergence této řady!

8. Ukažte, že funkce holomorfní v mezikruží $P(0,r,R)$, $r < R$, je součtem $f = f_1 + f_2$, kde f_1 je holomorfní pro $|z| < R$ a f_2 je holomorfní pro $|z| > r$!

9. Ukažte, že řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konverguje v jistém okolí nekonečna právě tehdy když existují konstanty $M \geq 0, c > 0$ tak, že
$$|a_n| \leq Mc^n \qquad \text{pro všechna } n \geq 0.$$

10. Nechť f je funkce holomorfní v mezikruží $P(0,r,R), r < R$, pro kterou platí
$$f(z) = f(-z) \text{ pro všechna } z \in P(0,r,R).$$
Charakterizujte funkci f pomocí koeficientů v jejím Laurentově rozvoji !

11. Předpokládejme, že funkce f je holomorfní v $P(0,r,R)$, $r < R$. Nechť
$$|f(z)| \leq M \qquad \text{pro všechna } z \in P(0,r,R).$$
Odvoďte následující odhad pro koeficienty (a_n) Laurentova rozvoje $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$:
$$|a_n| \leq \min\left(\frac{M}{r^n}, \frac{M}{R^n}\right) \text{ pro všechna } n \in \mathbb{Z}.$$

12. Pomocí rozvoje v Laurentovu řadu spočtěte následující integrály
$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n(1+z^2)}\,\mathrm{d}z, n \in \mathbb{Z}$, kde C je jednoduchá uzavření křivka ležící v oblasti
a) $|z| > 1$ b) $|z| < 1$, která má nulu ve své vnitřní oblasti.

13. Předpokládejme, že f je funkce holomorfní v oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ukažte, že platí-li $f(2z) = f(z)$ pro všechna $z \neq 0$ je f konstantní funkce.

14. Pomocí Laurentových rozvojů nalezněte Fourierovy řady následujících periodických funkcí

(a) $f(x) = \dfrac{2\sin x}{5 - 4\cos x}$

(b) $f(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{5 - 4\cos x}$

(c) $f(x) = \dfrac{q \sin x}{1 - 2q\cos x + q^2}$, $|q| < 1$

(d) $f(x) = \dfrac{1 - q^2}{1 - 2q\cos x + q^2}$, $|q| < 1$

(e) $f(x) = \dfrac{1 - q\cos x}{1 - 2q\cos x + q^2}$, $|q| < 1$

(f) $f(x) = \ln(1 - 2q\cos x + q^2)$, $|q| < 1$!

15. Besselovy funkce J_n , $n \in \mathbb{Z}$, jsou definovány jako koeficient $a_n(b)$ v Laurentově rozvoji funkce

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}b\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

se středem v bodě 0. Vyjádřete $J_n(b)$ pomocí nekonečné řady.

Výsledky.

1. a) $P(0, \dfrac{1}{e}, 1)$, b) $\emptyset$ c) konverguje pro $|z| = 1$.

2. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$

3. a) $\displaystyle\frac{1}{6}\left(\sum_{-\infty}^{-1} (-1)^n 2^{-1-n}(z+2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}}(z+2)^n\right)$

b)$\displaystyle-\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}} z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2^{|n|}} - 2^{|n|}\right) z^n$

e) $\displaystyle 3\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+5)^{2n}} - 15 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+5)^{2n+1}}, |z+5| \neq 0$

f) $\displaystyle 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$

g) $\displaystyle -\frac{1}{4(z-\mathrm{i})^2} - \frac{\mathrm{i}}{4(z-\mathrm{i})} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)\mathrm{i}^n (z-\mathrm{i})^n}{2^{n+4}}$

h) $\displaystyle \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}$

ch) $\displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(1 + n\frac{\pi}{2})}{n!(z-1)^n}$

i) $e\left(1-\frac{2}{z}+\frac{6}{z}+\cdots\right)$

j) $\cos 1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^k}{(2k)!(z-2)^{4k}}+\sin 1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!(z-2)^{4k+2}}$

4. a) ano, b) ano c) ne d) ne c) ne

5. a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n+1}, |z|<1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{3n+2}}, |z|>1$

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\mathrm{i}(-1)^{k-1}}{(2k-1)z^{2k-1}}, |z|>1$

7. $\frac{1}{z}+\pi^2 z+\frac{7\pi^4}{360}z^3+\cdots$, v $P(0,0,1)$.

9. Použijte odhad integrálu v integrálním vyjádření koeficientů Laurentovy řady !

10. $a_{2n+1}=0$ pro všechna $n\in\mathbb{C}$. Využijte jednoznačnost koeficientů Laurentovy řady!

11. Použijte integrálního vyjádření koeficientů !

12. a) $2\pi\mathrm{i}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ je-li n liché, 0 jinak

b) $2\pi\mathrm{i}(-1)^{\frac{n+1}{2}}$ je-li n liché, 0 jinak.

13. Využijte jednoznačnosti koeficientů v Laurentově rozvoji !

14. a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx$

d) $1+2\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos nx$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos nx$

f) $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos nx}{n}$

(Nejdříve spočtěte Laurentovu řadu derivace pomocné funkce!)

15. $J_n(b)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}\frac{1}{k!}(-1)^k\left(\frac{b}{2}\right)^{2k+n}$. (Využijte pravidla pro počítání součinu řad!)

Kapitola 6

Singularity holomorfních funkcí a reziduum

1 Úvod

V předchozí kapitole jsme viděli, že funkci holomorfní na mezikruží lze reprezentovat Laurentovou řadou. V této části se zaměříme na jeden důležitý speciální případ, kdy je zkoumaná funkce holomorfní v kruhu s vyjmutým středem. Uvidíme, že v této situaci je možno pomocí Laurentových rozvojů klasifikovat chování takovéto funkce v blízkosti bodů neholomorfnosti. Získáme tak důležité informace o funkcích holomorfních mimo jistou množinu izolovaných bodů, tzv. singularit.

2 Izolované singulární body a jejich klasifikace

Představme si situaci, kdy je funkce f holomorfní v jisté oblasti obsahující prstencové okolí $U(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ bodu z_0. Budeme předpokládat, že v bodě z_0 není f definována. Takovýto bod nazýváme *izolovanou singularitou.* V případě izolovaných singularit je důležité odhadnout charakter chování funkce v jejich blízkosti. Může nás například zajímat typ nespojitosti v singularitě, omezenost funkce v okolí singularity, apod. Stejně jako v reálném případě můžeme pro zkoumání těchto otázek použít limitu funkce f. To nás vede k následující klasifikaci singularit.

Definice 6.1. *Nechť f je holomorfní funkce v otevřené množině obsahující prstencové okolí $U(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, přičemž bod $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ není v definičním oboru funkce f. Bod z_0 se nazývá* ***izolovaným singulárním bodem funkce*** *f (krátce* ***singularitou****). Řekneme, že z_0 je*

(i) ***odstranitelá singularita funkce*** *f, existuje-li vlastní limita funkce f v bodě z_0,*

(ii) ***pól funkce*** *f, je-li $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$,*

(iii) ***podstatná singularita funkce*** *f, jestliže $\lim_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje.*

Poznámka 6.1. Podle konvence zavedené v první kapitole definujeme okolí nekonečna jako

$$U(\infty, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \operatorname{cotg} \varepsilon\}.$$

Funkce f má tedy singularitu v bodě ∞, je-li holomorfní na doplňku nějakého uzavřeného kruhu se středem v počátku.

Příklad 6.1. Funkce $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ má dvě singularity: 0 a ∞.

Nyní se budeme zabývat jednotlivými typy singularit podrobněji. Uvidíme přitom, že limita holomorfní funkce nám o jejím charakteru prozradí mnohem více, než v případě reálných funkcí.

Věta 6.1. *Nechť f je funkce holomorfní a omezená v prstencovém okolí $P(z_0;0,\varepsilon)$ své singularity $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pak z_0 je odstranitelná singularita funkce f. Navíc funkci f lze holomorfně rozšířit na celé $U(z_0;\varepsilon)$, tj. položíme-li*

$$\tilde{f}(z_0) = \begin{cases} f(z) & z \in P(z_0;0,\varepsilon) \\ \lim_{z\to z_0} f(z) & z = z_0 \end{cases} ,$$

pak funkce $\tilde{f}$ je holomorfní na okolí $U(z_0;\varepsilon)$.

Poznámka 6.2. Dříve než se pustíme do důkazu Věty 6.1, podíváme se na její význam. V této větě dostáváme z velmi slabých předpokladů silné důsledky. Především, pouhá omezenost holomorfní funkce si již automaticky vynutí existenci limity. Tento jev nemá analogii ve světě reálných funkcí. Například funkce $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$, $g(x) = \sin(1/x)$ jsou omezené, diferencovatelné všude kromě nuly, ale přesto nemají v nule limitu, funkce $g(x)$ nemá dokonce ani jednostranné limity. Také v případě nevlastního singulárního bodu je například reálná funkce $\sin x$ omezená a diferencovatelná, nemá však v nekonečnu limitu. I další část věty je ve srovnání s reálnou analýzou novým jevem. Dodefinujeme-li diferencovatelnou funkci f v daném bodě její limitou v tomto bodě, asi nás nepřekvapí, že dostaneme vždycky funkci spojitou. Věta 6.1 ovšem garantuje i existenci derivace, což se v reálném případě nestává: Například, dodefinováním funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$ v bodě $x = 0$ limitou vznikne funkce $\tilde{f}(x) = |x|$. Ta je spojitá, ale nediferencovatelná v bodě $x = 0$. Z tohoto pohledu Věta 6.1 říká, že v komplexním oboru je možnou odstranitelnou singularitu zcela „vymazat“ dodefinováním vhodnou hodnotou v singularitě.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že z_0 je vlastní bod. Věta 5.3 zaručuje, že f je možno v jistém prstencovém okolí P bodu z_0 rozvinout v Laurentovu řadu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{6.1}$$

Vzhledem k předpokladům můžeme zvolit P tak, že f je na P omezená. Budeme se snažit ukázat, že Laurentova řada má nulovou hlavní část. Z toho ihned vyplyne, že f je dána ve skutečnosti mocninnou řadou. Podle Věty 4.3 je taková funkce holomorfní a důkaz bude hotov. Zaměřme se tedy na koeficienty u záporných mocnin řady (6.1). Jsou to koeficienty a_{-n}, kde $n = 1, 2, \dots$. Podle integrální reprezentace koeficientů máme

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{C_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-n+1}} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{C_r} f(w)(w - z_0)^{n-1} \, \mathrm{d}w,$$

kde C_r je libovolná kladně orientovaná kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem r, která leží v prstencovém okolí P. Mocninná funkce $g(w) = (w - z_0)^{n-1}$ je omezená na P, neboť $n - 1 \geq 0$. Součin dvou omezených funkcí $f(w)$ a $(w - z_0)^{n-1}$ je omezená funkce, proto existuje konstanta $M \geq 0$ tak, že

$$|f(w)(w - z_0)^{n-1}| \leq M \text{ pro všechna } w \in P.$$

Použijeme Tvrzení 3.1 o odhadu absolutní hodnoty křivkového integrálu. V našem případě je tak

$$\begin{aligned} |a_{-n}| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{C_r} f(w)(w - z_0)^{n-1} \, \mathrm{d}w \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot 2\pi r = Mr. \end{aligned}$$

Číslo r můžeme ovšem volit libovolně malé, což implikuje

$$|a_{-n}| = 0 \text{ pro všechna } n = 1, 2, \dots .$$

Věta je tímto dokázána pro singularitu ve vlastním bodě. Případ $z_0 = \infty$ můžeme snadno převést na případ $z_0 = 0$ následující (standardní) úvahou. Je-li f holomorfní a omezená v okolí nekonečna $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$, $r > 0$, pak funkce

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

je holomorfní a omezená v prstencovém okolí

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \frac{1}{r} \right\}$$

bodu 0. Předchozí část důkazu říká, že g má v bodě nula vlastní limitu. To ovšem implikuje i existenci vlastní limity

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \to 0} g(z).$$

□

Po odstranitelných singularitách se budeme věnovat pólům. Ukazuje se, že rychlost konvergence k nekonečnu v těchto singularitách je možno porovnat s chováním mocniny $\dfrac{1}{(z - z_0)^k}$ v okolí bodu z_0. To vede k jemnější klasifikaci pólů. Dříve než k ní přistoupíme budeme definovat jako pomocný pojem násobnost kořene holomorfních funkcí.

Definice 6.2. *Nechť f je funkce holomorfní v okolí U bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Pokud f není identicky rovna nule na U, pak číslo $k \in \mathbb{N}$, pro které platí*

$$f(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \text{ a } f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

*se nazývá **násobnost** (též **řád**) **kořene** z_0 **funkce** f.*

Poznámka 6.3. Pokud je $f(z_0) \neq 0$ definujeme násobnost jako nulovou. Předpoklad, že $f \not\equiv 0$ na U (tj. f není identicky nulová na U) zaručuje, že takové číslo k z Definice 6.2 existuje. V opačném případě by totiž bylo $f^{(n)}(z_0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak ale mocninný rozvoj funkce f

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{6.2}$$

má všechny koeficienty nulové, neboť

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0.$$

Tedy f je identicky rovna nule na jistém okolí bodu z_0. „Nekonečná“ násobnost kořene nastává právě v tomto případě.

Příklad 6.2. Číslo 0 je dvojnásobný kořen funkce $f(z) = 1 - \cos z$, neboť

$$f'(z) = \sin z$$
$$f''(z) = \cos z,$$

a proto $f(0) = f'(0) = 0$, zatímco $f''(0) = 1 \neq 0$.

Z rozvoje v mocninnou řadu (6.2) vidíme, že pro k-násobný kořen z_0 funkce f je prvních k koeficientů nulových, tedy

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0)^{k+1} + \cdots,$$

kde $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Vytknutím mocniny $(z - z_0)^k$ dostaneme

$$f(z) = (z - z_0)^k \left(\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \cdots \right).$$

Mocninná řada v závorce má stejný poloměr konvergence jako řada reprezentující původní funkci f a definuje tak novou holomorfní funkci

$$g(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \cdots,$$

která je již nenulová v bodě z_0, $g(z_0) \neq 0$. Tímto jsme dostali následující charakterizaci k-násobných kořenů.

Tvrzení 6.1. *Nechť f je holomorfní na okolí U bodu z_0. Pak bod z_0 je k-násobným kořenem funkce f právě tehdy, když*

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$

kde g je holomorfní funkce na U a $g(z_0) \neq 0$.

S pojmem násobnost kořene se již čtenář pravděpodobně setkal v případě polynomů. Zde se násobnost kořene z_0 polynomu $p(z)$ definuje jako přirozené číslo k, pro které je možno polynom $p(z)$ rozložit na součin

$$p(z) = (z - z_0)^k q(z),$$

kde q je zbytkový polynom nenulový v z_0. Tvrzení 6.1 říká, že definice násobnosti kořene holomorfní funkce je zobecnění pojmu násobnosti kořene polynomu.

Tvrzení 6.1 poskytuje jednoduché pravidlo pro stanovení násobnosti kořene u součinu nebo podílu funkcí. Je-li totiž z_0 k-násobný kořen funkce $f(z)$ a současně l-násobný kořen funkce $g(z)$ pak je $k + l$ násobným kořenem součinu $f(z)g(z)$. Skutečně, je-li

$$f(z) = (z - z_0)^k f_1(z), \quad g(z) = (z - z_0)^l g_1(z)$$

pro holomorfní funkce f_1, g_1 nenulové v bodě z_0, pak platí

$$f(z)g(z) = (z - z_0)^{k+l} f_1(z) g_1(z),$$

přičemž $f_1 g_1$ je holomorfní funkce nenulová v z_0. To znamená, že z_0 je $k+l$-násobný kořen součinu fg. Podobné tvrzení platí i pro podíl. Je-li z_0 k-násobným kořenem funkce f a l-násobným kořenem funkce g, přičemž $k \geq l$, pak bod z_0 je odstranitelnou singularitou podílu $\dfrac{f}{g}$. Po dodefinování hodnotou limity v bodě z_0 se stane kořenem násobnosti $k - l$.

Příklad 6.3. Stanovme násobnost kořene $z_0 = 0$ funkce

$$f(z) = \frac{z^2 \sin^3 z}{1 - \cos z},$$

definované v nule rovností $f(0) = 0$.

Bod 0 je dvojnásobný kořen funkce z^2. Pomocí derivace se lehce přesvědčíme, že je jednonásobným kořenem funkce $\sin z$ a tedy trojnásobným kořenem funkce $\sin^3 z$. V předešlém příkladě jsme viděli, že $1 - \cos z$ má dvojnásobný kořen 0. Celková násobnost nuly jako kořene je tedy $2 + 3 - 2 = 3$.

Vraťme se nyní k pólům holomorfní funkce. Je-li z_0 pól funkce $f(z)$ je $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Lze proto nalézt prstencové okolí P bodu z_0, pro které je

$$f(z) \neq 0 \text{ pro všechna } z \in P.$$

Převrácená hodnota

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

je tedy funkce holomorfní a nenulová v P. Navíc

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = 0.$$

Bod z_0 je tedy odstranitelnou singularitou funkce g a po dodefinování hodnoty v bodě z_0 nulou se stane kořenem. Protože g je nenulová v každém bodě P musí mít tento kořen konečnou násobnost, kterou prohlásíme za násobnost pólu z_0 funkce f.

Definice 6.3. *Pól $z_0 \in \mathbb{C}$ funkce f má **násobnost** (též **řád**) $k \in \mathbb{N}$, je-li z_0 k-násobný kořen holomorfního rozšíření funkce $\frac{1}{f}$.*

Příklad 6.4. Stanovíme násobnost pólu z_0 funkce

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2 \sin^3 z}.$$

V předchozím příkladě jsme odvodili, že holomorfní rozšíření převrácené hodnoty funkce f má v bodě 0 kořen násobnosti 3. Vidíme tedy, že 0 je trojnásobný pól funkce f.

Následující tvrzení je bezprostředním důsledkem Tvrzení 6.1.

Tvrzení 6.2. *Nechť f je holomorfní na prstencovém okolí bodu z_0. Pak bod $z_0 \in \mathbb{C}$ je k-násobný pól funkce f právě tehdy, když*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k},$$

kde g je je funkce holomorfní v okolí z_0 a $g(z_0) \neq 0$.

Pól ve vlastním bodě tedy vyniká vždy tak, že funkci holomorfní a nenulovou v z_0 vydělíme mocninou $(z-z_0)^k$. To znamená, že rychlost konvergence k nekonečnu je stejná jako rychlost konvergence mocniny $\frac{1}{(z-z_0)^k}$ pro $z \to z_0$. Čím vyšší je řád pólu tím rychlejší je konvergence k nekonečnu.

V předchozí diskusi jsme se vyhnuli případu, kdy funkce f má pól v nevlastním bodě. Tento případ si rozebereme nyní. Předpokládejme, že f holomorfní v okolí nekonečna $P = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$, $r > 0$. Pomocná funkce

$$q(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

je holomorfní v prstencovém okolí nuly

$$P' = \left\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \frac{1}{r}\right\}.$$

Za předpokladu, že ∞ je pól funkce f je

$$\lim_{z\to 0} q(z) = \lim_{z\to\infty} q\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

Je tedy přirozené definovat násobnost pólu v nekonečnu jako násobnost pólu transformované funkce $f(\frac{1}{z})$ v nule.

Definice 6.4. *Bod ∞ je k-**násobný pól funkce** f, jestliže 0 je pól násobnosti k transformované funkce $f\left(\frac{1}{z}\right)$.*

Tvrzení 6.3. *Funkce f má v nekonečnu pól násobnosti k právě tehdy, když*

$$f(z) = z^k g(z),$$

kde g je holomorfní funkce v okolí nekonečna s vlastní a nenulovou limitou v nekonečnu.

Důkaz. Podle Tvrzení 6.2 můžeme transormovanou funkci $q(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ reprezentovat v okolí počátku ve tvaru

$$q(z) = \frac{h(z)}{z^k},$$

kde h je holomorfní v nule a $h(0) \neq 0$. Pak ale

$$f(z) = q\left(\frac{1}{z}\right) = z^k h\left(\frac{1}{z}\right).$$

Volbou $g(z) = h(\frac{1}{z})$ pak dostaneme holomorfní funkci v ∞ s limitou

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = h(0) \neq 0.$$

□

Příklad 6.5. Funkce $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ má v nekonečnu pól násobnosti dvě. To je vidět z Tvrzení 6.3 zvolíme-li $k = 2$ a $g(z) = e^{\frac{1}{z}}$, neboť $\lim_{z\to\infty} e^{\frac{1}{z}} = 1$.

Tvrzení 6.2 a 6.3 jsou specifické pro komplexní funkce. Konverguje-li holomorfní funkce v nekonečnu k nekonečnu pak konverguje s rychlostí jisté mocniny z^k. To v reálné analýze neplatí. Stačí se podívat na exponenciální funkci

$$f(x) = e^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

která má derivace všech řádů a pro $x \to \infty$ roste k nekonečnu podstatně rychleji než jakákoliv mocnina a tedy rychleji než každý polynom.

Zbývá případ podstatné singularity. Z předešlého výkladu víme, že funkce f nemůže být v žádném okolí své podstatné singularity z_0 omezená, jinak by šlo o odstranitelnou singularitu (Věta 6.1). Existuje tedy posloupnost bodů $z_n \to z_0$ taková, že $f(z_n) \to \infty$. Na druhé straně nekonečno není limitou funkce f v z_0. Musí tedy současně existovat jiná posloupnost $w_n \to z_0$ s vlastí limitou $\lim_{n\to\infty} f(w_n)$. Obecně se ukazuje, že f zobrazí každé prstencové okolí podstatné singularity na „velkou množinu“. V této souvislosti si uvedeme hlubokou Pickardovu větu.

Věta 6.2. (Pickardova věta) *Je-li z_0 podstatná singularita funkce f, pak f zobrazí každé prstencové okolí bodu z_0 buďto na celou komplexní rovinu nebo na komplexní rovinu bez jednoho bodu.*

Nyní se budeme věnovat Laurentovým rozvojům v singularitách. Pomocí jejich tvaru je totiž možno singularity klasifikovat.

Tvrzení 6.4. *Nechť*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \left(\textit{resp. } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \right)$$

je Laurentův rozvoj funkce f v prstencovém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ (resp. $z_0 = \infty$).

(i) *f má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu právě tehdy, když všechny koeficienty hlavní části Laurentovy řady jsou nulové;*

(ii) *f má v bodě z_0 pól násobnosti k právě tehdy, když $a_n = 0$ pro všechna $n < -k$ a $a_{-k} \neq 0$;*

(iii) *f má v bodě z_0 podstatnou singularitu právě tehdy, když nekonečně mnoho koeficientů hlavní části Laurentovy řady je nenulových.*

Poznámka 6.4. Tři možnosti uvedené v Tvrzení 6.4 pokrývají všechny případy: Buď v hlavní části není žádný nenulový koeficient (případ (i)) nebo jen konečně mnoho je nenulových (případ (ii)) nebo nekonečně mnoho je nenulových (případ (iii)).

Důkaz. Provedeme argumentaci pro vlastní střed řady $z_0 \in \mathbb{C}$. Případ $z_0 = \infty$ se odtud vyvodí přechodem k transformované funkci $f(1/z)$.

(i) Plyne z věty 6.1.

(ii) Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ je k-násobný pól právě tehdy když v jistém prstencovém okolí bodu z_0 platí, že

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k},$$

kde g je funkce holomorfní a nenulová v z_0 (Tvrzení 6.2). Funkci $g(z)$ lze rozvést v okolí bodu z_0 v mocninou řadu

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

kde $b_0 = g(z_0) \neq 0$. Pro $f(z)$ tak můžeme psát

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^k} \left(b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots \right) \\ &= \frac{b_0}{(z - z_0)^k} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{z - z_0} + b_k + b_{k+1}(z - z_0) + \cdots . \end{aligned}$$

Z jednoznačnosti Laurentova rozvoje pak vyplývá, že

$$a_{-k} = b_0 \neq 0 \text{ a } a_{-n} = 0 \text{ pro všechna } n > k.$$

(iii) Podstatná singularita je případ, kdy nemáme ani odstranitelnou singularitu ani pól. Tvrzení (iii) je tak logický doplněk tvrzení (i) a (ii). $\square$

Příklad 6.6. Pomocí Laurentova rozvoje klasifikujme následující singularity
$f_1(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$;
$f_2(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$;
$f_3(z) = \sin z$, $z_0 = \infty$.
Začneme s funkcí f_1:

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \cdots, \qquad z \neq 0.$$

Tedy $a_{-1} = 1, a_{-n} = 0$ pro všechna $n > 1$, což znamená, že f_1 má v nule pól prvního řádu.
Pro f_2 je

$$f_2(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

V tomto případě jsou všechny koeficienty odpovídající záporným mocninám nenulové a bod 0 je tedy podstatnou singularitou. Zbývá

$$f_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Tuto řadu interpretujeme jako řadu se středem v bodě nekonečno, tj.

$$a_{-(2n+1)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \neq 0, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

To znamená, že ∞ je podstatnou singularitou funkce f_3.

3 Reziduum funkce

Reziduum je důležitou číselnou charakteristikou singularity dané funkce. Umožňuje výpočet křivkového integrálu podél uzavřené křivky mající tuto singularitu ve svém vnitřku. Mnohdy je metoda reziduí jediným způsobem, jak hodnotu integrálu zjistit. Výpočet vychází z vyjádření koeficientů Laurentovy řady. Připomeňme si, že pro koeficienty Laurentova rozvoje funkce

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w,$$

kde C je jakákoliv jednoduchá uzavřená křivka ležící v prstencovém okolí bodu z_0, ve kterém je f holomorfní, a která má bod z_0 ve svém vnitřku. Pouze v jednom speciálním případě se za integrálem na pravé straně předchozí rovnosti objeví pouze funkce f. Položíme-li totiž $n = -1$ máme

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f(w) \, \mathrm{d}w.$$

Umíme-li tedy nalézt koeficient a_{-1} Laurentovy řady, můžeme křivkový integrál funkce f vypočítat následovně

$$\int_C f(w)\ \mathrm{d}w = 2\pi\mathrm{i}\, a_{-1}. \tag{6.3}$$

To motivuje následující definici.

Definice 6.5. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je singularita funkce f. Koeficient a_{-1} Laurentovy řady funkce f se středem v bodě z_0 se nazývá* ***reziduum funkce f v bodě*** *z_0 a značí se $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$.*

V případě $z_0 = \infty$ se číslo $-a_1$, kde a_1 je koeficient v Laurentově rozvoji funkce f se středem v bodě ∞, nazývá ***reziduum funkce f v*** *∞ a značí se $\operatorname{res}_\infty f(z)$.*

Reziduum je slovo latinského původu znamenající zbytek. Důvod pro toto pojmenování spočívá v následujícím pozorování. Když budeme počítat křivkový integrál $\int_C f(z)\ \mathrm{d}z$ přes uzavřenou křivku tak, že funkci f vyjádříme pomocí Laurentovy řady, pak po integraci zbyde pouze jedinný nenulový člen $\displaystyle\int_C \frac{a_{-1}}{z}\ \mathrm{d}z$.

V úvodu jsme vysvětlili, že reziduum funkce ve vlastním bodě reprezentuje jistý křivkový integrál. Nyní se podíváme na význam rezidua v nekonečnu. Předpokládejme, že nekonečno je singulární bod funkce f, která je holomorfní v oblasti $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$. Zvolme jednoduchou uzavřenou *záporně orientovanou křivku* $C \subset D$ mající bod 0 ve svém vnitřku. Zcela jistě lze zvolit mezikruží $P(0; r_1, r_2)$ obsahující křivku C (viz např. obr.5.2(b)). Podle Věty 5.1 o stejnoměrné konvergenci Laurentovy řady je Laurentův rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

stejnoměrně konvergentní v mezikruží $P(0; r_1, r_2)$, tedy i na křivce C. Z Tvrzení 3.3 plyne, že pro integraci součtu Laurentovy řady tedy můžeme zaměnit pořadí integrace a sumace a integrovat člen po členu:

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = \int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}\ \mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_C \frac{1}{z^n}\ \mathrm{d}z.$$

Podle Cauchyova vzorce je ovšem $\int_C \frac{1}{z^n}\ \mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}$, je-li $n = 1$ a pro jiné hodnoty n je tento integrál nulový. Z poslední nerovnosti tak plyne

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\, a_{-1}.$$

Podobně jako ve vlastním bodě tedy máme

$$\int_C f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \operatorname{res}_\infty f(z). \tag{6.4}$$

Na rozdíl od vlastního bodu je ovšem křivka C *záporně* orientovaná. Oba případy mají však společné to, že při probíhání křivky ve smyslu její orientace je singularita vždy vlevo.

Zůstaňme ještě chvíli u funkce f a křivky C z obrázku 5.2(b) a předpokládejme navíc, že f je holomorfní v celé komplexní rovině mimo bod 0. Pro rozvoj v nekonečnu tedy máme

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

zatímco pro rozvoj v bodě 0 platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n.$$

Díky jednoznačnosti Laurentova rozvoje dostáváme

$$b_n = a_{-n} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Speciálně je tedy

$$\operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_\infty f(z) = b_{-1} - a_1 = a_1 - a_1 = 0.$$

Celkový součet reziduí v obou singularitách je tedy nula. To vysvětluje výhodnost záporného znaménka u koeficientu odpovídacího mocnině z^{-1} při definici rezidua v nekonečnu.

Příklad 6.7. (a) Vypočteme $\operatorname{res}_0 \dfrac{\sin z}{z^3}$. Laurentův rozvoj má tvar

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots ,$$

a tedy

$$\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^3} = a_{-1} = 0.$$

(b) Vypočtěme $\operatorname{res}_\infty z^2 e^{\frac{1}{z}}$. Laurentův rozvoj v nekonečnu je (viz Příklad 5.3)

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{z^n}.$$

Vidíme tedy, že

$$\operatorname{res}_\infty z^2 e^{\frac{1}{z}} = -a_1 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

Pro stanovení rezidua funkce je možno jako univerzální metody použít rozvoje v Laurentovu řadu. V případě podstatné singularity žádný jiný způsob k dispozici nemáme. V případě odstranitelné singularity ve vlastním bodě je reziduum vždy nulové. Zbývá pól. V tomto případě existuje několik pravidel pro výpočet rezidua, které si probereme.

Tvrzení 6.5. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je k-násobný pól funkce f. Pak*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \Big((z-z_0)^k f(z) \Big) . \tag{6.5}$$

Speciálně, pro jednonásobný pól z_0 máme

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z). \tag{6.6}$$

Důkaz. Ke vzorci (6.5) můžeme dospět následující intuitivní úvahou. Hlavní část Laurentova rozvoje v případě pólu řádu k začíná výrazem $\dfrac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$. Vynásobíme-li tedy Laurentův rozvoj funkce f mocninou $(z-z_0)^k$ získáme mocninnou řadu mající koeficient a_{-1} u $(k-1)$-ní mocniny. Zderivujeme-li tuto řadu $(k-1)$-krát, bude hledaný koeficient absolutním členem řady. Nyní přesněji. Podle Tvrzení 6.2 je

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \cdots .$$

Vynásobíme-li tuto rovnost výrazem $(z-z_0)^k$ máme

$$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + \cdots .$$

Nyní budeme obě strany získaného vztahu $(k-1)$-krát derivovat.

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\Big((z-z_0)^k f(z)\Big) = (k-1)!\,a_{-1} + k!(z-z_0) + \cdots . \tag{6.7}$$

Provedeme-li limitu $z \to z_0$, získáme

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\Big((z-z_0)^k f(z)\Big) = (k-1)!\,a_{-1}. \tag{6.8}$$

Tedy

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\Big((z-z_0)^k f(z)\Big)$$

□

Pro použití vzorce (6.5) je třeba správně stanovit násobnost pólu.

Příklad 6.8. Vypočtěme $\operatorname{res}_{2\mathrm{i}} \dfrac{z+2}{(z-2\mathrm{i})^2(z+1)}$. Bod $2\mathrm{i}$ je pól druhého řádu. Podle (6.5) máme

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{2\mathrm{i}} \frac{z+2}{(z-2\mathrm{i})^2(z+1)} &= \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \left(\frac{z+2}{z+1}\right)' = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} -\frac{1}{(z+1)^2} = \\ &= -\frac{1}{(2\mathrm{i}+1)^2} = \frac{3+4\mathrm{i}}{25}.\end{aligned}$$

Následující pravidlo je možno použít pro výpočet rezidua jednoduchého pólu podílu dvou funkcí.

Tvrzení 6.6. *Nechť f a g jsou funkce holomorfní na okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť z_0 je jednonásobný kořen funkce g. Pak*

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{6.9}$$

Důkaz. Je-li $f(z_0) = 0$ má podíl $\dfrac{f}{g}$ odstranitelnou singularitu v z_0 a tedy

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0 = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Předpokládejme proto, že $f(z_0) \neq 0$. Pak podíl $\dfrac{f}{g}$ má v bodě z_0 jednonásobný pól. Podle (6.6) můžeme psát

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{\dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(Při úpravě jsme využili skutečnosti, že $g(z_0) = 0$.) □

Příklad 6.9. Funkce $f(z) = \operatorname{cotg} z$ má singularity v bodech $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Přitom

$$\operatorname{res}_{k\pi} f(z) = \operatorname{res}_{k\pi} \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1.$$

Tvrzení 6.7. *Nechť f je funkce holomorfní v okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a g má v bodě z_0 jednonásobný pól. Pak*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) g(z) = f(z_0) \operatorname{res}_{z_0} g(z). \tag{6.10}$$

Důkaz. Spočívá v aplikaci Tvrzení 6.6. Bod z_0 je singularitou součinu fg, která může být jednonásobným pólem nebo odstranitelnou singularitou (je-li $f(z_0) = 0$). Podle definice násobnosti pólu si funkci g můžeme představit ve tvaru

$$g(z) = \frac{1}{h(z)},$$

kde h je holomorfní funkce na okolí z_0, $h(z_0) = 0$ a $h'(z_0) \neq 0$. Podle Tvrzení 6.6

$$\operatorname{res}_{z_0} g(z) = \frac{1}{h'(z_0)}.$$

Opětovným použitím pravidla (6.9) dostaneme

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) g(z) = \operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{h(z)} = \frac{f(z_0)}{h'(z_0)} = f(z_0) \operatorname{res}_{z_0} g(z).$$

□

Příklad 6.10. Funkce $f(z) = z \operatorname{cotg} z$ má singularity v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Položíme-li $f(z) = z$ a $g(z) = \operatorname{cotg} z$ jsou splněny předpoklady Tvrzení 6.7, což znamená, že

$$\operatorname{res}_{k\pi} z \operatorname{cotg} z = k\pi \operatorname{res}_{k\pi} \operatorname{cotg} z = k\pi.$$

(Využili jsme výsledku předchozího příkladu.)

Dosud uvedená pravidla se týkala výpočtu reziduí ve vlastních bodech. Soustředíme se teď na singularitu v ∞. K tomu je užitečné si uvědomit, že má-li f v ∞ odstranitelnou singularitu, je nutně $\lim_{z\to\infty} f(z) = a_0$, kde a_0 je koeficient Laurentova rozvoje

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Vyplývá to ihned např. transformací na singularitu v 0:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots) = a_0.$$

V dalším textu budeme pro stručnost používat symbol $f(\infty)$ k označení limity funkce f v nekonečnu.

Tvrzení 6.8. *Nechť f má v nekonečnu singularitu.*

(i) *Je-li ∞ odstranitelná singularita funkce f pak*

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)), \tag{6.11}$$

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z). \tag{6.12}$$

(ii) *Je-li ∞ k-násobným pólem funkce f pak*

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z\to\infty} \left(z^{k+2} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}z^{k+1}} f(z)\right). \tag{6.13}$$

Poznámka 6.5. Povšimněme si jednoho důležitého rozdílu mezi vlastním a nevlastním bodem. Zatímco v každé vlastní odstranitelné singularitě musí být reziduum nulové, v nekonečnu může být reziduum jakékoliv.

Důkaz. (i) Při odstranitelné singularitě má Laurentův rozvoj v ∞ tvar

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots.$$

Pak

$$z(f(\infty) - f(z)) = z\left(a_0 - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\right)\right) = -a_1 - \frac{a_2}{z} - \frac{a_3}{z^2} - \cdots.$$

Tedy $\lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z))$ je rovna absolutnímu členu předchozí řady, což je reziduum $-a_1$. Druhý vztah pro výpočet rezidua získáme derivací Laurentova rozvoje

$$f'(z) = -\frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \frac{3a_3}{z^4} - \cdots.$$

Vynásobením z^2 máme

$$z^2 f'(z) = -a_1 - \frac{2a_2}{z} - \frac{3a_3}{z^2} - \cdots.$$

Limitním přechodem je konečně

$$\lim_{z\to\infty} z^2 f'(z) = -a_1 = \operatorname{res}_\infty f(z).$$

(ii) Odvození pravidla pro reziduum ve vícenásobném pólu sleduje stejnou myšlenku jako při odvozování vzorce pro pól ve vlastním bodě. Na základě Tvrzení 6.4 víme, že Laurentův rozvoj je tvaru

$$f(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots .$$

Hlavní část řady je polynom stupně k, který eliminujeme, budeme-li předchozí rovnost $k+1$ krát derivovat. Máme tak

$$f^{(k+1)}(z) = (k+1)!\frac{(-1)^{k+1}a_1}{z^{k+2}} + (k+2)!\frac{(-1)^k a_2}{z^{k+3}} + \cdots$$

Vynásobením z^{k+2} a limitou $z \to \infty$ získáme

$$\lim_{z\to\infty} z^{k+2} f^{(k+1)}(z) = (-1)^{k+1}(k+1)!\, a_1.$$

Odtud konečně

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = -a_1 = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\lim_{z\to\infty}\left(z^{k+2}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}z^{k+1}} f(z)\right).$$

□

Příklad 6.11. (a) Stanovme reziduum funkce $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ v nekonečnu. V tomto případě se jedná o odstranitelnou singularitu s $f(\infty) = 1$. Vyzkoušíme si výpočet podle obou pravidel uvedených v Tvrzení 6.8.

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty} z\left(1 - e^{\frac{1}{z}}\right) = \lim_{u\to 0}\frac{1-e^u}{u} = -1.$$

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty} z^2\left(e^{\frac{1}{z}}\right)' = \lim_{z\to\infty} z^2 e^{\frac{1}{z}}\cdot -\frac{1}{z^2} = -1.$$

(b) Spočítejme $\operatorname{res}_\infty z e^{\frac{1}{z}}$.

Nevlastní bod je pólem prvního řádu.

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{-1}{2!} z^3\left(z e^{\frac{1}{z}}\right)'' = -\lim_{z\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Postup založený na vzorci (6.13) může někdy vést ke zdlouhavému výpočtu. I v našem případě je snažší získat požadované reziduum z Laurentova rozvoje:

$$z e^{\frac{1}{z}} = z\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\right) = z + 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3!z^2} + \cdots .$$

Vidíme tedy, že $a_1 = \frac{1}{2}$, což dá ihned $\operatorname{res}_\infty f(z) = -\frac{1}{2}$.

4 Cvičení

Úloha: Nalezněte a klasifikujte izolované singulární body funkce $f(z) = \operatorname{tg} z$.

Řešení: Funkce f má singularity v nekonečně mnoha bodech

$$z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Bod z_k není kořenem funkce $\sin z$ a je jednonásobným kořenem funkce $\cos z$. Všechny body z_k jsou tedy jednonásobnými póly. Bod ∞ není v tomto případě izolovanou singularitou, neboť v každém jeho okolí leží nějaká singularita funkce f.

Úloha: Nalezněte a klasifikujte singularity funkce $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(e^z + \cosh z)^2}$.

Řešení: Vyhledáme nejdříve nulové body jmenovatele, tj. vyřešíme rovnici

$$z^2(e^z + \cosh z)^2 = 0,$$

která implikuje, že $z = 0$ nebo

$$e^z + \cosh z = 0.$$

Z poslední rovnice plyne

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = -e^z,$$

a tedy $e^{2z} = -\frac{1}{3}$. Proto

$$2z \in \operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = \left\{ \ln\frac{1}{3} + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tím dostáváme nekonečně mnoho nulových bodů

$$z_k = -\frac{1}{2}\ln 3 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože bod 0 je jednonásobným kořenem funkce $\sin z$ a dvojnásobným kořenem funkce $z^2(e^z + \cosh z)^2$, znamená to, že nula je jednonásobným pólem funkce $f(z)$. Jelikož

$$e^{z_k} + \cosh z_k = 0, \text{ zatímco derivace } \; e^{z_k} + \sinh z_k \neq 0,$$

vidíme, že z_k je jednonásobný kořen funkce $e^z + \cosh z$, a tedy dvojnásobným kořenem funkce $z^2(e^z+\cosh z)^2$. Protože z_k není kořenem funkce $\sin z$ (čitatele zkoumaného výrazu), je tento bod dvojnásobným pólem funkce $f(z)$. Bod ∞ není v tomto případě izolovaným singulárním bodem ze stejných důvodů jako v předchozí úloze.

Úloha: Nechť funkce $f(z)$ má podstatnou singularitu v bodě $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a funkce $g(z)$ je holomorfní v jistém prstencovém okolí bodu z_0, přičemž $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$. Ukažte, že součin

$$h(z) = f(z)g(z)$$

má podstatnou singularitu v bodě z_0.

Řešení: Neexistence limity funkce f v bodě z_0 znamená, že existují dvě posloupnosti (z_k) a (w_k) konvergující k bodu z_0, takové, že $\lim_{k\to\infty} f(z_k) \neq \lim_{k\to\infty} f(w_k)$. Pak ovšem

$$\lim_{k\to\infty} h(z_k) \neq \lim_{k\to\infty} h(w_k).$$

Funkce h tedy nemá v bodě z_0 limitu.

Úloha: Rozhodněte, zda ∞ je izolovaný singulární bod funkce $f(z) = \sin z^2 \cos \dfrac{1}{z}$ a v kladném případě stanovte typ singularity!

Řešení: Funkce $f(z)$ má vlastní singularitu pouze v nule, a proto je holomorfní v oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jelikož funkce $\sin z^2$ nemá limitu v nekonečnu a $\lim_{z\to\infty} \cos \frac{1}{z} = 1$, vidíme podle předchozí úlohy, že ∞ je podstatnou singularitou funkce f.

Úloha: Rozhodněte zda funkce $f(z) = \dfrac{\sin z \cos \frac{1}{z}}{z^5}$ má v ∞ izolovanou singularitu a určete její typ.

Řešení: Bod ∞ je singularitou ze stejných důvodů jako v předchozí úloze. Protože $\cos(1/z) \to 1$ při $z \to \infty$, vyšetříme funkci $h(z) = \dfrac{\sin z}{z^5}$. Pohybujeme-li se po reálné ose k nekonečnu je

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in\mathbb{R}}} h(t) = 0.$$

Podívejme se nyní na chování funkce $h(z)$ na imaginární ose. Zde máme

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in\mathbb{R}}} h(\mathrm{i}t) = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in\mathbb{R}}} \frac{\sin jt}{j^5 t^5} = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in\mathbb{R}}} -\frac{e^{-t} - e^t}{2t^5} = \infty.$$

Funkce h tedy limitu v nekonečnu nemá, a proto je ∞ podstatnou singularitou.

Úloha: Stanovte typ singularity $z_0 = 3$ funkce $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z^2 - 9} \cos \dfrac{1}{z-3}$.

Řešení: Fuknci rozepíšeme na $\dfrac{\sin \pi z}{z-3} \cdot \dfrac{1}{z+3} \cos \dfrac{1}{z-3}$. Pro první část máme

$$\lim_{z\to 3} \frac{\sin \pi z}{z-3} = \lim_{z\to 3} \pi \cos \pi z = -\pi \neq 0,$$

zatímco zbylá část $\dfrac{1}{z+3} \cos \dfrac{1}{z-3}$ nemá v bodě 3 limitu. Bod 3 je proto bodem podstatné singularity

Úloha: Charakterizujte funkce, které jsou holomorfní v $\mathbb{C}$ a mají v ∞ odstranitelnou singularitu. Dokažte pomocí toho Liouvilleovu větu.

Řešení: Každou funkci f holomorfní v $\mathbb{C}$ je možno reprezentovat mocninnou řadou se středem v bodě 0

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Na druhé straně, odstranitelná singularita v ∞ znamená, že f má Laurentův rozvoj v ∞

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Opět platí, že poloměr konvergence této řady je ∞. Máme tedy rovnost

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Díky jednoznačnosti koeficientů Laurentovy řady musí platit

$$a_0 = b_0, \qquad a_n = b_n = 0 \qquad \text{pro všechna } n \neq 0.$$

Jinými slovy, $f(z) = a_0$ je konstantní funkce. Vzhledem k tomu, že každá omezená holomorfní funkce má v nekonečnu odstranitelnou singularitu (Věta 6.1), je Liouvilleova věta okamžitým důsledkem.

Úloha: Charakterizujte funkce f holomorfní v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$|f(z)| \leq M|z|^k \qquad \text{pro všechna } z \text{ v jistém okolí nekonečna,}$$

kde k je přirozené číslo a $M \geq 0$.

Řešení: Podle předpokladu je funkce $\dfrac{f(z)}{z^k}$ omezená v nějakém okolí nekonečna. Díky Větě 6.1 má tato funkce v nekonečnu vlastní limitu. Má tedy Laurentův rozvoj

$$\frac{f(z)}{z^k} = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots$$

pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tedy

$$f(z) = b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + b_2 z^{k-2} + \cdots + b_k + \frac{b_{k+1}}{z} + \cdots. \tag{6.14}$$

pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Funkce f je holomorfní v $\mathbb{C}$, a proto řada v (6.14) je současně rozvojem funkce f v bodě 0. To ale dle jednoznačnosti koeficientů rozvoje znamená, že $0 = b_n$ pro všechna $n \geq k+1$. Odtud

$$f(z) = b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + b_2 z^{k-2} + \cdots + b_k.$$

Funkce f je tedy polynomem stupně nejvýše k.

Úloha: Nalezněte reziduum funkce $f(z) = (z+1)e^{\frac{z-1}{z}}$ v bodech (a) $z_0 = 0$, (b) $z_0 = \infty$.

Řešení: (a) Bod $z_0 = 0$ je podstatnou singularitou (ověřte!), a proto jediný způsob jak nalézt reziduum je stanovit Laurentův rozvoj v bodě 0. Využitím standardního rozvoje pro exponenciální funkci a algebraických úprav máme

$$f(z) = (z+1)e^{\frac{z-1}{z}} = zee^{\frac{-1}{z}} + ee^{\frac{-1}{z}} = \\ = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n-1}n!} + e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n n!}.$$

Sečtením koeficientů u mocniny $1/z$ v obou řadách máme

$$\operatorname{res}_0 f(z) = e\frac{(-1)^2}{2!} + e\frac{(-1)}{1} = -\frac{1}{2}e.$$

(b) Reziduum v nekonečnu můžeme rychle získat z bodu (a). Vzhledem k tomu, že f nemá jiné singularity než 0 a ∞ je Laurentova řada v nekonečnu současně Laurentovou řadou v bodě nula. Reziduum v nekonečnu je pak záporně vzatým koeficientem u $1/z$. Proto

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = -\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{1}{2}e.$$

V další kapitole ukážeme obecnější pravidlo říkající, že součet všech reziduuí funkce s konečně mnoha singularity je nulový. Konečně poznamenejme, že bod ∞ je jednonásobným pólem funkce f, neboť

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = e.$$

K výpočtu rezidua tedy můžeme použít i vztahu (6.13). Tento postup však vede k delšímu derivování.

Úloha: Vypočtěte $\operatorname{res}_0 \dfrac{1-\cos z}{z^3}$.

Řešení: Bod 0 je pól násobnosti jedna funkce $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$ (ověřte!) Podle vztahu (6.6) je

$$\operatorname{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2}.$$

(Při výpočtu jsme použili l'Hospitalova pravidla.)

Úloha: Předpokládejme, že z_0 je izolovaný singulární bod funkcí f_1 a f_2. Ukažte, že

$$\operatorname{res}_{z_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \operatorname{res}_{z_0} f_1 + \beta \operatorname{res}_{z_0} f_2 \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Řešení: Linearita v chování rezidua jako zobrazení na prostoru funkcí vyplývá bezprostředně z jeho definice. Je-li totiž

$$f_1(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{a} \quad f_2(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

pak

$$\alpha f_1(z) + \beta f_2(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z - z_0)^n.$$

Odtud ihned vyplývá dokazovená rovnost pro rezidua, která se často používá v konkrétních případech.

Úloha: Vypočtěte reziduum $\operatorname{res}_{3\mathrm{i}} \left(\frac{e^z}{z^2(z^2+9)} + \frac{\cos \pi z}{4z^2 - 1} \right)$.

Řešení: Bod 3i je jednonásobným pólem funkce $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. Funkce $\frac{\cos \pi z}{4z^2-1}$ je v bodě 3i holomorfní. To znamená, že podle předchozí Úlohy je

$$\operatorname{res}_{3\mathrm{i}} \left(\frac{e^z}{z^2(z^2+9)} + \frac{\cos \pi z}{4z^2 - 1} \right) = \operatorname{res}_{3\mathrm{i}} \frac{e^z}{z^2(z^2+9)} = \frac{e^{3\mathrm{i}}}{(3\mathrm{i})^2 2 \cdot 3\mathrm{i}} = \mathrm{i}\frac{e^{3\mathrm{i}}}{54}.$$

Pro hodnotu jsme použili vzorec z Tvrzení 6.6.

Úloha: Vypočtěte rezidua funkce $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.

Řešení: Vlastní singularity dostaneme jako řešení rovnice

$$\sin \frac{1}{z} = 0.$$

Nulové body této funkce jsou body $z_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Funkce není také definována v nule. Tento bod však není *izolovanou* singularitou neboť v každém jeho okolí leží nějaký bod z_k. Další singularitou je bod ∞. Podíváme se nejdříve na rezidua v bodech z_k. V těchto bodech má funkce $\sin(1/z)$ kořen násobnost jedna. Aplikací (6.9) máme

$$\operatorname{res}_{z_k} \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} = \frac{1}{(\sin \frac{1}{z})'} \bigg|_{z=z_k} = -\frac{1}{\frac{1}{z_k^2} \cos \frac{1}{z_k}} = -\frac{1}{k^2\pi^2 \cos k\pi} = (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2\pi^2}.$$

Pokusme se nyní stanovit typ singularity v nekonečnu. Je zřejmé, že se jedná o pól, protože

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})} = \infty.$$

Protože hodnoty funkce $\sin \frac{1}{z}$ jsou pro velká z přibližně rovna $\frac{1}{z}$, vede nás k intuice k pólu násobnosti jedna. Formální zdůvodnění je následující

$$f(z) = z \frac{1}{z \sin \frac{1}{z}} = z g(z),$$

kde g je holomorfní funkce s limitou $\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} = 1$.

Jednu z možností výpočtu rezidua v nekonečnu nabízí vzorec (6.13). V našem případě dá pro $k = 1$

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2} z^3 f''(z).$$

Tento postup však vede k delšímu derivování a pak k těžkopádnému výpočtu limity několikanásobným použitím l'Hospitolova pravidla. Elegantnějším způsobem výpočtu je stanovení koeficientů u mocniny z^{-1} v Laurentově rozvoji. Víme, že

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \cdots .$$

První členy Laurentova rozvoje funkce f ve nekonečnu můžeme získat algoritmem dělení.

$$\begin{array}{l}
1 \qquad\qquad : \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \cdots\right) = z + \frac{1}{6z} + \cdots \\
-\left(1 - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{5!z^4} + \cdots\right) \\
\qquad \frac{1}{6z^2} - \frac{1}{5!z^4} + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Odtud $\operatorname{res}_\infty f(z) = -\frac{1}{6}$.

Úloha: Určete $\operatorname{res}_{\pi \mathrm{i}}(e^z + 1)^{-2}$.

Řešení: Jedná se o reziduum v pólu druhého řádu. Postupujeme-li podle vzorce (6.5) je

$$\operatorname{res}_{\pi\mathrm{i}}(e^z + 1)^{-2} = \lim_{z\to\pi\mathrm{i}} \left(\frac{(z-\pi\mathrm{i})^2}{(e^{\pi z}+1)^2}\right)'.$$

Pokud bychom počítali vzniklou limitu přímo, čekalo by nás nepříjemné derivování a poté trojnásobné použití l'Hospitalova pravidla. Těmto obtížím se vyhneme, jestliže nalezneme část Laurentova rozvoje obsahující mocninu $(z - \pi\mathrm{i})^{-1}$. Taylorův rozvoj funkce $e^z + 1$ v bodě $\pi\mathrm{i}$ je

$$\begin{aligned}
e^z + 1 = e^{z-\pi\mathrm{i}}\, e^{\pi\mathrm{i}} + 1 = -e^{z-\pi\mathrm{i}} + 1 &= -\frac{(z-\pi\mathrm{i})}{1!} - \frac{(z-\pi\mathrm{i})^2}{2!} - \cdots \\
&= -(z-\pi\mathrm{i})\left(1 + \frac{(z-\pi\mathrm{i})}{2!} + \frac{(z-\pi\mathrm{i})^2}{3!} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{1}{(e^z+1)^2} = \frac{1}{(z-\pi\mathrm{i})^2\left(1 + \frac{(z-\pi\mathrm{i})}{2!} + \frac{(z-\pi\mathrm{i})^2}{3!} + \cdots\right)^2}.$$

Pro zkrácení zápisu označme $w = z - \pi\mathrm{i}$. Pak první členy druhé mocniny řady jsou

$$\left(1 + \frac{w}{2} + \frac{w^2}{6} + \cdots\right)^2 = 1 + w + \frac{7w^2}{12} + \cdots .$$

Algoritmem pro dělení polynomů získáváme

$$
\begin{array}{ll}
1 & : \left(1 + w + \dfrac{7w^2}{12} + \cdots\right) = 1 - w + \cdots \\
-\left(1 + w + \dfrac{7w^2}{12} + \cdots\right) & \\
\quad - w - \dfrac{7w^2}{12} - \cdots & \\
\cdots\cdots\cdots &
\end{array}
$$

Závěrem získáváme počáteční členy Laurentova rozvoje

$$\frac{1}{w^2(e^w+1)^2} = \frac{1}{w^2} - \frac{1}{w} + \cdots .$$

Tedy

$$\operatorname{res}_{\pi \mathrm{i}} \frac{1}{(e^z+1)^2} = -1.$$

Úloha: Nechť $P(z)$ a $Q(z)$, $Q \neq 0$ jsou polynomy stejného stupně. Určete $\operatorname{res}_\infty \dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

Řešení: Označme

$$
\begin{aligned}
P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad a_n \neq 0. \\
Q(z) &= b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0, \qquad b_n \neq 0.
\end{aligned}
$$

Jelikož

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n}{b_n}$$

je nekonečno odstranitelnou singularitou. Podle (6.11) platí

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_\infty \frac{P(z)}{Q(z)} &= \lim_{z\to\infty} z\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{P(z)}{Q(z)}\right) = \lim_{z\to\infty} \frac{z(a_n Q(z) - b_n P(z))}{b_n Q(z)} = \\
&= \frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{b_n^2}.
\end{aligned}
$$

Úloha: Charakterizujte ryze lomené racionální funkce, které mají nulové reziduum v nekonečnu!

Řešení: Reprezentujme ryze lomenou funkci ve tvaru podílu dvou polynomů

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

kde polynom Q má větší stupeň než polynom P. Označme jako a a b koeficienty u nejvyšších mocnin polynomů P a Q. Jelikož $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$ máme podle (6.11)

$$\operatorname{res}_\infty R(z) = -\lim_{z\to\infty} z\frac{P(z)}{Q(z)} = \begin{cases} \frac{-a}{b}, & \text{je-li } stQ = stP + 1 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{6.15}$$

Závěrem tedy máme, že $\operatorname{res}_\infty R(z) = 0$ právě tehdy když stupeň polynomu ve jmenovateli je alespoň o dva větší než stupeň polynomu v čitateli.

1. Nalezněte a klasifikujte izolované singulární body následujích funkcí:
   (a) $z^3 - 2z + \mathrm{i}$
   (b) $\dfrac{z+\pi}{z^2 \sin z}$
   (c) $\dfrac{1}{z - z^3}$
   (d) $\dfrac{1}{(z^2+\mathrm{i})^3}$
   (e) $\dfrac{1}{\sin z}$
   (f) $\dfrac{\operatorname{tg} z - 1}{z-1}$
   (g) $\dfrac{1}{\sin z + \cos z}$
   (h) $z^2 e^{-z}$
   (ch) e^z
   (i) $e^{\frac{1}{z-2\mathrm{i}}}$
   (j) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$
   (k) $e^{\frac{1}{z}} \dfrac{1}{z(z^2-2\mathrm{i})^2}$
   (l) $\dfrac{\sin \pi z \cos \frac{1}{z-3}}{(z^2-9)(z^2+1)^3(z-1)}$
   (m) $e^{\operatorname{tg} \frac{1}{z}}$
   (n) $\operatorname{tgh} z$
2. Nechť z_0 je pól násobnosti k funkce $f(z)$. Ukažte, že z_0 je pól násobnosti $l+k$ funkce $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^l}$, $l \in \mathbb{N}$!
3. Předpokládejme, že funkce $f(z)$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ singularitu a g je funkce holomorfní v prstencovém okolí bodu z_0 s nenulovou limitou $\lim_{z\to z_0} g(z)$. Ukažte, že součin $f(z)g(z)$ má v z_0 singularitu stejného typu jako funkce f. Platí tvrzení i v případě, kdy je limita funkce g nulová?

4. Předpokládejme, že $h(z) = f(z) + g(z)$, funkce $f(z)$ má v z_0 pól násobnosti k a funkce $g(z)$ má v bodě z_0 pól násobnosti $l \neq k$. Ukažte, že funkce $h(z)$ má v bodě z_0 pól násobnosti $\max\{l, k\}$. Platí tvrzení i pro $l = k$?

5. Předpokládejme, že $h(z) = f(z) + g(z)$, $f(z)$ má podstatnou singularitu v bodě z_0 a $g(z)$ nemá podstanou singularitu v bodě z_0. Jakou singularitu má funkce $h(z)$ v bodě z_0?

6. Charakterizujte funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ mající v ∞ pól násobnosti k !

7. Charakterizujte funkce holomorfní v $\mathbb{C}$, pro které platí následující podmínky růstu

$$C_1|z|^k \leq |f(z)| \leq C_2|z|^l, \text{ pro všechna } z \in \mathbb{Z},$$

   kde $C_1, C_2 > 0, k \leq l, k, l \in \mathbb{N}$!

8. Nechť $z_0 = 0$ je podstatná singularita funkce $f(z)$. Ukažte, že existuje posloupnost bodů (z_k) konvergující k z_0 tak, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{z_k} = \infty.$$

9. Existuje funkce holomorfní v prstencovém okolí bodu nula, pro kterou platí v daném prstencovém okolí

$$\text{a) } \frac{C_2}{\sqrt{|z|}} \geq |f(z)| \geq \frac{C_1}{\sqrt{|z|}},$$

$$\text{b) } \frac{C_2}{|z|^2} \geq |f(z)| \geq \frac{C_1}{|z|^2},$$

   kde $0 < C_1 < C_2$?

10. Nalezněte všechny funkce holomorfní v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{|z|}} \text{ pro všechna } z \in \mathbb{C}.$$

11. Ukažte pomocí Pickardovy věty (Věta 6.2), že nekonstantní funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ zobrazí komplexní rovinu na komplexní rovinu nebo na komplexní rovinu bez bodu.

12. Vypočtěte rezidua následujících funkcí:

    (a) $\operatorname{res}_1 \left(\dfrac{z^2 + z - 1}{(z-1)z^2} + \dfrac{\sin z}{z^2} \right)$

    (b) $\operatorname{res}_0 \left(\dfrac{z^2 + z - 1}{(z-1)z^2} + \dfrac{\sin z}{z^2} \right)$

    (c) $\operatorname{res}_\infty \left(\dfrac{z^2 + z - 1}{(z-1)z^2} + \dfrac{\sin z}{z^2} \right)$

    (d) $\operatorname{res}_0 \dfrac{z^3 \sin z}{(1 - \cos z) \sinh z}$

(e) $\operatorname{res}_{2k\pi} \dfrac{z^3 \sin z}{(1-\cos z)\sinh z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

(f) $\operatorname{res}_{\infty} e^{-\frac{1}{z^2}}$

(g) $\operatorname{res}_{\infty} \cos \dfrac{1}{z}$

(h) $\operatorname{res}_{\pi} \dfrac{1}{\sin z}$

(ch) $\operatorname{res}_{1} \dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$

(i) $\operatorname{res}_{\infty} z^3 \cos \dfrac{1}{z-2}$

(j) $\operatorname{res}_{0} \sin z \sin \dfrac{1}{z}$

(k) $\operatorname{res}_{k\pi} \operatorname{cotg}^2 z$, $k \in \mathbb{Z}$.

(l) $\operatorname{res}_{k\pi} \operatorname{cotg}^3 z$, $k \in \mathbb{Z}$

(m) $\operatorname{res}_{\infty} \operatorname{Ln} \dfrac{z-a}{z-b}$

(n) $\operatorname{res}_{\infty} e^z \operatorname{Ln} \dfrac{z-a}{z-b}$

(o) $\operatorname{res}_{z_k} \dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$, kde $z_k = e^{(2k+1)\frac{\pi \mathrm{i}}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

(p) $\operatorname{res}_{0} \dfrac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$

(q) $\operatorname{res}_{\mathrm{i}} \dfrac{e^{\pi z}}{1+z^2}$

(r) $\operatorname{res}_{\mathrm{i}} \left((1+z^2)\cosh \dfrac{\pi}{2} z\right)^{-1}$

13. Nalezněte reziduum $\operatorname{res}_{0} e^z \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$!

14. Ukažte, že je-li $f(z)$ lichá funkce ($f(z) = -f(-z)$), pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \operatorname{res}_{-z_0} f(z)$!

15. Nechť $f(z)$ je funkce holomorfní v z_0 a $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$. Odvoďte, že

$$\operatorname{res}_{z_0} (z-z_0)^{-k} f(z) = \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

16. Předpokládejme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól násobnosti k funkce $f(z)$. Ukažte, že existuje polynom P tak, že funkce

$$f(z) - P\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$$

je holomorfní v z_0 ! Jakého stupně je polynom P? Odvoďte pomocí toho větu o rozkladu racionální funkce na částečné zlomky.

17. Je dána racionální funkce
$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$
kde P Q jsou polynomy. Jakým algebraickým algoritmem (tj. bez použití limity) lze určit $\operatorname{res}_\infty R(z)$?

18. Nechť $R(z)$ je racionální funkce tvaru
$$R(z) = \frac{P(z)}{(z-z_0)^k Q(z)},$$
kde P a Q jsou polynomy, $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) \neq 0$. V rozkladu $R(z)$ na částečné zlomky se objeví zlomek
$$\frac{A}{(z-z_0)^l}, \qquad A \in \mathbb{C}, \qquad 1 \leq l \leq k.$$
Interpretujte koeficient A jako reziduum vhodné funkce odvozené od $R(z)$ a odvoďte na základě tohoto vzorec pro výpočet A !

Výsledky.

1. a) ∞ - pól řádu 3
b) 0 - pól řádu 3, $-\pi$ - odstranitelná singularita, $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0, -1$, - póly prvního řádu
c) $0, \pm 1$ - pól prvního řádu, ∞ - odstranitelná singularita
d) $\pm \mathrm{i}$ - pól řádu 1
e) $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, - pól řádu 1
f) $\frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,- pól řádu 1
g) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ - pól řádu 1
h) ∞ - podstatná singularita
ch) ∞ - podstatná singularita
i) 2i - podstatná singularita, ∞ - odstranitelná singularita
j) 1 - podstatná singularita, $2k\pi \mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$, - pól řádu 1.
k) 0 - podstatná singularita, $\pm(1+\mathrm{i})$ - pól řádu 2, ∞ - odstranitelná singularita
l) $\pm \mathrm{i}$ - pól řádu 3, 1 - odstranitelná singularita, -3 - odstranitelná singularita, 3 - podstatná singularita, ∞ - podstatná singularita
m) $\frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, - podstatná singularita, ∞ - odstranitelná singularita
n) $k\pi \mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$, - pól řádu 1
3. Neplatí.
4. Neplatí, položte $g = -f$.
5. Podstatnou singularitu
6. Polynomy stupně k.
7. Polynomy stupně mezi k a l.
8. Využijte toho, že musí existovat posloupnost (z_k) taková, že $f(z_k)$ nekonverguje k nule.
9. a) Neexistuje. b) Existuje, např. násobek $\frac{1}{z^2}$.
10. Pouze konstantní funkce.

11. Návod: diskutujte typ singularity v ∞ a užijte Pickardovu větu.

12. a) 1 b) 1 c) -2 d) 0 e) $\dfrac{16k^3\pi^3}{\sinh 2k\pi}$ f) 0 g) 1 h) -1 ch) $\frac{3}{4}$ i) $\frac{143}{24}$ j) 0 k) 0 l) -1 m) $a-b$ n) $e^a - e^b$ o) $-\frac{z_k}{n}$ p) 2 q) $\frac{\mathrm{i}}{2}$ r) $\frac{\mathrm{i}}{2\pi}$

13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!(2k+1)!}$ Návod: použujte pravidlo pro součin nekonečných řad!

16. Stupně k.

17. Určíme zbytek $P_1(z)$ při dělení polynomů. Pak $\operatorname{res}_{\infty} R(z) = \operatorname{res}_{\infty} \dfrac{P_1(z)}{Q(z)}$. Pro výpočet tohoto rezidua použijeme Úlohu .

18. $A = \operatorname{res}_{z_0}(z-z_0)^{l-1}R(z)$, $A = \displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-l)!}\frac{\mathrm{d}^{k-l}}{\mathrm{d}z^{k-l}}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)$

Kapitola 7

Reziduová věta

1 Úvod

V Kapitole 3 jsme viděli, že holomorfní funkce mají nulové integrály přes jednoduché uzavřené křivky. Přirozená je tedy otázka čemu je roven integrál přes uzavřenou křivku, má-li integrovaná funkce konečně mnoho singularit ve svém vnitřku. Ukazuje se, že v tomto případě je možno integrál spočítat pomocí reziduí. Kalkulus reziduí tak poskytuje důležitý prostředek pro výpočet křivkových integrálů. Navíc je možno pomocí metody reziduí vypočítat i mnoho integrálů určitých, které bychom nebyli schopni bez komplexní analýzy nalézt. Těmto tématům, které představují završení našeho základního kurzu teorie komplexních funkcí se budeme věnovat v této kapitole.

2 Reziduová věta

Věta 7.1. (Reziduová věta) *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a předpokládejme, že funkce f je holomorfní v množině $G \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Nechť C je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná křivka ležící v G, která neprochází žádným z bodů $z_1, z_2, \ldots, z_n$ a která má ve svém vnitřku body $z_1, z_2, \ldots, z_k$, $k \leq n$. Potom*

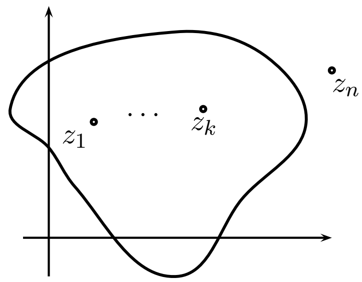
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f.$$

Poznámka 7.1. Situace, kterou popisují předpoklady věty je znázorněna na obr.7.1. Reziduovou větu je možno chápat jako zesílení Cauchyova integrálního vzorce, a tím i Cauchyovy věty: Je-li C uzavřená jednoduchá křivka, $z_1 \in \operatorname{Int} C$ a f funkce holomorfní v jednoduše souvislé oblasti obsahující křivku C, pak funkce $\dfrac{f(z)}{z - z_1}$ má izolovanou singularitu v z_1 s reziduem (viz (6.6))

$$\operatorname{res}_{z_1} \frac{f(z)}{z - z_1} = f(z_1).$$

V této situaci se reziduová věta redukuje na nám již známý Cauchyův integrální vzorec

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\, f(z_1).$$



Obr. 7.1.

Důkaz. Jak bylo řečeno v předešlé poznámce, reziduovou větu jsme již odvodili v případě $k = 1$, viz (6.3), v předchozí kapitole. Nyní se budeme snažit rozšířit tento výsledek na konečně mnoho singularit $z_1, z_2, \dots, z_k$. V každé singularitě z_i má f Laurentův rozvoj, jehož hlavní část označíme $H_i(z)$. Každá hlavní část $H_i(z)$ konverguje ve všech bodech $\mathbb{C}$ vyjma bodu z_i. To vyplývá ze skutečnosti, že vnitřní poloměr konvergence Laurentovy řady o středu v singularitě je vždy nulový. Jinými slovy, hlavní část H_i konverguje v prstencovém okolí $P(z_i; 0, \infty)$. Proto je funkce $H_i(z)$ holomorfní v $\mathbb{C}\setminus\{z_i\}$. Pro tuto funkci $H_i(z)$ můžeme použít „jednobodovou variantu“ reziduové věty (6.3), která říká, že

$$\int_C H_i(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{res}_{z_i} H_i(z) = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{res}_{z_i} f(z).$$

Nyní původní funkci f zmodifikujeme následujícím způsobem. Položíme

$$g(z) = f(z) - H_1(z) - H_2(z) - \dots - H_k(z).$$

Pak g je holomorfní v G: Je totiž zřejmě holomorfní v $G \setminus \{z_1, z_2, \cdots, z_k\}$ a v bodech z_i má nulovou hlavní část. Aplikací Cauchyovy věty máme

$$0 = \int_C g(z)\ \mathrm{d}z = \int_C f(z)\ \mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{k} \int_C H_i(z)\ \mathrm{d}z = \int_C f(z)\ \mathrm{d}z - 2\pi \mathrm{i} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f(z).$$

Tím je tvrzení reziduové věty dokázáno. □

Poznámka 7.2. Pro aplikace je znění reziduové věty (Věta 7.1) zcela postačující. Ovšem po matematické (a estetické) stánce není uvedená formulace příliš uspokojivá. Vadí nám např., že o křivce C musíme předpokládat, že je jednoduchá, uzavřená a kladně orientovaná. Co by se stalo, kdyby C byla pouze uzavřená? Dále, v sumě reziduí musíme hlídat, abychom sčítali pouze přes singularity ležící ve vnitřku křivky C. To jsou věci, které každému matematikovi ihned padnou do oka a zeptá se, nakolik jsou tyto požadavky důležité pro věc samu.

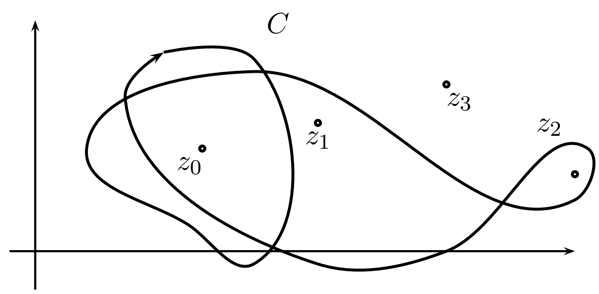
Podívejme se, jak zavedení vhodného pojmu celou situaci projasní.

Definice 7.1. *Nechť f je funkce holomorfní na otevřené množině G, nechť C je uzavřená křivka ležící v G a $z_0 \in G \setminus C$. Číslo*

$$\operatorname{Ind}_C z_0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$$

*se nazývá **index** bodu z_0 ke křivce C.*

Index je tedy definován pro každý bod, který neleží na křivce C. Nevinně vyhlížející integrál nás však překvapí svými vlastnostmi: Jeho hodnota je vždy *celé* číslo! Navíc, jeho význam je velmi geometrický. Udává kolikrát křivka C oběhla bod z_0 v kladném smyslu. Na obr. 7.2 je zachycena typická situace.



Obr. 7.2.

$$\operatorname{Ind}_C z_0 = 2, \quad \operatorname{Ind}_C z_1 = 1, \quad \operatorname{Ind}_C z_2 = -1, \quad \operatorname{Ind}_C z_3 = 0.$$

Pomocí indexu můžeme reziduovou větu zformulovat do elegantnější verze.

Reziduová věta (Obecný tvar) *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a nechť f je holomorfní na G až na konečnou množinu $M \subset G$ singulárních bodů. Pak pro každou uzavřenou křivku $C \subset G \setminus M$ platí*

$$\int_C f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{z \in M} \operatorname{Ind}_C z \cdot \operatorname{res}_z f.$$

Při takové formulaci převzal pojem index zodpovědnost jak za orientaci křivky C, tak i za rozlišení, která rezidua a kolikrát přispívají k hodnotě integrálu.

Příklad 7.1. Vypočtěme pomocí reziduové věty integrál $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2} \, \mathrm{d}z$, kde C je uzavřená křivka obsahující body 1 a -1 ve svém vnitřku a bod 3 ve vnějšku. Reziduová věta převede výpočet zadaného integrálu okamžitě na výpočet reziduí v 1 a -1 (póly násobnosti jedna).

$$\operatorname{res}_1 \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2} = \frac{1}{2 \cdot (-2)^2} = \frac{1}{8}.$$

$$\operatorname{res}_{-1} \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2} = \frac{1}{(-2)\cdot(-4)^2} = -\frac{1}{32}.$$

Dostáváme tak

$$\int_C \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{32}\right) = \frac{3\pi}{16}\mathrm{i}.$$

Reziduová věta má jeden důležitý důsledek pro funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečné množiny.

Důsledek 7.1. *Nechť funkce $f(z)$ je funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ vyjma konečně mnoha singularit $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$. Pak*

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f + \operatorname{res}_{\infty} f = 0. \tag{7.1}$$

(Součet reziduí ve všech singularitách je nulový.)

Důkaz. Zvolme jednoduchou uzavřenou kladně orientovanou křivku C obsahující body $z_1, z_2, \ldots, z_k$ ve své vnitřní oblasti. Pak

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f. \tag{7.2}$$

Na druhé straně, podle vzorce (6.4) s uvážením, že v (6.4) je křivka záporně orientována, máme

$$-\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{\infty} f.$$

Sečtením těchto identit dostaneme dokazovanou rovnost. □

Příklad 7.2. Stanovme $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{100}}$, kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 2$. Tento příklad je typickou ukázkou použití identity (7.1). Uvnitř křivky C leží totiž celkem sto singularit $z_1, z_2, \ldots, z_{100}$. (Tvoří vrcholy pravidelného stoúhelníka na jednotkové kružnici.) Pro aplikaci reziduové věty potřebujeme znát pouze součet těchto reziduí a nikoliv jejich individuální hodnoty. Vně křivky C leží ovšem podstatně méně singularit, pouze ∞. Podle (7.1) je

$$\sum_{i=1}^{100} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = -\operatorname{res}_{\infty} f(z).$$

Protože f má v ∞ odstranitelnou singularitu, použijeme z Tvrzení 6.8 vzorec (6.11) pro výpočet rezidua v nekonečnu. Dostaneme, že $\operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0$, a tedy

$$\int_C \frac{1}{1+z^{100}}\,\mathrm{d}z = 0.$$

3 Výpočet určitých integrálů pomocí reziduové věty

V této části si probereme několik základních typů výpočtu určitých integrálů pomocí techniky založené na reziduové větě. V následujících aplikacích leží těžiště důležitosti reziduové věty.

(a) Integrály racionálních funkcí $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$**.**

Předpokládejme, že $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy s reálnými koeficienty, přičemž stupeň polynomu Q je alespoň o dva větší než stupeň polynomu P. Nechť Q nemá žádné kořeny na reálné ose. Budeme počítat integrál

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

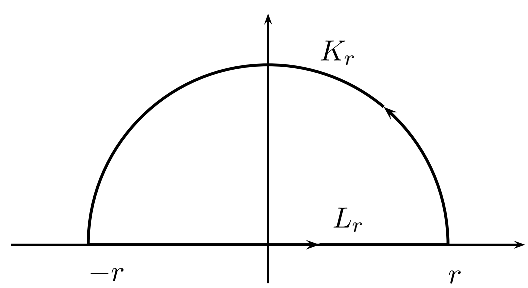
(Rozmyslete si, že za daných předpokladů integrál existuje!) Myšlenka výpočtu spočívá v nalezení vhodné uzavřené křivky obsahující úsečku na reálné ose. Zvolme pro kladný parametr $r > 0$ kladně orientovanou křivku $C_r = L_r \cup K_r$, kde $L_r = [-r, r]$ je úsečka na reálné ose a K_r horní polokružnice se středem v počátku a poloměru r (viz obr. 7.3).

Zvolme navíc poloměr r tak velký, že C_r obsahuje ve svém vnitřku všechny kořeny polynomu $Q(z)$ ležící v horní polorovině. Za základní funkci zvolme funkci

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Podle reziduové věty

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{\{z|Q(z)=0\\ \operatorname{Im} z>0\}}} \operatorname{res}_z f(z).$$



Obr. 7.3.

Tento křivkový integrál je možno na druhé straně napsat ve tvaru součtu

$$\int\limits_{C_r} f = \int\limits_{L_r} f + \int\limits_{K_r} f. \tag{7.3}$$

Přitom

$$\int\limits_{L_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Pro $r \to \infty$ dá tento integrál požadovaný nevlastní integrál. Vtip postupu spočívá v tom, že racionální funkce $f(z)$ klesá v nekonečnu k nule alespoň s rychlostí poklesu funkce $\frac{1}{z^2}$, což zajistí

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{K_r} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Skutečně, díky předpokladu o stupních polynomů má racionální funkce

$$\frac{z^2P(z)}{Q(z)}$$

vlastní limitu v nekonečnu. To implikuje, že tato funkce je v absolutní hodnotě omezená v jistém okolí nekonečna P konstantou M:

$$\left|\frac{z^2P(z)}{Q(z)}\right| \le M \qquad \text{tj.} \qquad \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \le \frac{M}{|z|^2}, \qquad z \in P.$$

Pro křivku K_r ležící v okolí nekonečna P můžeme pomocí Tvrzení 3.1 odhadnout

$$\left|\int_{K_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \text{délka}(K_r)\cdot \max_{z\in K_r}|f(z)| \le \pi r \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{\pi M}{r} \to 0 \qquad \text{pro } r\to\infty.$$

Limitním přechodem $r \to \infty$ v (7.3) pak dostáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{\{z\ |Q(z)=0\\ \operatorname{Im} z>0\}}} \operatorname{res}_z \frac{P(z)}{Q(z)}. \tag{7.4}$$

Příklad 7.3. Vypočtěme $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx$, $a > 0$. Jedná se o integrál z racionální funkce, která vyhovuje předpokladům uvedeným výše pro $P(z) = z^2$ a $Q(z) = (z^2+a^2)^2$. Jediným nulovým bodem funkce $Q(z)$ v otevřené horní polorovině je bod $a\mathrm{i}$, který je pólem druhého řádu funkce $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ s reziduem

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{a\mathrm{i}} \frac{P(z)}{Q(z)} &= \lim_{z\to a\mathrm{i}} \left((z-a\mathrm{i})^2 \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\right)' = \lim_{z\to a\mathrm{i}}\left(\frac{z^2}{(z+a\mathrm{i})^2}\right)' = \\ &= \lim_{z\to a\mathrm{i}} \frac{2a\mathrm{i}z}{(z+a\mathrm{i})^3} = \frac{1}{4a\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

Tím máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{a\mathrm{i}}\frac{P(z)}{Q(z)} = 2\pi a\mathrm{i}\frac{1}{4a\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2a}.$$

(b) Integrály goniometrických funkcí $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x.$

Nechť $R(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ je podíl dvou polynomů ve dvou proměnných s reálnými koeficienty. Dále předpokládejme, že $Q(x,y) \neq 0$ pro všechny body na jednotkové kružnici $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$. Ukážeme, že

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\ \mathrm{d}x = \int_C R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}, \tag{7.5}$$

kde C je jednotková kladně orientovaná kružnice $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Tato identita umožní převést integrál z goniometrické funkce na křivkový integrál vůči uzavřené křivce, který je možno spočítat pomocí reziduové věty. Rovnost (7.5) můžeme bezprostředně ověřit vyjádřením křivkového integrálu přes jednotkovou kružnici pomocí její parametrizace

$$\varphi(x) = e^{\mathrm{i}x}, \qquad x \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Jelikož pro $z = e^{\mathrm{i}x}, x \in \mathbb{R}$, platí

$$\begin{aligned}\frac{z^2+1}{2z} &= \frac{e^{2\mathrm{i}x}+1}{2e^{\mathrm{i}x}} = \frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2} = \cos x\\ \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z} &= \frac{e^{2\mathrm{i}x}-1}{2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x}} = \frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \sin x\end{aligned}$$

a $\varphi'(x) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x}$, získáváme

$$\int_C R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x}}\ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\ \mathrm{d}x.$$

Příklad 7.4. Vypočtěme $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$, kde $a > b > 0$. Tento integrál je výše uvedeného typu s racionální funkcí

$$R(x,y) = \frac{1}{a+bx}.$$

Je-li $x \in (-1,1)$, pak $a + bx > a - b > 0$, což znamená, že předpoklady o nenulovosti polynomu $Q(x,y)$ na jednotkové kružnici jsou splněny. Položme

$$F(z) = \frac{1}{a+b\frac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{1}{\mathrm{i}z} = \frac{2}{\mathrm{i}}\frac{1}{bz^2+2az+b}.$$

Zadaný integrál je roven integrálu funkce $F(z)$ přes jednotkovou kružnici, který vypočítáme pomocí reziduové věty. Funkce $F(z)$ má singularity v kořenech polynomu $bz^2+2az+b$ tj. v bodech

$$z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \qquad z_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Z podmínky $a > b > 0$ plyne, že $|z_1| < 1$ a $|z_2| > 1$. Nás zajímají pouze singularita ležící uvnitř jednotkového kruhu, tj. bod z_1, který je jednonásobným pólem funkce $F(z)$. Podle reziduové věty máme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{z_1} \frac{2}{\mathrm{i}b(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{4\pi}{b(z_1-z_2)} =$$
$$= \frac{4\pi}{b} \cdot \frac{1}{\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

(c) Integrály typu $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\mathrm{i}x}\ \mathrm{d}x$, $R(x)$ je racionální funkce.

V této části se budeme zabývat integrací funkce $R(x)e^{\mathrm{i}x}$, kde R je racionální funkce s reálnými koeficienty nemající póly na reálné ose s limitou $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$. Integrály tohoto typu jsou důležité pro Fourierovu transformaci a reprezentují dva integrály ze součinu racionální a goniometrické funkce:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\mathrm{i}x}\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\ \mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\ \mathrm{d}x.$$

Pro výpočet těchto integrálů se používá podobný postup jako v odstavci (a). Jenom dokázat, že integrál přes horní polokružnici K_r se zvětšujícím se poloměrem konverguje k nule je složitější. To je obsahem následujícího Jordanova lemmatu.

Tvrzení 7.1. *Nechť K_r je polokružnice $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Předpokládejme, že $f(z)$ je spojitá funkce definovaná na průniku okolí nekonečna a horní poloroviny. Označíme*

$$M(r) = \max_{z\in K_r} |f(z)|.$$

Jestliže $\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$, *pak* $\lim_{r\to\infty} \int_{K_r} f(z)e^{\mathrm{i}z}\ \mathrm{d}z = 0$.

Důkaz. Pomocí parametrizace polokružnice K_r: $\varphi_r(t) = re^{\mathrm{i}t}, t \in \langle 0, \pi\rangle$ vyjádříme křivkový integrál

$$\int_{K_r} f(z)e^{\mathrm{i}z}\ \mathrm{d}z = \int_0^{\pi} f(re^{\mathrm{i}t})e^{\mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}} \cdot \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}\ \mathrm{d}t.$$

Protože $|f(z)| \leq M(r)$ na K_r můžeme odhadnout

$$\left|\int_{K_r} f(z)e^{\mathrm{i}z}\ \mathrm{d}z\right| \leq rM(r) \cdot \int_0^{\pi} |e^{\mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}}|\ \mathrm{d}t. \tag{7.6}$$

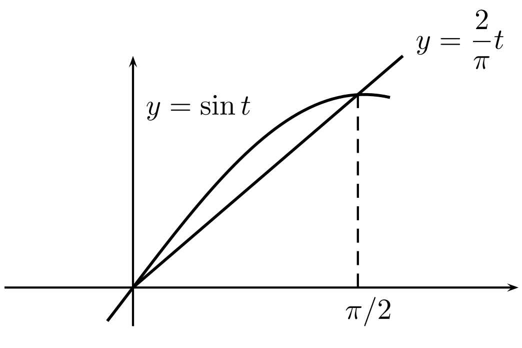
Dále, $\left|e^{\mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}}\right| = e^{-r\sin t}$, a tak

$$\left|\int_{K_r} f(z)e^{\mathrm{i}z}\ \mathrm{d}z\right| \leq rM(r) \cdot \int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\ \mathrm{d}t.$$

Podrobněji se nyní podíváme na integrál vpravo. Pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ platí nerovnost

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t.$$

Tato nerovnost je důsledkem konkávnosti funkce sin na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ (viz obr. 7.4).



Obr. 7.4.

Díky symetrii funkce sinus vzhledem k bodu $\frac{\pi}{2}$ také máme, že

$$\int_0^{\pi} e^{-r \sin t}\ \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin t}\ \mathrm{d}t.$$

Skutečně, pro každé $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ platí

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right).$$

Tedy

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-r \sin t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin(\frac{\pi}{2}+t)}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin(\frac{\pi}{2}-t)}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin t}\ \mathrm{d}t.$$

(V poslední rovnosti jsme použili substituci $u = \frac{\pi}{2} - t$.) Platí tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin t}\ \mathrm{d}t \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \frac{2}{\pi} t}\ \mathrm{d}t < 2 \int_0^{\infty} e^{-r \frac{2}{\pi} t}\, dt =$$

$$= 2 \frac{1}{\frac{2}{\pi} r} = \frac{\pi}{r}.$$

Vrátíme-li se k nerovnosti (7.6) máme

$$\left| \int_{K_r} f(z) e^{\mathrm{i}z}\ \mathrm{d}z \right| \leq r M(r) \frac{\pi}{r} = \pi M(r).$$

Jelikož podle předpokladu $\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$, je též

$$\lim_{r\to\infty} \int_{K_r} f(z) e^{\mathrm{i}z}\ \mathrm{d}z = 0.$$

$\square$

Pro racionální funkci $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ s reálnými koeficienty a $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$ máme podle Jordanova lemmatu

$$\lim_{r\to\infty} \int_{K_r} R(z) e^{\mathrm{i}z}\ \mathrm{d}z = 0.$$

Dále je možno postupovat zcela stejně jako v případu **(a)** a odvodit

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\substack{\{z|Q(z)=0\\ \operatorname{Im} z>0\}}} \operatorname{res}_z R(z)e^{\mathrm{i}z}. \tag{7.7}$$

Příklad 7.5. Určeme integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$. Jedná se o integrál výše uvedeného typu pro $R(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$. Podle (7.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{2\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2+4} = 2\pi\mathrm{i}\frac{e^{-2}}{2\cdot 2\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2}e^{-2}.$$

Přechodem k reálné části daného integrálu máme

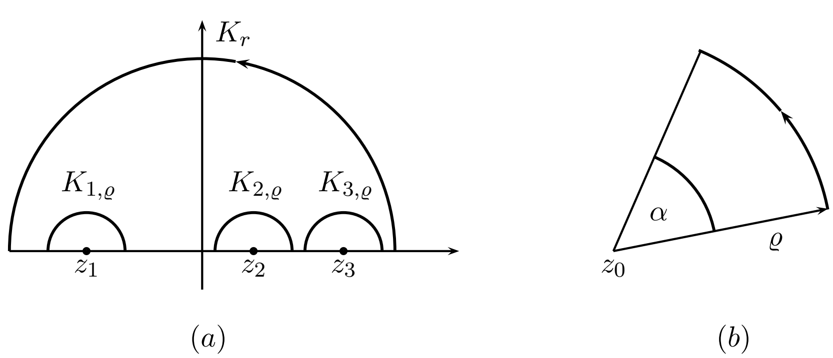
$$\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}x}}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}e^{-2}.$$

(d) Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\,\mathrm{d}x$ (resp. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\,\mathrm{d}x$).

V této části se budeme zabývat integrály výše uvedeného typu, kde $R(z)$ je racionální funkce s reálnými koeficienty a $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$, mající jednoduché póly na reálné ose a to pouze v nulových bodech funkce $\cos x$ (resp. $\sin x$). Postup výpočtu si ukážeme na integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\,\mathrm{d}x$. Označme $z_1, z_2, \ldots, z_k$ póly funkce f ležící na reálné ose. Podle předpokladu jsou to celočíselné násobky π. Výpočet integrálu spočívá v integraci funkce

$$f(z) = R(z)e^{\mathrm{i}z}$$

přes křivku $C_{r,\varrho}$ skládající se z úseček, polokružnic $K_{1,\varrho}, K_{2,\varrho}, \ldots K_{k,\varrho}$ a polokružnice K_r tak, jak je to znázorněno na obr. 7.5 (a) (případ k=3).



Obr. 7.5.

Poté se určí limita integrálů pro poloměry $r \to \infty$, $\varrho \to 0+$ přes všechny použité polokružnice. Podle Jordanova lemmatu je $\lim_{r\to\infty} \int\limits_{K_r} R(z)e^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z = 0$. Zbývá určit, k čemu se blíží křivkové integrály přes polokružnice obcházející póly na reálné ose. Argument, který použijeme, má obecnou platnost, a proto jej uvedeme jako samostatné tvrzení.

Tvrzení 7.2. *Předpokládejme, že funkce $f(z)$ má jednoduchý pól v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť C je oblouk kružnice o středu z_0 a poloměru ϱ parametrizovaný funkcí*

$$\varphi(t) = z_0 + \varrho e^{\mathrm{i}t} \qquad t \in \langle \varphi, \varphi + \alpha \rangle,$$

kde $0 \le \varphi < \varphi + \alpha < 2\pi$, viz obr 7.5(b). Pak

$$\lim_{\varrho\to 0+} \int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\alpha \operatorname{res}_{z_0} f(z).$$

Důkaz. Skutečnost, že f má v bodě z_0 jednoduchý pól znamená, že $f(z)$ je možno vyjádřit ve tvaru

$$f(z) = \frac{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}{z - z_0} + g(z),$$

kde g je funkce holomorfní v okolí bodu z_0. Je tedy

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_C \frac{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \int\limits_C g(z)\,\mathrm{d}z. \tag{7.8}$$

Přitom

$$\int\limits_C \frac{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\varphi}^{\varphi+\alpha} \frac{\operatorname{res}_{z_0} f(z)}{\varrho e^{\mathrm{i}t}} \cdot \mathrm{i}\varrho e^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i} \operatorname{res}_{z_0} f(z) \int\limits_{\varphi}^{\varphi+\alpha} \mathrm{d}t = \mathrm{i}\alpha \operatorname{res}_{z_0} f(z).$$

Funkce g je holomorfní v z_0 a tedy omezená v jistém okolí bodu z_0. Pro $\varrho \to 0+$ však délka křivky C konverguje k nule. Máme tak

$$\left| \int\limits_C g(z)\,\mathrm{d}z \right| \le \alpha\varrho \cdot \max_C |g(z)| \to 0, \qquad \text{pro } \varrho \to 0+.$$

Celkově tak dostáváme

$$\lim_{\varrho\to 0+} \int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\alpha \operatorname{res}_{z_0} f(z).$$

$\square$

Pomocí Tvrzení 7.2 můžeme nyní odvodit, že integrály přes polokružnice o poloměru ϱ mají limitu

$$\lim_{\varrho\to 0+} \int\limits_{K_{i,\varrho}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\pi \operatorname{res}_{z_i} f(z), \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Zvolme nyní poloměr r tak velký a poloměr ϱ tak malý, že všechny singulární body funkce $R(z)e^{\mathrm{i}z}$ s kladnou imaginární částí leží ve vnitřku křivky $C_{r,\varrho}$. Podle reziduové věty platí

$$\int_{C_{r,\varrho}} R(z)e^{\mathrm{i}z}\ \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{\{z|\operatorname{Im} z>0,\\ z \text{ je pól } R(z)\}}} \operatorname{res}_z R(z)e^{\mathrm{i}z}. \tag{7.9}$$

Limitními přechody $r \to \infty$, a $\varrho \to 0+$ se pravá strana této identity nezmění. Imaginární část levé strany má limitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\ \mathrm{d}x - \operatorname{Im}\left(\mathrm{i}\pi \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} R(z)e^{\mathrm{i}z}\right).$$

Závěrem tedy máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\ \mathrm{d}x = \operatorname{Im}\Bigg(2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{\{z|\operatorname{Im} z>0,\\ z \text{ je pól } R(z)\}}} \operatorname{res}_z R(z)e^{\mathrm{i}z} + \mathrm{i}\pi \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} R(z)e^{\mathrm{i}z}\Bigg). \tag{7.10}$$

Podobně získáme i druhý integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\ \mathrm{d}x = \operatorname{Re}\Bigg(2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{\{z|\operatorname{Im} z>0,\\ z \text{ je pól } R(z)\}}} \operatorname{res}_z R(z)e^{\mathrm{i}z} + \mathrm{i}\pi \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} R(z)e^{\mathrm{i}z}\Bigg). \tag{7.11}$$

Příklad 7.6. Vypočteme integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$. Tento integrál je speciálním případem výše probíraného typu pro racionální funkci $R(z) = 1/z$ mající jednoduchý pól v bodě 0. Podle vztahu (7.10) je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(\mathrm{i}\pi \operatorname{res}_0 \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}\right) = \operatorname{Im}(\mathrm{i}\pi e^0) = \pi.$$

4 Výpočet součtu řad pomocí reziduové věty

V předchozí části jsme viděli, že reziduová věta je často nepostradatelným pomocníkem při výpočtu určitých integrálů. Stejně efektivně ji lze použít i pro hledání součtu řad. Uvedeme si dva ze základních typů příkladů.

(a) Součet typu $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$.

V této části budeme předpokládat, že $f(z)$ je funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ vyjma konečně mnoha singularit $z_1, z_2, \dots z_k \in \mathbb{C}$ a to vesměs typu pól. Dále předpokládejme, že funkce f neroste v nekonečnu příliš rychle do nekonečna,

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0.$$

Budeme hledat součet nekonečné řady

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq z_1,z_2,\dots,z_k}}^{\infty} f(n). \tag{7.12}$$

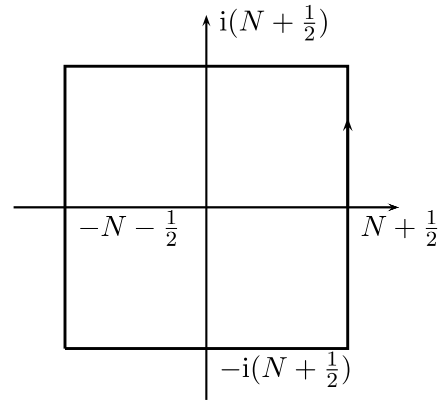
Základní myšlenka postupu je získat částečné součty hledané řady jako součet reziduí vhodně zvolené funkce. K tomuto účelu potřebujeme funkci mající jednotková rezidua ve všech celých číslech. Takovouto funkcí je funkce např. $\pi \operatorname{cotg} \pi z$. Ta má jednoduché póly v celých číslech, přičemž

$$\operatorname{res}_n(\pi \operatorname{cotg} \pi z) = 1, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Pro celé číslo n, které není singularitou funkce f je tedy

$$\operatorname{res}_n f(z)\pi \operatorname{cotg} \pi z = f(n), \tag{7.13}$$

viz (6.10). Nechť C_N je kladně orientovaný obvod čtverce o středu v bodě 0 a velikosti strany $2N+1$, $N \in \mathbb{N}$ (viz obr. 7.6).



Obr. 7.6.

Přirozené číslo N můžeme volit tak velké, že uvnitř křivky C_N se nacházejí všechny singularity funkce $f(z)$. Podle reziduové věty a (7.13) je

$$\int_{C_N} f(z)\pi \operatorname{cotg} \pi z \,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\Bigg(\sum_{\substack{n=-N \\ n\neq z_1,z_2,\dots,z_k}}^{N} f(n) + \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i}(f(z)\pi \operatorname{cotg} \pi z)\Bigg). \tag{7.14}$$

Teď ukážeme, že

$$\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} f(z)\pi \operatorname{cotg} \pi z \;\; \mathrm{d}z = 0. \tag{7.15}$$

Jakmile to budeme vědět, limitní přechod $N \to \infty$ pak umožní spočítat hledaný součet řady (7.12) a současně s tímto se zdůvodní, že zkoumaná řada konverguje.

Obraťme tedy pozornost k (7.15). Křivka C_N se vyhýbá pólům funkce $\pi \operatorname{cotg} \pi z$. Máme tedy šanci ukázat, že $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ je funkce omezená na C_N konstantou nezávislou na velikosti N. Ukážeme, že

$$|\operatorname{cotg} \pi z| < \frac{2}{1-e^{-\pi}} \qquad \text{na každé křivce } C_N. \tag{7.16}$$

Uvažujme body $z = x + \mathrm{i}y$ na pravé svislé straně čtverce C_N, tj.

$$x = N + \frac{1}{2}, \qquad y \in \Big\langle -N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \Big\rangle.$$

Pak

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} \pi z &= \mathrm{i}\frac{e^{2\pi \mathrm{i} z} + 1}{e^{2\pi \mathrm{i} z} - 1} = \mathrm{i}\frac{e^{2\pi \mathrm{i}(N+\frac{1}{2})} e^{-2\pi y} + 1}{e^{2\pi \mathrm{i}(N+\frac{1}{2})} e^{-2\pi y} - 1} = \\ &= \mathrm{i}\frac{e^{\pi \mathrm{i} - 2\pi y} + 1}{e^{\pi \mathrm{i} - 2\pi y} - 1} = \mathrm{i}\frac{1 - e^{-2\pi y}}{-e^{-2\pi y} - 1}. \end{aligned}$$

V důsledku toho

$$|\operatorname{cotg} \pi z| = \frac{|1 - e^{-2\pi y}|}{1 + e^{-2\pi y}} < 1.$$

Podobně pro body $z = x + \mathrm{i}y$ na horní straně čtverce C_N, tj.

$$y = N + \frac{1}{2}, \qquad x \in \Big\langle -N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2} \Big\rangle,$$

dostaneme

$$|\operatorname{cotg} \pi z| \leq \frac{1 + e^{-\pi(2N+1)}}{1 - e^{-\pi(2N+1)}} < \frac{2}{1 - e^{-\pi}}.$$

Díky symetrii funkce $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ (lichost), pak platí odhal (7.16) na celé množině C_N. Máme tak

$$\left| \int_{C_N} f(z) \operatorname{cotg} \pi z \,\mathrm{d}z \right| \leq \text{délka}(C_N) \frac{2}{1 - e^{-\pi}} \max_{z \in C_N} |f(z)|. \tag{7.17}$$

Jelikož $\text{délka}(C_N) = 8N + 4$, dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_N} f(z) \operatorname{cotg} \pi z \,\mathrm{d}z \right| &\leq (8N+4) \frac{2}{1 - e^{-\pi}} \max_{z \in C_N} |f(z)| = \frac{2(8N+4)}{1 - e^{-\pi}} \max_{z \in C_N} \frac{|zf(z)|}{|z|} \leq \\ &\leq \frac{2(8N+4)}{(1 - e^{-\pi})(N + \frac{1}{2})} \max_{|z| > N} |zf(z)| \to 0 \quad \text{pro } N \to \infty, \end{aligned}$$

neboť $\lim_{z \to \infty} zf(z) = 0$. Provedeme-li v (7.14) limitu $N \to \infty$ dostaneme konečný vztah

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq z_1, z_2, \ldots, z_k}}^{\infty} f(n) = -\sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} (f(z) \pi \operatorname{cotg} \pi z). \tag{7.18}$$

Uvedený postup můžeme použít, je-li například $f(z)$ racionální funkce, když stupeň jmenovatale je alespoň o dvě větší než stupeň čitatele.

Příklad 7.7. Nalezněte metodou reziduí součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Tento součet je roven

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty, \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Můžeme tedy použít předchozí postup pro funkci $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Díky vztahu (7.18) máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{res}_0 \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^2}.$$

Z Laurentovy řady (viz řešená úloha v Kapitole 5)

$$\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} - \cdots$$

vidíme, že

$$\operatorname{res}_0 \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^2} = -\frac{\pi^2}{3}.$$

Proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(b) Součty typu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n)$

Budeme předpokládat, že funkce f splňuje stejné předpoklady jako v předchozí části (a). Stejně tak převezmeme i značení, protože postup při výpočtu je podobný. Potřebujeme pouze najít funkci, jejíž reziduum v bodě $n \in \mathbb{Z}$ má hodnotu $(-1)^n$. Takovouto funkcí je např. funkce $\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$. Skutečně, podle Tvrzení 6.6 je

$$\operatorname{res}_n \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{\cos \pi n} = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\frac{1}{\sin^2 z} = 1 + \operatorname{cotg}^2 z,$$

vyplývá ze (7.16) rovněž uniformní omezenost funkce $\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ na křivkách C_N. Aplikací předchozího postupu tak získáme

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq z_1, z_2, \ldots z_n}}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} \left(f(z) \frac{\pi}{\sin \pi z} \right). \tag{7.19}$$

Příklad 7.8. Určeme součet $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Všimneme si, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2} \sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ a použijeme předchozí metodu pro funkci $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Podle (7.19) je

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\operatorname{res}_0 \frac{\pi}{z^2 \sin \pi z}.$$

Bod 0 je trojnásobným pólem funkce $\frac{\pi}{z^2 \sin \pi z}$. Jemu odpovídající reziduum můžeme získat například z Laurentova rozvoje funkce $1/(\sin \pi z)$ Částečným vydělením dostaneme

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{\pi z}{6} + \frac{7\pi^3 z^3}{360} + \cdots$$

Odtud

$$\frac{\pi}{z^2 \sin \pi z} = \frac{1}{z^3} + \frac{\pi^2}{6z} + \frac{7\pi^4 z}{360} + \cdots . \tag{7.20}$$

Reziduum je tedy rovno $\frac{\pi^2}{6}$ a závěrem máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

5 Cvičení

Úloha: Vypočtěte křivkový integrál $\int\limits_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\,\mathrm{d}z$, kde C je křivka daná parametrizací $\varphi(t) = 2 + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{2}, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešení: Funkce $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ má ve vnitřku křivky C singularitu v bodě 2, a to pól druhého řádu. Přitom

$$\operatorname{res}_2 \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} = \lim_{z\to 2} \left(\frac{z}{z-1}\right)' = \lim_{z\to 2} \frac{-1}{(z-1)^2} = -1.$$

Podle reziduové věty je

$$\int\limits_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}.$$

Úloha: Vypočtěte $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-3)(z^{10}-1)}\,\mathrm{d}z$, kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v bodě 0 a poloměrem 2.

Řešení: Uvnitř kružnice se nachází deset jednoduchých pólů funkce $f(z)$. Z početního hlediska je však výhodnější vypočítat rezidua v singularitách, které leží ve vnější oblasti křivky C, tj. v bodech 3 a ∞. Podle (7.1) totiž platí

$$\sum_{\{z|z^{10}=1\}} \operatorname{res}_z f(z) = -\operatorname{res}_3 f(z) - \operatorname{res}_\infty f(z).$$

Přitom $\operatorname{res}_\infty f(z) = 0$ podle výsledku (6.15) a $\operatorname{res}_3 f(z) = \dfrac{1}{3^{10}-1}$. Závěrem tedy získáváme

$$\int_C \frac{1}{(z-3)(z^{10}-1)}\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\frac{1}{3^{10}-1}.$$

Úloha: Vypočtěte $\displaystyle\int_C \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}\,\mathrm{d}z$, kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 1$.

Řešení: Uvnitř křivky C má daná funkce pouze singularitu v bodě 0 a to pól druhého řádu. Reziduum v tomto bodě je vhodnější počítat technikou rozvoje v Laurentovu řadu. Jelikož

$$\sin z(1-\cos z) = \frac{z^3}{2} - \frac{z^5}{8} + \cdots,$$

získáme několik prvních členů Laurentova rozvoje algoritmem dělení

$$\begin{array}{ll}
z & : \left(\dfrac{z^3}{2} - \dfrac{z^5}{8}\cdots\right) = \dfrac{2}{z^2} + \dfrac{1}{2} + \cdots \\
-\left(z - \dfrac{z^3}{4} + \cdots\right) & \\
\quad\dfrac{z^3}{4} + \cdots & \\
\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

Protože člen s mocninou z^{-1} chybí, je reziduum nulové. Odtud

$$\int_C \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Úloha: Jaké možné hodnoty může nabývat křivkový integrál $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n(1-z)}\,\mathrm{d}z, n \in \mathbb{N}$, kde C je jednoduchá uzavřená křivka neprocházející body 0 a 1.

Řešení: Funkce f má v bodě 0 n-násobný pól a bodě 1 jednonásobný pól. Přitom

$$\frac{1}{z^n(1-z)} = \frac{1}{z^n}\left(1+z+z^2+\cdots\right) = \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots \qquad |z|<1,$$

což znamená, že $\operatorname{res}_0 \dfrac{1}{z^n(1-z)} = 1$. V případě jednonásobného pólu 1 máme $\operatorname{res}_1 \dfrac{1}{z^n(1-z)} = -1$. Podle reziduové věty jsou možné hodnoty integrálů:

a) 0, neobsahuje-li C ve svém vnitřku ani bod 0 ani bod 1.

b) $2\pi\mathrm{i}$, obsahuje-li C ve svém vnitřku bod 0 a nikoliv 1.

c) $-2\pi\mathrm{i}$ obsahuje-li C ve svém vnitřku bod 1 a nikoliv 0.

d) 0, obsahuje-li C ve svém vnitřku oba body 0 a 1. V tomto případě je totiž

$$\int_C \frac{1}{z^n(1-z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(1-1) = 0.$$

Vidíme tedy, že zadaný integrál nabývá hodnot $0, 2\pi\mathrm{i}, -2\pi\mathrm{i}$.

Úloha: Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^4}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Podle (7.4) musíme určit rezidua v singularitách funkce $\dfrac{1}{z^4+4}$ ležících v horní polorovině. Jedná se o body $z_1 = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ a $z_2 = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$. Vzorec pro výpočet rezidua v jednoduchém pólu dá

$$\operatorname{res}_{z_i} \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z_i^3}, \qquad i = 1,2.$$

Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{4\sqrt{8}}\left(\frac{1}{z_1^3}+\frac{1}{z_2^3}\right) = \frac{\pi\mathrm{i}}{2\sqrt{8}}\left(e^{-\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} + e^{-\frac{9\mathrm{i}\pi}{4}}\right) = \frac{\pi\mathrm{i}}{2\sqrt{8}}\left(e^{-\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{8}} 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Úloha: Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x$, kde $a>0$.

Řešení: Protože integrovaná funkce je sudá, převedeme výpočet na integraci přes celou reálnou osu

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+a^4}$ má v horní polorovině dva jednoduché póly $z_1 = ae^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ a $z_2 = ae^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$. Přitom

$$\operatorname{res}_{z_i} \frac{z^2}{z^4+a^4} = \frac{z_i^2}{4z_i^3} = \frac{1}{4z_i}.$$

Odtud

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2a}.$$

Závěrem,

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}\pi}{4a}.$$

Úloha: Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2a\cos x + a^2}, a \in \mathbb{R}, |a| < 1.$

Řešení: Použijeme metody popsané v odstavci **(b)**. (Integrál z periodické funkce je přes všechny intervaly délky periody stejný.) Tím dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2a\cos x+a^2} = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{1-2a\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)+a^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}z},$$

kde C je jednotková kladně orientovaná ružnice se středem v počátku. Dalšími výpočty dostaneme

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1-2a\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)+a^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}z} = \frac{1}{\mathrm{i}}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{-az^2+(a^2+1)z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\mathrm{i}}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{-a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}.$$

Integrovaná funkce má uvnitř jednotkového kruhu singularitu v bodě a (jednoduchý pól). Podle reziduové věty máme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2a\cos x+a^2} = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\mathrm{i}}\operatorname{res}_a \frac{1}{-a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)} = 2\pi\frac{1}{-a\left(a-\frac{1}{a}\right)} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

Úloha: Nalezněte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x, a > 0.$

Řešení: Použijeme (7.7) pro $R(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left(2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{a\mathrm{i}} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2+a^2}\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi\mathrm{i}\frac{e^{-a}}{2a\mathrm{i}}\right) = \pi\frac{e^{-a}}{a}.$$

Úloha: Vypočtěte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Tento integrál je možno vypočítat podle vztahu (7.11), kde $R(z) = \dfrac{1}{(z-\frac{\pi}{2})(z-\frac{3\pi}{2})}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left(\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z-\frac{\pi}{2})(z-\frac{3\pi}{2})} + \pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z-\frac{\pi}{2})(z-\frac{3\pi}{2})}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\pi\mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{-\pi} + \pi\mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}}{\pi}\right) = \operatorname{Re}\left(-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} + \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\right) = 2.$$

Úloha: Nalezněte součet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Řešení:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2}.$$

Přitom podle (7.18) je

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} &= -\operatorname{res}_{\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z^2+1}\pi\operatorname{cotg}\pi z\right) - \operatorname{res}_{-\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z^2+1}\pi\operatorname{cotg}\pi z\right) = \\ &= -\frac{\pi\operatorname{cotg}(\pi\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} - \frac{\pi\operatorname{cotg}(-\pi\mathrm{i})}{-2\mathrm{i}} = -\frac{\pi\operatorname{cotg}(\pi\mathrm{i})}{\mathrm{i}} = \\ &= \pi\operatorname{cotgh}\pi.\end{aligned}$$

Závěrem tedy dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\pi\operatorname{cotgh}\pi - \frac{1}{2}.$$

Úloha: Stanovte součet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$.

Řešení: Dle (7.19) je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=-\frac{1}{2}\operatorname{res}_0\frac{\pi}{z^4\sin\pi z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{7\pi^4}{360}=$$
$$=-\frac{7}{720}\pi^4.$$

(Při stanovení rezidua jsme použili rozvoje (7.20).)

1. Pomocí reziduové věty spočtěte následující integrály:
   (a) $\int_C \frac{z^2}{z^4+1}\,\mathrm{d}z$, kde křivka C je dána parametrizací $z=1+e^{\mathrm{i}t}, t\in\langle 0,2\pi\rangle$.
   (b) $\int_C \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$, kde křivka C je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku a poloměrem 3.
   (c) $\int_C \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z$, kde křivka C je dána parametrizací $z=1+\cos t+\mathrm{i}\sin t, t\in\langle 0,2\pi\rangle$.
   (d) $\int_C \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2}\,\mathrm{d}z$, kde křivka C je kladně orientovaná asteroida daná parametrizací $z=2\cos^3 t+2\mathrm{i}\sin^3 t, t\in\langle 0,2\pi\rangle$
   (e) $\int_C \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\,\mathrm{d}z$, $n\in\mathbb{N}$, kde křivka C kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v počátku a $|a|<1<|b|$.
   (f) $\int_C \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z$, kde křivka C kladně orientovaná elipsa o rovnici $x^2-xy+y^2+x+y=0$.
   (g) $\int_C \frac{1}{(z^2-1)(z^3-1)}\,\mathrm{d}z$, kde křivka C libovolná kladně orientovaná kružnice se středem v počátku s poloměrem nerovnajícím se jedné.
   (h) $\int_C \sin^2\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$, kde křivka C libovolná kladně orientovaná kružnice se středem v počátku.
   (ch) $\int_C \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{1+z}\,\mathrm{d}z$, kde křivka C kladně orientovaná kružnice se středem v počátku a poloměrem dva.

2. Pomocí reziduové věty spočtěte následující integrály:
   (a) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x \;\; a>0$

(e) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}\,\mathrm{d}x \;\; a,b>0.$

(g) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \;\; n\in\mathbb{N}.$

(h) $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{\pi} \frac{1}{13+12\sin x}\,\mathrm{d}x$

(ch) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{a+\cos x}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{a^2-2a\cos x+1}\,\mathrm{d}x \;\; |a|\neq 1$

(j) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+r^2}\,\mathrm{d}x \;\; a,r>0$

(k) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \;\; a>0$

(l) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x \;\; b>0.$

(n) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x-\pi)}\,\mathrm{d}x$

3. Pomocí metody reziduí nalezněte následující součty:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$

Výsledky.

1. a) $\frac{\pi \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$ b) $2\pi \mathrm{i}$ c) $\frac{-\pi \mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{3\pi \mathrm{i}}{64}$ e) $(-1)^{n-1} 2\pi (2n-2)!$ f) $\frac{\pi(\mathrm{i}-1)}{2\sqrt{2}}$ g) 0 h) 0 ch) $-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}$
2. a) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\pi}{8}$ c) $\pi\sqrt{2}$ d) $\frac{3\pi}{8a^5}$ e) $\frac{\pi}{8}$ f) $\frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}$ g) $(2n-2)! \frac{\pi}{2^{n-2}((n-1)!)^2}$ h) $\frac{2\pi}{5}$ ch) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$
i) $\frac{2\pi \mathrm{sgn}(|a|-1)}{a^2-1}$ j) πe^{-ar} k) $\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}(\cos(\frac{a}{\sqrt{2}}) + \sin(\frac{a}{\sqrt{2}}))$ l) $\frac{3\pi}{8}$ m) $\frac{\pi(1-e^{-|ab|})}{2b^2 \mathrm{sgn} a}$ n) -2
3. a) $\frac{1}{2} \operatorname{cotgh} 2\pi$ b) $\frac{2\pi^6}{945}$ c) $\frac{\pi}{\sinh \pi}$

Příloha A

Funkce $\Gamma(z)$

1 Úvod

Jednou z nejdůležitějších funkcí, které se v matematice a jejích aplikacích používají je nesporně funkce $\Gamma(z)$. Její důležitost se vyrovná exponenciální funkci i funkcím goniometrickým. Jednou z původních motivací pro její zavedení byla analýza růstu posloupnosti faktoriálů přirozených čísel. Zatímco pro součet prvních n přirozených čísel máme velice jednoduchou formuli

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

součin prvních n přirozených čísel takovéto přehledné vyjádření nemá. Například je jasné, že posloupnost faktoriálů není možno vyjádřit jako posloupnost hodnot jistého polynomu v přirozených číslech neboť faktoriály mají podstatně rychlejší růst než jakýkoliv polynom. Snaha nalézt holomorfní funkci (tj. „polynom s nekonečným stupněm“), která by v přirozených číslech měla hodnotu rovnou jejich faktoriálům vedla ke studiu funkce Γ. Hlavní zakladatelem teorie této funkce byl Leonhard Euler (1707–1783), který v roce 1729 dospěl k vyjádření funkce $\Gamma(z)$ pomocí nekonečného součinu. Cílem tohoto dodatku bude definovat funkci Γ na maximální možné podmnožině komplexních čísel a odvodit její základní vlastnosti. Funkci Γ budeme definovat ve dvou krocích. Nejdříve ji vyjádříme pro $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z > 0$ pomocí tradičního integrálního vzorce. Poté ji rozšíříme na celou komplexní rovinu vyjma množiny záporných celých čísel $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\}$.

2 Funkce $\Gamma(z)$ a její základní vlastnosti

Definice A.1. *Funkce* $\Gamma(z)$ *je komplexní funkce definovaná pro* z *splňující* $\operatorname{Re} z > 0$ *předpisem*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x. \tag{A.1}$$

Poznámka A.1. Funkce $\Gamma(z)$ je dána jako nevlastní integrál z komplexní funkce reálné proměnné, který závisí na parametru z. Mocninu x^{z-1} pro $x > 0$ přitom definujeme jako hodnotu exponenciální funkce $e^{(z-1)\ln x}$. Pokud je tedy z reálné je reálná i hodnota $\Gamma(z)$.

U každého integrálu z neomezené funkce na neomezené množině se musíme přesvědčit o jeho existenci. U integrálu v (A.1) je podstatné podívat se na chování integrované funkce v okolí nekonečna a okolí nuly. (Rozmyslete si, že například $\lim_{x\to 0+} e^{-x}x^{z-1} = \infty$ pro $z \in (0,1)$!) Podívejme se nejdříve na existenci integrálu $\int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}\,\mathrm{d}x$. Pro absolutní hodnotu integrované funkce platí:

$$|e^{-x}x^{z-1}| = |e^{-x}e^{(z-1)\ln x}| = e^{-x}x^{\operatorname{Re} z-1}.$$

Protože $\int_1^\infty e^{-x}x^{\operatorname{Re} z-1}\,\mathrm{d}x < \infty$, existuje i integrál $\int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}\,\mathrm{d}x$, a to dokonce pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Zbývá ověřit existenci integrálu $\int_0^1 e^{-x}x^{z-1}\,\mathrm{d}x$. Na intervalu $(0,1)$ jsou hodnoty exponenciální funkce e^{-x} mezi nulou a jedničkou. Pro $x \in (0,1)$ tedy můžeme psát

$$|e^{-x}x^{z-1}| \le x^{\operatorname{Re} z-1},$$

což vede k nerovnosti

$$\int_0^1 |e^{-x}x^{z-1}|\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^{\operatorname{Re} z-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}\right]_0^1 = \frac{1}{\operatorname{Re} z} < \infty \text{ pro } \operatorname{Re} z > 0.$$

Vidíme tedy, že integrál definující funkci Γ skutečně existuje pro všechna z s kladnou reálnou částí. Předpoklad $\operatorname{Re} z > 0$ je přitom podstatný. Podívejme se na případ $z = 0$. Pak

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Zatímco druhý sčítanec je konvergentní integrál, u prvního máme

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \ge e^{-1}\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = e^{-1}\,[\ln x]_0^1 = \infty.$$

Jinými slovy $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$

Příklad A.1. Spočítáme hodnoty $\Gamma(1)$ a $\Gamma(\frac{1}{2})$. Podle $(A.1)$ je

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

V posledním integrálu provedeme substituci $x = t^2$, čímž ho převedeme na integrál

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty e^{-t^2}(t^2)^{-\frac{1}{2}}2t\ \mathrm{d}t =$$
$$= 2\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

Poslední integrál, který jsme dostali, je známý Laplaceův integrál, se kterým se čtenář již setkal v teorii funkcí více proměnných.

Jedním z nejdůležitějších rysů funkce Γ je následující vlastnost, která je typická pro faktoriály přirozených čísel.

Tvrzení A.1. *Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ s kladnou reálnou částí platí*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{A.2}$$

Důkaz. Tvrzení je jednoduchým důsledkem metody integrace per partes

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}x^z\ \mathrm{d}x = \left[-e^{-x}x^z\right]_0^\infty + \int\limits_0^\infty ze^{-x}x^{z-1}\ \mathrm{d}x. \tag{A.3}$$

Přitom

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}} e^{-x}x^z = 0,$$
$$\lim_{\substack{x\to 0+\\ x\in\mathbb{R}}} e^{-x}x^z = \lim_{\substack{x\to 0+\\ x\in\mathbb{R}}} e^{-x}e^{z\ln x} = 0.$$

Tím se (A.3) redukuje na vztah

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^\infty ze^{-x}x^{z-1}\ \mathrm{d}x = z\Gamma(z).$$

□

Důsledek A.1. *Pro každé $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ platí*

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Důkaz. Postupným použitím identity (A.2) dostaneme

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!.$$

□

Funkce Γ tady má v přirozeném čísle n hodnotu $(n-1)!$. Například platí

$$\int_0^\infty x^{100} e^{-x}\ \mathrm{d}x = \Gamma(101) = 100!$$

Kdo tento integrál takto rychle stanoví zná s největší pravděpodobností funkci Γ (anebo je geniální).

Příklad A.2. Určeme $\Gamma(\frac{5}{2})$. Podle rekurentního vztahu $(A.2)$ je

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

Podobným způsobem jsme schopni stanovit hodnotu funkce Γ pro jakoukoliv polovinu přirozeného čísla. Mimo tyto body a přirozená čísla se hodnota funkce Γ počítá numericky.

Hodnoty funkce Γ na kladné části reálné osy jsou vždy kladné neboť se jedná o integrály z kladných funkcí. Jak naznačuje obrázek A.1. je $\lim_{x\to\infty}\Gamma(x) = \infty = \lim_{x\to 0+}\Gamma(x)$. Tyto vlastnosti si zdůvodníme později. Minimum na kladné části reálné osy má funkce Γ přibližně v bodě $1,46$.

Graf funkce Γ na reální ose také napovídá, že tato funkce má derivaci. Dokážeme si, že funkce Γ je diferencovatelná i v komplexním oboru, tj. že je holomorfní funkce.

Věta A.1. (i) *Funkce* $f(z) = \int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}\ \mathrm{d}x$ *je holomorfní v* $\mathbb{C}$.

(ii) *Funkce* $g(z) = \int_0^1 e^{-x}x^{z-1}\ \mathrm{d}x$ *je holomorfní v polorovině* $\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} > 0\}$.

(iii) *Funkce* Γ *je holomorfní v polorovině* $\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

Důkaz. (i) Podle Poznámky A.1 víme, že funkce $f(z)$ je korektně definována v $\mathbb{C}$. Zvolme $r>1$ a definujme funkci

$$f_r(z) = \int_1^r e^{-x}x^{z-1}\ \mathrm{d}x.$$

Nejdříve ukážeme, že tato funkce je holomorfní v $\mathbb{C}$. Funkci e^{-x} je možno rozvinout v mocninnou řadu

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \qquad x\in\mathbb{R},$$

která konverguje stejnoměrně na každé omezené množině, tedy i na intervalu $\langle 1, r\rangle$. Definujeme-li pro $N\in\mathbb{N}$ funkce

$$h_N(z) = \int_1^r \left(\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) x^{z-1}\ \mathrm{d}x, \qquad z\in\mathbb{C},$$

pak platí

$$
\begin{aligned}
|f_r(z) - h_N(z)| &= \left| \int_1^r \left(e^{-x} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) x^{z-1}\, \mathrm{d}x \right| \le \\
&\le \max_{x \in \langle 1, r \rangle} \left| e^{-x} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right| \cdot \int_1^r x^{\operatorname{Re} z - 1}\, \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

Zvolme nyní konstantu $L > 1$ a polorovinu $R_L = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < L\}$. Pro mocninu $x^{\operatorname{Re} z - 1}$ kde $x \in (1, r)$ a $z \in R_L$ platí

$$x^{\operatorname{Re} z - 1} \le r^{L-1}.$$

Tedy pro $z \in R_L$ je

$$\int_1^r x^{\operatorname{Re} z - 1}\, \mathrm{d}x \le r^{L-1}(r-1).$$

Dle (A.4) je potom

$$\max_{z \in R_L} |f_r(z) - h_N(z)| \le \max_{x \in \langle 1, r \rangle} \left| e^{-x} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right| \cdot r^{L-1}(r-1) \to 0 \quad \text{pro } N \to \infty.$$

Jinými slovy, posloupnost funkcí $(h_N(z))_N$ konverguje stejnoměrně k funkci $f_r(z)$ na R_L. Každá z funkcí $h_N(z)$ je ovšem holomorfní v $\mathbb{C}$ neboť je lineární kombinací funkcí

$$\int_1^r x^z\, \mathrm{d}z = \begin{cases} \frac{r^{z+1}-1}{z+1} & \text{je-li } z \ne -1 \\ \ln r & \text{je-li } z = -1. \end{cases}$$

Každá stejnoměrná limita holomorfních funkcí je holomorfní funkce. Funkce $f_r(z)$ je tedy holomorfní v každé polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < L\}$, a tedy i v celé komplexní rovině.

Nyní ukážeme, že funkce $f_r(z)$ konvergují pro $r \to \infty$ stejnoměrně na každé polorovině $R_L = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z < L\}$, kde $L > 1$, k funkci $f(z)$. Z toho již plyne, že $f(z)$ je holomorfní v celém $\mathbb{C}$. Funkce

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{z-1}$$

(jako funkce proměnné x) je omezená na $(0, \infty)$. Navíc pro $L > 1$ můžeme nalézt konstantu $K_L \ge 0$ tak, že

$$|e^{-\frac{x}{2}} x^{z-1}| \le K_L \qquad \text{pro všechna } x > 0 \text{ a } z \text{ s } \operatorname{Re} z < L.$$

Pak

$$
\begin{aligned}
|f(z) - f_r(z)| &= \left| \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\, \mathrm{d}x - \int_1^r e^{-x} x^{z-1}\, \mathrm{d}x \right| = \left| \int_r^\infty e^{-x} x^{z-1}\, \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_r^\infty e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{z-1}\, \mathrm{d}x \right| \le\le K_L \int_r^\infty e^{-\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x = K_L \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \right]_r^\infty \\
&= K_L \cdot 2e^{-\frac{r}{2}} \to 0 \quad \text{pro } r \to \infty.
\end{aligned}
$$

Platí tedy, že

$$\max_{z\in R_L} |f(z) - f_r(z)| \to 0 \qquad \text{pro } r \to \infty.$$

(ii) Schéma důkazu je stejné jako v předchozí části. Pro $0 < \varrho < 1$ definujme pomocnou funkci

$$g_\varrho(z) = \int_\varrho^1 e^{-x} x^{z-1}\,\mathrm{d}x \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

Nejdříve ukážeme, že $g_\varrho(z)$ je holomorfní v polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Opět využijeme možnosti aproximovat funkci e^{-x} částečnými součty Taylorova rozvoje a budeme definovat funkce

$$u_N(z) = \int_\varrho^1 \left(\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) x^{z-1}\,\mathrm{d}x \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

Pak

$$|g_\varrho(z) - u_N(z)| = \left|\int_\varrho^1 \left(e^{-x} - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) x^{z-1}\,\mathrm{d}x\right| \leq \tag{A.5}$$

$$\leq \max_{x\in\langle\varrho,1\rangle} \left|e^{-x} - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right| \cdot \int_\varrho^1 x^{\operatorname{Re} z-1}\,\mathrm{d}x.$$

Poslední člen v tomto odhadu je roven

$$\int_\varrho^1 x^{\operatorname{Re} z-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}\right]_\varrho^1 = \frac{1-\varrho^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}.$$

Předpokládejme nyní, že $\operatorname{Re} z > \varepsilon > 0$. Pak můžeme odhadnout

$$\varrho^{\operatorname{Re} z} \leq \varrho^\varepsilon$$

a tedy

$$\left|\int_\varrho^1 x^{\operatorname{Re} z-1}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1-\varrho^\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Odtud podle (A.5)

$$\max_{\{z\in\mathbb{C}\ \mid\ \operatorname{Re} z>\varepsilon\}} |g_\varrho(z) - u_N(z)| \leq \max_{x\in\langle\varrho,1\rangle} \left|e^{-x} - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right| \cdot \frac{1-\varrho^\varepsilon}{\varepsilon} \to 0 \text{ pro } N \to \infty.$$

Všechny funkce u_N jsou holomorfní z podobných důvodů jako v případě (i). Jelikož konvergují stejnoměrně pro $N \to \infty$ na polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \varepsilon\}$ k funkci $g_\varrho(z)$ pro každé $\varepsilon > 0$, je $g_\varrho(z)$ holomorfní v polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

Zbývá ukázat, že funkce $g_\varrho(z)$ konvergují na každé polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, stejnoměrně k funkci $g(z)$ pro $\varrho \to 0+$. Předpokládejme tedy, že $\operatorname{Re} z > \varepsilon > 0$. Pak

$$|g(z) - g_\varrho(z)| = \left| \int_0^1 e^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x - \int_\varrho^1 e^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_0^\varrho e^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^\varrho x^{\varepsilon-1} \, \mathrm{d}x = \frac{\varrho^\varepsilon}{\varepsilon} \to 0 \text{ pro } \varrho \to 0+ .$$

Vidíme tedy, že

$$\max_{\{z \mid \operatorname{Re} z > \varepsilon\}} |g(z) - g_\varrho(z)| \to 0 \text{ pro } \varrho \to 0+ .$$

Funkce g je proto holomorfní v každé polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} > \varepsilon\}$ a tedy i v polorovině $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

(iii) Funkce $\Gamma(z)$ je holomorfní v $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ neboť

$$\Gamma(z) = f(z) + g(z),$$

kde f a g jsou funkce holomorfní v $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ z bodů (i) a (ii). □

Nyní se budeme věnovat holomorfnímu rozšíření funkce Γ na větší množinu než je pravá polorovina. Z Poznámky A.1 vyplývá, že toto rozšíření nebude možno vyjádřit pomocí integrální formule (A.1). Ukážeme však, že rozšíření je možno nalézt kombinací nekonečné řady a integrálního vzorce. Nejdříve si tímto způsobem vyjádříme funkci Γ na pravé polorovině.

Věta A.2.

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x$$

pro všechna z *s* $\operatorname{Re} z > 0$.

Důkaz. Hlavní myšlenkou důkazu je vyjádřit integrál

$$\int_0^1 e^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x$$

pomocí součtu nekonečné řady, který získáme z mocninného rozvoje exponenciální funkce. Jak již víme z předchozích důkazů

$$e^{-x} x^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+z-1},$$

kde řada vpravo konverguje (v proměnné x s pevně zvoleným parametrem z) stejnoměrně na intervalu $\langle \varrho, 1\rangle$, kde $1 > \varrho > 0$. Řadu tak můžeme integrovat člen po členu a dostaneme (pro $\operatorname{Re} z > 0$)

$$\int_{\varrho}^{1} e^{-x} x^{z-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\varrho}^{1} x^{n+z-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}(1-\varrho^{n+z}) = \tag{A.6}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\varrho^{n+z}}{n+z}. \tag{A.7}$$

Pak pro z s $\operatorname{Re} z > \varepsilon > 0$ máme

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \varrho^{n+z} \frac{1}{z+n} \right| \le \varrho^{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n}{n!\varepsilon} = \frac{\varrho^{\varepsilon}}{\varepsilon} e^{\varrho} \to 0 \text{ pro } \varrho \to 0+\,.$$

Tímto

$$\int_{0}^{1} e^{-x} x^{z-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varrho\to 0+} \int_{\varrho}^{1} e^{-x} x^{z-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} - \lim_{\varrho\to 0+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \varrho^{n+z} \frac{1}{n+z} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$

Věta je dokázána. □

Věta A.2 umožní rozšířit funkci Γ na mnohem větší množinu než na jaké byla původně definována. Integrál $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{z-1}\,\mathrm{d}x$ existuje pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a definuje funkci holomorfní v $\mathbb{C}$. Následující tvrzení říká, že řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ je konvergentní všude, kde jsou její členy definovány.

Tvrzení A.2. *Nechť $\varepsilon > 0$. Řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

konverguje stejnoměrně pro každé $\varepsilon > 0$ v množině $K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid \min_{n=0,1,\dots} |z+n| \ge \varepsilon\}$. Funkce

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

je holomorfní v množině $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Důkaz. Množina K_ε je komplexní rovina s vyříznutými kruhy o poloměru ε se středy v bodech $0, -1, -2, \dots$. Pro $z \in K_\varepsilon$ je $|z+n| \ge \varepsilon$ pro všechna $n = 0, -1, \dots$. Můžeme tedy provést odhad

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \right| \le \frac{1}{\varepsilon} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Tímto jsme nalezli konvergentní číselnou majorantu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-1}$$

a podle Weierstrassova kritéria stejnoměrné konvergence je řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

stejnoměrně konvergentní na K_ε. Protože sčítance této řady jsou holomorfní funkce na K_ε je $f(z)$ holomorfní na každé množině K_ε, $\varepsilon > 0$, a tedy i na množině $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. $\square$

Předchozí výsledky umožní definici funkce Γ na množině $\mathbb{C} \setminus \{0, -1. -2, \ldots\}$.

Definice A.2. *Funkce* $\Gamma(z)$ *je funkce definovaná na množině* $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ *vztahem*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x. \tag{A.8}$$

V následující větě si shrneme základní vlastnosti funkce Γ včetně klasifikace jejích singularit.

Věta A.3. *Funkce* $\Gamma(z)$ *je holomorfní v množině* $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. *Body* $0, -1, -2, \ldots$ *jsou jednonásobné póly funkce* $\Gamma(z)$ *přičemž*

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

pro všechna $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Důkaz. Označme

$$f_1(z) = \int_1^{\infty} e^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x, \qquad f_2(z) = \int_0^{1} e^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x.$$

Podle Věty A.1 (1) je $f_1(z)$ holomorfní v $\mathbb{C}$ a podle Tvrzení A.2 je $f_2(z)$ holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2 \ldots\}$. Funkce

$$\Gamma(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

je tudíž holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2 \ldots\}$. Pro pevně zvolené $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ můžeme napsat

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!(k+z)} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x. \tag{A.9}$$

Řada $\displaystyle\sum_{\substack{n=0\\ n\neq k}} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ konverguje stejnoměrně na každé množině

$$\widetilde{K}_\varepsilon = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z+n| \geq \varepsilon \text{ pro všechna } n \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \setminus \{k\} \right\},$$

kde $\varepsilon > 0$ (viz Tvrzení A.2). Její součet je tedy funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ mimo nekladná celá čísla různá od $-k$. Vztah (A.9) můžeme interpretovat jako identitu

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!(k+z)} + w(z),$$

kde w je funkce holomorfní v K. Funkci $w(z)$ je možno v okolí bodu $-k$ rozvést v mocninnou řadu, která je regulární částí Laurentova rozvoje funkce Γ v $-k$. Hlavní část má pouze jeden člen:

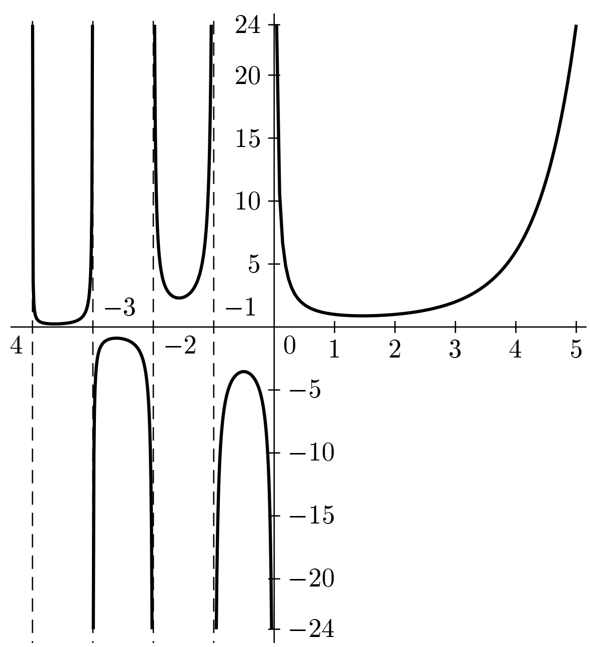
$$\frac{(-1)^k}{k!(k+z)}.$$

Odtud okamžitě vidíme, že $-k$ je jednonásobný pól s reziduem

$$\operatorname{res}_{-k}\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

$\square$

Funkce $\Gamma(z)$ má tedy v celých nekladných číslech limitu ∞. Dominantní člen v Laurentově rozvoji v těchto singularitách je $\dfrac{(-1)^n}{n!(n+z)}$. Na obr. A.1 je znázorněn graf funkce $\Gamma(z)$ pro reálné z.



A.1. Funkce $\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(Rozmyslete si, že pro reálná čísla je $\Gamma(z)$ vždy reálné!).

Podle Věty o jednoznačnosti pro holomorfní funkce (Důsledek 4.4) má funkce Γ původně definovaná pro $\operatorname{Re} z > 0$ jediné holomorfní rozšíření na oblast $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, které je maximální možné. Ve Tvrzení A.2 jsme ukázali, že pro z s $\operatorname{Re} z > 0$ platí

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Vzhledem k tomu, že $\Gamma(z)$ je funkce holomorfní v oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ je taková i funkce $\Gamma(z+1) - z\Gamma(z)$. Tato funkce je však nulová na pravé polorovině a opět podle jednoznačnosti holomorfních funkcí musí být nulová i v celé oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Důležitá „faktoriální“ vlastnost tedy platí i pro rozšíření funkce Γ.

Následující věta je východiskem pro definování dalších speciálních funkcí jako jsou například funkce Besselovy.

Věta A.4. $\Gamma(z) \neq 0$ *pro všechna* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. *Funkce*

$$H(z) = \begin{cases} 0 & z = , -1, -2, \ldots \\ \frac{1}{\Gamma(z)} & z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\} \end{cases}$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$.

Nejpodstatnější část této věty je skutečnost, že funkce Γ nemá žádné kořeny. Pak je již zřejmé z předchozích výsledků, že převrácená hodnota této funkce bude mít odstranitelné singularity v nekladných celých číslech, které se po rozšíření na holomorfní funkci v $\mathbb{C}$ stanou jednonásobnými kořeny.

Následují Stirlingův vzorec umožňuje odhadnout hodnoty funkce Γ pro kladná čísla.

Věta A.5. *Pro libovolné reálné číslo* $s > 0$ *je*

$$\Gamma(s+1) = \sqrt{2s}\, s^s e^{-s} \left(\sqrt{\pi} + \frac{\omega_s}{\sqrt{2s}} \right),$$

kde číslo ω_s *leží v intervalu* $\langle -1, 1 \rangle$.

Důkaz. Důkaz je založen na provedení substituce v integrálu definujícím funkci Γ, která převede tento integrál do tvaru, ze kterého je možno odvodit příslušný odhad.

Vyšetřujme nejdříve funkci $f(x) = x^s e^{-x}$, $x > 0$. Tato funkce je rostoucí v intervalu $(0, s)$ a klesající v intervalu (s, ∞). Limita v nule i v nekonečnu je nulová. V čísle s nabývá $f(x)$ svého maxima $f(s) = s^s e^{-s}$.

Dále budeme pracovat s funkcí $g(t) = s^s e^{-s} e^{-t^2}, t \in \mathbb{R}$. Tato funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty, 0)$ a klesající v intervalu $(0, \infty)$, přičemž $g(0) = s^s e^{-s}$ a limita funkce g v nekonečnech je nulová.

Porovnáme-li funkce f a g vidíme, že pro libovolné $t \in (-\infty, 0)$ je $g(t) \in (0, s^s e^{-s})$, a proto existuje jediné $x \in (0, s)$ tak, že $f(x) = g(t)$. Podobně ke každému $t \in (0, \infty)$ existuje jediné $x \in (s, \infty)$ tak, že $f(x) = g(t)$. Odtud vyplývá, že rovnicí

$$x^s e^{-x} = s^s e^{-s} e^{-t^2} \tag{A.10}$$

je definována jediná funkce $x = \varphi(t)$, že pro $t \in (-\infty, 0)$ je $\varphi(t) \in (0, s)$ a pro $t \in (0, \infty)$ je $\varphi(t) \in (s, \infty)$.

Do integrálu $\int_0^\infty x^s e^{-x}\, \mathrm{d}x$, kterým je definována hodnota $\Gamma(s+1)$, zavedeme substituci $x = \varphi(t)$. K tomu potřebujeme derivaci této funkce. Podle věty o implicitních funkcí je možno ukázat, že $\varphi(t)$ je diferencovatelná, přičemž

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2tx}{x - s}.$$

Derivaci ovšem nemůžeme spočítat neboť k tomu potřebujeme funkci φ. Postačí však odhad této derivace. Z (A.10) máme

$$t^2 = x - s - s \ln\left(\frac{x}{s}\right). \tag{A.11}$$

Odhadneme logaritmus vpravo. Pišme $x = s + z$. Podle Taylorovy věty, ve které napíšeme zbytek po druhém členu, je

$$\ln\left(\frac{x}{s}\right) = \ln\left(1 + \frac{z}{s}\right) = \frac{z}{s} - \frac{(\frac{z}{s})^2}{2(1 + \theta_s \frac{z}{s})^2},$$

kde $0 < \theta_s < 1$. Odtud a z (A.11)

$$t^2 = z - s\left(\frac{z}{s} - \frac{z^2}{2s^2\left(1 + \theta_s \frac{z}{s}\right)^2}\right) = \frac{sz^2}{2(s + \theta_s z)^2}.$$

Odtud postupně dostaneme

$$\frac{s}{z} + \theta_s = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{s}{2}}$$

a

$$\varphi'(t) = \frac{2tx}{x - s} = 2t\left(\frac{s}{z} + 1\right) = 2\left(\sqrt{\frac{s}{2}} + (1 - \theta_s)t\right).$$

Pak

$$\begin{aligned}
\Gamma(s+1) &= \int_0^\infty x^s e^{-x}\, \mathrm{d}x = \int_0^s x^s e^{-x}\, \mathrm{d}x + \int_s^\infty x^s e^{-x}\, \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^0 s^s e^{-s} e^{-t^2} 2\left(\sqrt{\frac{s}{2}} + (1 - \theta_s)t\right)\, \mathrm{d}t + \int_0^\infty s^s e^{-s} e^{-t^2} 2\left(\sqrt{\frac{s}{2}} + (1 - \theta_s)t\right)\, \mathrm{d}t \\
&= 2s^s e^{-s}\sqrt{\frac{s}{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\, \mathrm{d}t + 2s^s e^{-s} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}(1 - \theta_s)t\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

První integrál umíme spočítat neboť $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$. Druhý integrál odhadneme. Položme $\omega_s = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}(1 - \theta_s)t\, \mathrm{d}t$. Protože $0 < \theta_s < 1$ je

$$|\omega_s| \le -\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} t\, \mathrm{d}t + \int_0^\infty e^{-t^2} t\, \mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t\, \mathrm{d}t = 1.$$

Odtud již okamžitě vyplývá Stirlingova formule. □

Při různých kombinatorických úlohách se počítají faktoriály přirozených čísel. Jejich hodnotu lze odhadnout pomocí Stirlingova vzorce následovně:

Důsledek A.2. *Pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$n! = \sqrt{2n}\, n^n e^{-n} \left(\sqrt{\pi} + \frac{\omega_n}{\sqrt{2n}} \right),$$

kde $\omega_n \in \langle -1, 1 \rangle$.

Odtud například plyne, že

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Někdy se také píše

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Například pro $n = 1000$ nám Stirlingův vzorec řekne, že hodnota 1000! je v intervalu s koncovým body

$$\sqrt{2000}\, 1000^{1000} e^{-1000} \sqrt{\pi} \pm 1000^{1000} e^{-1000}.$$

Literatura

[1] J. Hamhalter, J. Tišer *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, skripta FEL ČVUT, 1999

[2] J. Hamhalter, J. Tišer *Integrální počet funkcí více proměnných*, skripta FEL ČVUT, 2000

Rejstřík