Vzorový test

1. Plánujeme navštívit n různých divadelních představení a k různých výstav. Každé divadelní představení i každou výstavu chceme navštívit právě jednou.
   (a) Kolik je možných pořadí návštěv, chceme-li všechna divadelní představení navštívit bezprostředně za sebou?
   (b) Kolik je možných pořadí návštěv, má-li za každým divadelním představením následovat výstava?

2. (a) Nalezněte nějakou bijekci $f\colon \langle -1,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \longrightarrow \langle -2,2\rangle \times \langle 0,1\rangle$.
   (b) Mějme množiny $A_1 = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, $A_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a $A_3 = \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$. Zjistěte, jaké prvky obsahují množiny $A_1 \cap A_2$ a $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

3. Na potenční množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ uvažujme relaci $\mathcal{R}$ definovanou: $(A,B) \in \mathcal{R}$ právě, když $A \setminus B = \emptyset$.
   (a) Je relace $\mathcal{R}$ antisymetrická?
   (b) Určete všechny množiny A, B, pro které platí $(A,B) \in \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$. Odpovědi zdůvodněte.

4. Mějme souvislý jednoduchý graf G, který má 22 hran a stupně vrcholů jsou všechny stejné. Kolik vrcholů může graf G mít?

5. (a) Zde se mohou vyskytovat příklady dvou typů. První z nich je formalizace výroků:
   - Označíme A, B, C výroky:
     A: „Student A udělal zkoušku.“
     B: „Student B udělal zkoušku.“
     C: „Student C udělal zkoušku.“

     Formalizujete následující výroky.
     Student A jako jediný udělal zkoušku.
     Právě jeden ze studentů A, B, C udělal zkoušku.
     Nejvýše jeden ze studentů A, B, C udělal zkoušku.
     Právě dva ze studentů A, B, Cudělali zkoušku.

   Druhý typ je aplikace rezoluční metody:
   - Rozhodněte pomocí rezoluční metody, zda platí

$$\{P \Leftrightarrow R,\ (\neg R \vee S) \Rightarrow P \vee Q,\ Q \vee S,\ S \Leftrightarrow \neg R\} \models Q.$$

(b) Definujte graf **strom** a nakreslete příklad grafu, který je strom a příklad grafu, který strom není. Ukažte, že ve stromě existuje mezi každými dvěma vrcholy právě jediná cesta.

Stručné řešení.

1. (a) V celé sérii $n+k$ návštěv má blok divadelních představení možných $k+1$ pozic. Proto počet pořadí je $N = (k+1)\, n!\, k!$.

   (b) Dvojice „divadelní představení + následná výstava“ budeme považovat za jeden objekt. Tím se nám původní série $n+k$ návštěv zkrátí na délku k. V ní vybereme n míst pro divadla, což je možné $\binom{k}{n}$ způsoby. Výsledek je tak $N = \binom{k}{n}\, n!\, k!$.

2. (a) $f(x, y) = (2x, y)$,
   (b) $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(1, 1, \dots)\}$.

3. (a) Podmínka $A \setminus B = \emptyset$ znamená totéž, co $A \subset B$. Proto je relace $\mathcal{R}$ antisymetrická.
   (b) $(A, B) \in \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ pro každé množiny $A, B \subset \mathbb{N}$, neboť $(A, \emptyset) \in \mathcal{R}^{-1}$ a $(\emptyset, B) \in \mathcal{R}$.

4. Označíme si n počet vrcholů a d stupeň vrcholů. Pak platí $nd = 44$. Číslo $44 = 2 \cdot 2 \cdot 11$. Máme tak následující možnosti pro hodnoty n, d.

$n = 1$	$d = 44$	nelze, neboť G je jednoduchý
$n = 2$	$d = 22$	nelze, neboť G je jednoduchý
$n = 4$	$d = 11$	nelze, neboť G je jednoduchý
$n = 22$	$d = 2$	lze
$n = 44$	$d = 1$	nelze, neboť G je souvislý

5. (a) Formalizace výroků:
   - $A \wedge \neg B \wedge \neg C$,
     $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$,
     $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$,
     $(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$.

   Rezoluční metoda:
   - Množina $\{\neg P \vee R,\ \neg R \vee P,\ R \vee P \vee Q,\ \neg S \vee P \vee Q,\ Q \vee S,\ \neg S \vee \neg R,\ R \vee S,\ \neg Q\}$ není splnitelná, proto je Q logický důsledek množiny formulí.

   (b) Strom je souvislý graf bez kružnic.
   Kdyby mezi dvěma vrcholy existovaly dvě různé cesty, nutně by spojení jejich částí vytvořilo kružnici, což ve stromě nelze.