

Ortogonalisace a ortogonální projekce

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 12.4
skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- ① Definice skalárního součinu v lineárních prostorech nad \mathbb{R} .
- ② Úplný popis skalárních součinů v prostoru \mathbb{R}^n .

Dnešní přednáška

- ① V této přednášce (a ve všech přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad \mathbb{R} .
- ② Ortogonalní báze a ortonormální báze.
- ③ Ortogonalní projekce. Ortogonalisace a ortonormalisace.

Příští přednáška

- ① Hlubší poznatky o ortogonálních projkcích.
- ② Metoda nejmenších čtverců.^a

^aBudeme se věnovat pouze nejjednodušší formě metody nejmenších čtverců v \mathbb{R}^n se standardním skalárním součinem. Vše je podrobně popsáno ve výtahu z příští přednášky. Viz také Dodatek C skript.



Připomenutí vlastností ortogonality (minulé přednášky)

Platí-li $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$, říkáme, že vektory \vec{x} a \vec{y} jsou **ortogonální** (také: **navzájem kolmé**).

① **Pozor:** nulový vektor \vec{o} je kolmý na každý vektor \vec{x} .

Obráceně: jestliže \vec{x} je kolmý na každý vektor, pak $\vec{x} = \vec{o}$.

② Abychom ukázali, že rovnost $\langle \vec{x} | \vec{v} \rangle = 0$ platí pro každý vektor \vec{v} ze $\text{span}(M)$, **stačí ukázat**, že všechny vektory \vec{m} z M platí rovnost $\langle \vec{x} | \vec{m} \rangle = 0$.

Speciální případ výše uvedeného je:^a

Ať $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ je báze lineárního podprostoru W lineárního prostoru L . Jestliže platí $\langle \vec{x} | \vec{b}_i \rangle = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, k$, potom platí $\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = 0$ pro všechny vektory \vec{w} z W .

^aTento speciální případ několikrát (bez dalších komentářů) v dnešní přednášce použijeme.

Tvrzení (lineární nezávislost ortogonální množiny vektorů)

Ať M je jakákoli množina **nenulových** vektorů s vlastností $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$ pro jakékoli různé vektory \vec{x}, \vec{y} z M .^a Pak M je lineárně nezávislá množina.

^aTakové množině říkáme **ortogonální množina**.

Důkaz.

Ať $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ je jakákoli konečná podmnožina M . Ať

$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i = \vec{o}$. Pro libovolné pevné $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$0 = \langle \vec{x}_{i_0} | \vec{o} \rangle = \langle \vec{x}_{i_0} | \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \langle \vec{x}_{i_0} | \vec{x}_i \rangle = a_{i_0} \cdot \langle \vec{x}_{i_0} | \vec{x}_{i_0} \rangle.$$

Protože $\vec{x}_{i_0} \neq \vec{o}$, platí $\langle \vec{x}_{i_0} | \vec{x}_{i_0} \rangle \neq 0$. Proto $a_{i_0} = 0$.



Několik sloganů

- ① Jestliže $\dim(L) = n$, potom každá ortogonální množina v L má nejvýše n prvků.

Slogan: v prostoru dimenze n může existovat maximálně n navzájem na sebe kolmých nenulových vektorů.

- ② Ortogonální množině v L , která tvoří bázi L , říkáme **ortogonální báze**.

Slogan:^a ortogonální báze je pravoúhlý souřadnicový systém.

- ③ Každou bázi $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ lze **normalisovat**: v bázi $(\frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|}, \dots, \frac{\vec{b}_n}{\|\vec{b}_n\|})$ mají všechny vektory normu 1.

Slogan: normální báze má jednotkové úseky na jednotlivých souřadnicových osách.

^a**Pozor:** jde jen o slogan. Víme, že například leckterý skalární součin v rovině může jako ortogonální vidět vektory, které „ve skutečnosti“ nesvírají pravý úhel.

Definice (ortonormální báze, čili normální a ortogonální báze)

Bázi $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ prostoru se skalárním součinem, která splňuje rovnost $\langle \vec{b}_i | \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij}$,^a říkáme **ortonormální**.

^aKroneckerův symbol δ splňuje: $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Poznámky

- ❶ Kanonická báze $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru \mathbb{R}^n je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.
- ❷ Pro jakoukoli bázi $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ prostoru \mathbb{R}^n existuje jednoznačně určený skalární součin, ve kterém je tato báze ortonormální (viz minulou přednášku).

Stejnou větu lze dokázat pro obecné prostory nad \mathbb{R} konečné dimenze. To dokazovat **nebudeme**.

- ❸ Ortonormální báze jsou důležité: umožňují „zpříjemnit“ řadu výpočtů. Viz dále.

Tvrzení (výpočet souřadnic v ortonormální bázi)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru se skalárním

součinem. Pak^a $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i$, čili $\text{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \langle \vec{b}_1 | \vec{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{b}_n | \vec{x} \rangle \end{pmatrix}$.

^aTato rovnost je konečně-dimensionální variantou rozvoje ve Fourierovu řadu.

Důkaz.

Definujeme: $\vec{y} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i$. Musíme ukázat: $\vec{y} = \vec{x}$.

Pro libovolné pevné $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{b}_{i_0} | \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_{i_0} | \vec{b}_i \rangle = \langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle.$$

Takže $\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} - \vec{y} \rangle = 0$, pro libovolné pevné $i_0 \in \{1, \dots, n\}$.

Kdyby $\vec{x} - \vec{y} \neq \vec{0}$, byla by $(n+1)$ -prvková množina nenulových vektorů $\{\vec{x} - \vec{y}, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ lineárně nezávislá.

To není možné: proto je $\vec{y} = \vec{x}$.



Důsledek (skalární součin v ortonormální bázi)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru se skalárním součinem. Pak platí:^a $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i | \vec{y} \rangle$.

^a Podle předchozího to znamená: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$, kde $\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{x}$ a $\mathbf{coord}_B(\vec{y}) = \mathbf{y}$. **Slogan:** skalární součin v ortonormální bázi se počítá jako standardní skalární součin souřadnic. Jde o konečně-dimensionální variantu **Parsevalovy rovnosti** z teorie Fourierových řad.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i \mid \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}_j | \vec{y} \rangle \cdot \vec{b}_j \right\rangle = \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_j | \vec{y} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i | \vec{b}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_j | \vec{y} \rangle \cdot \delta_{ij} = \\ &\sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i | \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$



Poznámka pro ty, kteří chtějí vidět souvislosti (nepovinné)

Předchozí dvě tvrzení (výpočet souřadnic v ortonormální bázi a výpočet skalárního součinu v ortonormální bázi) jsou pouhou instancí toho, že pro ortonormální bázi $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ prostoru L tvoří seznam

$$B^* = (\langle \vec{b}_1 | - \rangle, \dots, \langle \vec{b}_n | - \rangle)$$

bázi duálního prostoru L^* , která je **duální bází** k bázi B .

Více se lze dozvědět v kapitole 3.5 **skript**.

Zde se objevují výhody Diracovy (také: bra-ket) notace pro skalární součin. Ve fyzice se vektor \vec{x} často píše jako $|\vec{x}\rangle$ (čteme: **ket** \vec{x}).

Příslušný kovektor se píše jako $\langle \vec{x}|$ (čteme: **bra** \vec{x}). Skalární součin $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ je pak aplikací kovektoru $\langle \vec{x}|$ na vektor $|\vec{y}\rangle$. Tudiž $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ je **bra-ket^a** \vec{x} a \vec{y} .

^aSamozřejmě: bra-ket je jazyková hříčka, správně by mělo být **bracket**.

Další důsledek (úhly vektoru se souřadnicovými osami)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru se skalárním součinem. Ať vektor \vec{x} je **nenulový**. Potom pro úhel φ_{i_0} , který vektor \vec{x} svírá se souřadnicovou osou \vec{b}_{i_0} , platí rovnost^a

$$\cos \varphi_{i_0} = \frac{\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|}. \text{ Navíc platí } \sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i = 1.$$

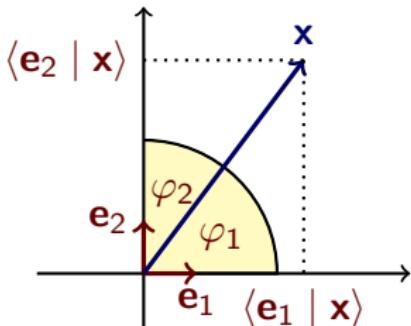
^a**Všimněme si:** tvrdíme, že $\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle$, tj. i_0 -tá souřadnice vektoru \vec{x} vzhledem k bázi B , se počítá jako součin $\|\vec{x}\| \cdot \cos \varphi_{i_0}$. To je zobecnění známého faktu z elementární geometrie roviny (viz další stranu).

Důkaz.

Protože $\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle = \underbrace{\|\vec{b}_{i_0}\|}_{=1} \cdot \|\vec{x}\| \cdot \cos \varphi_{i_0}$, platí $\cos \varphi_{i_0} = \frac{\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|}$.

Dále: $\sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|^2} = 1.$ ■

Předchozí tvrzení v rovině s ortonormální bází $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$



$$\cos \varphi_1 = \frac{\text{orientovaná délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}} = \frac{\langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\text{orientovaná délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}} = \frac{\langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \text{ čili } \cos \varphi_2 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) = \sin \varphi_1$$

$$\text{Tudíž } \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 = \cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 = 1.$$

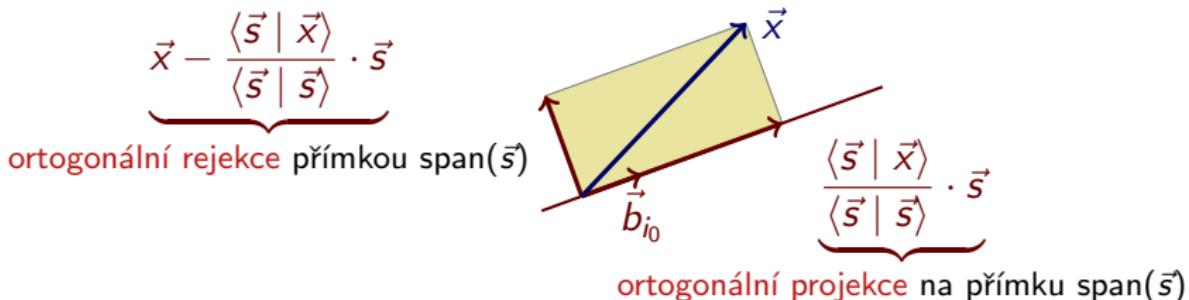
Projekce na přímku a rejekce přímkomu

Ať \vec{s} je nenulový vektor v prostoru se skalárním součinem. Potom pro každý vektor \vec{x} platí:

- ① Vektor $\frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s}$ leží na přímce $\text{span}(\vec{s})$.
- ② Vektor $\vec{x} - \frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s}$ je kolmý na přímku $\text{span}(\vec{s})$.

$$\langle \vec{s} | \vec{x} - \frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s} \rangle = \langle \vec{s} | \vec{x} \rangle - \frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \langle \vec{s} | \vec{s} \rangle = 0$$

Dostáváme tedy **ortogonální rozklad^a** vektoru \vec{x} :



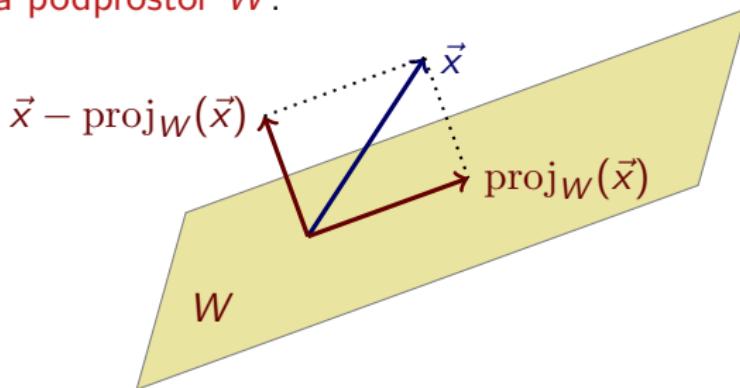
^aSlovník: **projekce**=promítnutí, **rejekce**=odmítnutí.



Zobecnění: projekce na podprostor a rejekce podprostorem

Ať W je podprostor lineárního prostoru L se skalárním součinem, ať \vec{x} je libovolný vektor v L .

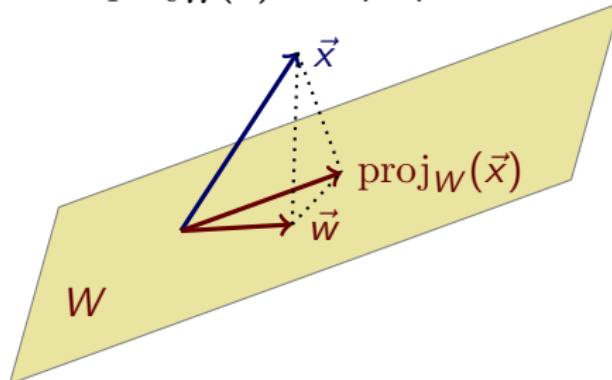
Vektoru $\text{proj}_W(\vec{x})$, který leží ve W a pro který je $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$ kolmý na všechny vektory z W , říkáme **ortogonální projekce vektoru \vec{x} na podprostor W** .



Vektoru $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$ budeme říkat **ortogonální rejekce vektoru \vec{x} podprostorem W** a budeme jej značit $\text{rej}_W(\vec{x})$.

Ortogonální rejekce je „nejkratší“ ze všech rejekcí

Pro jakýkoli vektor \vec{x} , který neleží ve W , a pro jakýkoli vektor \vec{w} , který ve W leží, vzniká pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $\text{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}$ a $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$, a s přeponou $\vec{x} - \vec{w}$.



Díky Pythagorově větě tedy pro všechny vektory \vec{w} z W platí^a

$$\|\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})\|^2 \leq \|\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})\|^2 + \underbrace{\|\text{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}\|^2}_{\geq 0} = \|\vec{x} - \vec{w}\|^2$$

^aNa této nerovnosti je založena metoda nejmenších čtverců, viz cvičení a příští přednáška, nebo Dodatek C skript.



Věta (ortogonální projekce na podprostor s ortogonální bází)

Ať $M = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ je konečná neprázdná ortogonální množina vektorů. Označme $W = \text{span}(M)$. Pro libovolný vektor \vec{x} platí

$$\text{proj}_W(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i \quad (\text{tj. } \text{proj}_W(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k \text{proj}_{\text{span}(\vec{u}_i)}(\vec{x}))$$

ortogonální projekce vektoru \vec{x} na podprostor W .

Důkaz.

Evidentně: $\text{proj}_W(\vec{x})$ leží ve W .

Pro každé $i_0 = 1, \dots, k$ platí $\langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x}) \rangle = 0$, protože:

$$\langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} \rangle - \langle \vec{u}_{i_0} | \text{proj}_W(\vec{x}) \rangle =$$

$$\langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} \rangle - \langle \vec{u}_{i_0} | \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i \rangle =$$

$$\langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} \rangle - \sum_{i=0}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{u}_i \rangle = \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} \rangle - \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} \rangle = 0.$$



Ortogonalisační proces (Gram-Schmidt)

Každou bázi $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ prostoru se skalárním součinem lze převést na bázi $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ s následujícími vlastnostmi:

- ① C je **ortogonální**, tj $\langle \vec{c}_i | \vec{c}_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$.
- ② Pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí
 $\text{span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\} = \text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$.

Důkaz.

Definujeme^a

$$\vec{c}_1 := \vec{b}_1, \quad \vec{c}_{k+1} := \underbrace{\vec{b}_{k+1} - \text{proj}_{\text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}}(\vec{b}_{k+1})}_{\text{rejekce vektoru } \vec{b}_{k+1} \text{ podprostorem } \text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}}$$

Díky definici je splněno $\text{span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\} = \text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$, pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$.

První podmínka je splněna z definice ortogonální rejekce. ■

^a**Slogan:** Gram-Schmidt je posloupnost postupných ortogonálních rejekcí.



Poznámka (ortonormalisační proces)

Pokud je $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ ortogonální báze^a prostoru L , je seznam $(\frac{\vec{c}_1}{\|\vec{c}_1\|}, \dots, \frac{\vec{c}_n}{\|\vec{c}_n\|})$ **ortonormální** báze prostoru L (tj je ortogonální a norma každého prvku je 1):

$$\left\langle \frac{\vec{c}_i}{\|\vec{c}_i\|} \mid \frac{\vec{c}_j}{\|\vec{c}_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{c}_i\| \cdot \|\vec{c}_j\|} \cdot \langle \vec{c}_i \mid \vec{c}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Každou konečnou bázi B v prostoru se skalárním součinem tedy lze ortonormalisovat:

- ① Nejprve provedeme Gram-Schmidtův ortogonalisační proces na bázi B . Dostaneme ortogonální bázi C .
- ② Ortogonální bázi C znormalisujeme výše uvedeným postupem.

^aEvidentně pro každé i platí $\|\vec{c}_i\| \neq 0$, protože C je báze.

Příklad (ortogonalisace vektorů — Gram-Schmidt)

Vektory $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou lineárně

nezávislé v \mathbb{R}^4 . Příslušnou bázi $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ podprostoru W dimenze 3 označíme B .

Báze B není ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v \mathbb{R}^4 . Bázi B nyní ortogonalisujeme. Výsledné vektory v nové (ortogonální) bázi označíme $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Budeme postupovat Gram-Schmidtovou metodou.

① První vektor: $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad (pokrač.)

② Druhý vektor: spočteme

$$\mathbf{b}_2 - \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{c}_1\}}(\mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Užitečný trik: protože skalární násobek nemění ortogonalitu,

$$\text{položíme } \mathbf{c}_2 = 4 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tím se zbavíme pozdějších nepříjemných výpočtů se zlomky.

Příklad (pokrač.)

③ Třetí vektor: spočteme

$$\mathbf{b}_3 - \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}}(\mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Opět se zbavíme zlomků: } \mathbf{c}_3 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Výpočet je u konce: seznam $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ je hledaná ortogonální báze.

Příklad (normalisace ortogonální báze)

Normalisace ortogonální báze $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ podprostoru W v prostoru \mathbb{R}^4 se standardním skalárním součinem je tvořena vektory

$$\frac{\mathbf{c}_1}{\|\mathbf{c}_1\|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{c}_2}{\|\mathbf{c}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{c}_3}{\|\mathbf{c}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Projekce na podprostor, u kterého neznáme ortogonální bází

- ① V obecném případě je vždy možno nejprve obecnou bázi ortogonalisovat (Gram-Schmidt) a poté použít vzorec pro projekci na podprostor s ortogonální bází.
- ② V případě \mathbb{R}^n lze využít znalosti metrického tensoru, viz další přednášku.