Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení řádně zdůvodněte. Dodržujte a ve svém řešení vyznačte dělení jednotlivých úloh na podúlohy.

Část A (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

1. Ať $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ je lineárně nezávislý seznam vektorů v lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, ať $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ je libovolný vektor. Obecně *neplatí* tvrzení:

   (A) $\mathbf{p} \in \mathsf{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

   (B) Vektor $\mathbf{p}$ lze zaměnit za jeden z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, a vytvořit tak novou bázi $\mathbb{R}^3$.

   (C) Ať $\mathbf{A}$ je matice se sloupci $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Pak má soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{p}$ řešení.

   (D) Ať $\mathbf{A}$ je matice se sloupci $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Pak $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

2. Ať W je lineární kód nad $\mathbb{Z}_3$ dimense 4 a délky 5. Potom *nutně* platí:

   (A) W obsahuje přesně $(3 \cdot 4)^5$ kódových slov.

   (B) W obsahuje přesně 3^4 kódových slov.

   (C) W obsahuje přesně 4^3 kódových slov.

   (D) O počtu kódových slov ve W nelze rozhodnout.

3. Jsou zadány reálné matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, kde matice $\mathbf{B}$ je regulární a součin matic $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ je definován. Potom *nutně* platí:

   (A) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ je regulární matice.

   (B) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

   (C) $\operatorname{rank}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$.

   (D) $\operatorname{rank}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}) + \operatorname{rank}(\mathbf{B})$.

4. Ať L_1, L_2 a L_3 jsou lineární prostory konečné dimense. Ať lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ a $\mathbf{g} : L_2 \to L_3$ jsou monomorfismy. Potom *nutně* platí:

   (A) Prostory L_1, L_2 a L_3 mají stejnou dimensi.

   (B) Zobrazení $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$ je epimorfismus.

   (C) Zobrazení $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$ je isomorfismus.

   (D) Zobrazení $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$ je monomorfismus.

Část B (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

Pečlivě definujte pojem *skalární součin* v obecném lineárním prostoru L nad $\mathbb{R}$. (Pojmy *lineární prostor* a *lineární zobrazení* definovat nemusíte.)

Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: *Ať $\langle - \mid - \rangle$ je skalární součin v lineárním prostoru L nad $\mathbb{R}$, ať a je pevné (ale libovolné) reálné číslo. Potom i přiřazení $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto a \cdot \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ je skalární součin v L.*
Poznámka: důkaz není nutné psát celými větami (je ale nutné jej zapsat přehledně), případný protipříklad je nutné zapsat detailně.

Část C (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

Označte jako M lineární prostor nad $\mathbb{R}$ všech reálných matic rozměrů 2×2. Je zadán funkční předpis

$$\mathbf{f} : M \to M, \qquad \text{kde } \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ pro všechna } \mathbf{X} \text{ z } M$$

1. (max. zisk 6 bodů) Ukažte, že $\mathbf{f} : M \to M$ je lineární zobrazení.
2. (max. zisk 14 bodů) Spočtěte $\operatorname{im}(\mathbf{f})$ a $\operatorname{rank}(\mathbf{f})$.

Poznámka: k výpočtům je *nutné* podat komentář.