

Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení řádně zdůvodněte. Dodržujte a ve svém řešení vyznačte dělení jednotlivých úloh na podúlohy.

**Část A** (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

1. Pro reálné čtvercové regulární matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  typu  $n \times n$  *nemusí nutně platit* následující rovnost:

(a)  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})))$ .

(b)  $\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E}_n$ .

(c)  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ .

(d)  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

2. Ať  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  je lineárně nezávislý seznam vektorů v lineárním prostoru  $\mathbb{R}^3$  nad  $\mathbb{R}$ , a uvažujme vektor  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ . Obecně *neplatí* tvrzení:

(a) Vektor  $\mathbf{p}$  lze zaměnit za jeden z vektorů  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ , a vytvořit tak novou bázi  $\mathbb{R}^3$ .

(b)  $\mathbf{p} \in \text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ .

(c) Ať  $\mathbf{A}$  je matice se sloupci  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ . Pak má soustava  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{p}$  řešení.

(d) Ať  $\mathbf{A}$  je matice se sloupci  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ . Pak  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ .

3. Je dáno lineární zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a v  $\mathbb{R}^3$  tři různé vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  takové, že  $\mathbf{f}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{o}$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{o}$  a  $\mathbf{f}(\mathbf{v}_3) = \mathbf{o}$ . Hodnost zobrazení  $\mathbf{f}$  *nemůže být*

(a) 3,

(b) 2,

(c) 1,

(d) 0.

4. Ať má soustava lineárních rovnic  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  nad  $\mathbb{R}$  právě jedno řešení. Potom *nutně* platí:

(a) pokud je matice  $\mathbf{A}$  čtvercová, pak má nulový determinant,

(b) matice  $\mathbf{A}$  nemůže mít více řádků než sloupců,

(c) matice  $\mathbf{A}$  nemá více sloupců než řádků,

(d) vektor  $\mathbf{b}$  nemůže být lineární kombinací sloupců matice  $\mathbf{A}$ .

**Část B** (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

1. Definujte pojmy: *konečná lineárně nezávislá množina vektorů* a *dimenze lineárního prostoru*. Žádné další pojmy definovat nemusíte.

2. Ať  $L$  je lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ ,  $\dim(L) = n$ . Ať  $M = \{\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_n\}$  je množina vektorů z  $L$ . Dokažte, že  $M$  je lineárně nezávislá množina právě tehdy, když  $\text{span}(M) = L$ .

**Část C** (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručně zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

V prostoru  $\mathbb{R}^4$  nad  $\mathbb{R}$  jsou zadány afinní podprostory

$$\pi = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \text{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{w}}\right) \quad \pi' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \text{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{w}'}\right)$$

Určete vzájemnou polohu  $\pi$  a  $\pi'$  a průnik  $\pi \cap \pi'$ .