

# Lineární zobrazení

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.1, 2.2 a 4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

## Minulé přednášky

- 1 Báze lineárního prostoru a souřadnice vektoru vzhledem ke konečné uspořádané bázi.

## Dnešní přednáška

- 1 Lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  zobecňuje zobrazení  $\vec{x} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{x})$ , dané konečnou uspořádanou bází  $B$ .
- 2 Zavedeme pojem **matice lineárního zobrazení** z  $\mathbb{F}^s$  do  $\mathbb{F}^r$  (vzhledem ke kanonickým bázím).

## Velmi důležité připomenutí

Vektory z prostoru  $\mathbb{F}^n$  píšeme jako sloupce.

## Definice (lineární zobrazení)

At'  $L_1, L_2$  jsou lineární prostory nad  $\mathbb{F}$ . Zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ , pro které platí  $\mathbf{f}(\vec{x} + \vec{x}') = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{x}')$  a  $\mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$  pro vš.  $a$  z  $\mathbb{F}$ , pro vš.  $\vec{x}, \vec{x}'$  z  $L_1$ , říkáme **lineární zobrazení** z  $L_1$  do  $L_2$ .

## Příklady

- At'  $L$  má uspořádanou bázi  $B$  o  $n$  prvcích. Zobrazení  $\text{coord}_B : L \rightarrow \mathbb{F}^n$  je lineární (minulá přednáška).
- Řada dalších...

## Poznámka (princip superposice)

$\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$  je lineární právě tehdy, když platí rovnost

$$\mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{f}(\vec{x}_i)$$

pro vš.  $a_i$  z  $\mathbb{F}$  a vš.  $\vec{x}_i$  z  $L_1$ .

## Tvrzení (základní algebraické vlastnosti lineárních zobrazení)

- 1 Složení lineárních zobrazení je lineární. Identita je lineární zobrazení.
- 2 Jsou-li  $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$  a  $\mathbf{g} : L_1 \longrightarrow L_2$  lineární zobrazení, pak i zobrazení
  - 1  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  je lineární, kde  $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\vec{x}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{g}(\vec{x})$ .
  - 2  $a \cdot \mathbf{f}$  je lineární ( $a$  je skalár z  $\mathbb{F}$ ), kde  $(a \cdot \mathbf{f})(\vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$ .

## Důkaz.

Přednáška. ■

## Důsledek (lineární prostor lineárních zobrazení)

Pro pevné lineární prostory  $L_1$  a  $L_2$  nad  $\mathbb{F}$  je množina všech lineárních zobrazení z  $L_1$  do  $L_2$  lineární prostor nad  $\mathbb{F}$ . Tento prostor značíme  $\text{Lin}(L_1, L_2)$ .

## Věta (lineární zobrazení je určeno hodnotami na bázi)

Ať  $B$  je báze<sup>a</sup> lineárního prostoru  $L_1$ , ať  $L_2$  je libovolný lineární prostor. Pak zadat

① **libovolné** zobrazení  $h : B \rightarrow L_2$ ,

je totéž jako zadat

② **lineární** zobrazení  $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ .

---

<sup>a</sup>Připomenutí (téma 3A): **každý** lineární prostor má bázi.

### Důkaz.

Pro prostory konečné dimenze: princip superposice.

Pro obecné prostory: mírně složitější. ■

**Příklad (popis libovolného lineárního zobrazení  $f : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ )**

Připomenutí:  $K_s = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s)$  je kanonická báze prostoru  $\mathbb{F}^s$ .

Zadat lineární zobrazení  $f : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$  znamená zadat seznam  $s$  (ne nutně různých) hodnot

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix}, \dots, f(\mathbf{e}_s) = \mathbf{a}_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ a_{3s} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{pmatrix}$$

v lineárním prostoru  $\mathbb{F}^r$ .

Tomuto seznamu říkáme **matice** (o  $r$  řádcích a  $s$  sloupcích).

## Definice (matice)

**Matice  $\mathbf{A}$**  nad  $\mathbb{F}$  o  $r$  řádcích a  $s$  sloupcích je tabulka<sup>a</sup>

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}$$

<sup>a</sup>Budeme také používat **položkový zápis**  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,s}$  nebo **sloupcový zápis**  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ .

**Nebudeme používat:** matice typu  $r \times s$ , rozměrů  $r \times s$ , atd., případně **ještě horší značení**  $n \times m$ . (Nebo  $m \times n$ ?) 🙄

## Poznámka

**Matici  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$**  o  $r$  řádcích a  $s$  sloupcích **budeme ztotožňovat** s lineárním zobrazením

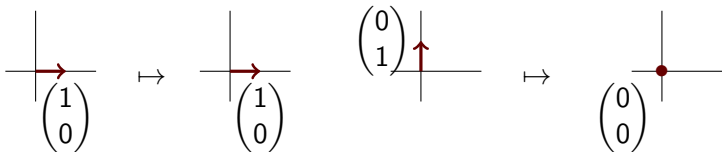
$$\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \dots, s$$

z prostoru  $\mathbb{F}^s$  do prostoru  $\mathbb{F}^r$ , a budeme psát  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ .

## Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$ )

Kanonická báze  $K_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  v  $\mathbb{R}^2$ . Matice některých lineárních zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$  (vzhledem ke  $K_2$ ) jsou:

- 1 Projekce na osu  $x$  je ztotožněna s maticí  $\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .



Analogicky: projekce na osu  $y$  je ztotožněna s maticí

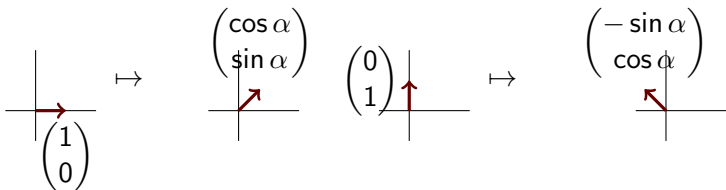
$$\mathbf{P}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



## Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$ , pokrač.)

- 2 **Rotace** (o úhel  $\alpha$ ) je ztotožněna s maticí

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$



- 3 **Změna měřítka** ( $a \neq 0$  a  $b \neq 0$ ) je ztotožněna s maticí  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ . Pro  $a = 1$ ,  $b = -1$  dostaneme **reflexi**:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

## Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$ , pokrač.)

- 4 Zkosení<sup>a</sup> (také: **shear**) je ztotožněno s maticí

$$S_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

---

<sup>a</sup>Speciální typy zkosení (nad obecným tělesem) budou hrát důležitou roli při řešení soustav rovnic.

## Co už nyní víme?

Například diagram

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{P}_x} \mathbb{R}^2$$

znamená následující: **nejprve** otočte o úhel  $\alpha$ , **potom** proveďte projekci na osu  $x$ .

Značit se to musí  $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{R}_\alpha$  (jde o **skládání** lineárních zobrazení). Co ale „násobení tabulek“ znamená? Odpověď: **jde o novou matici**.

Jak novou matici najít?

$$\mathbf{e}_j \mapsto j\text{-tý sloupec matice } \mathbf{R}_\alpha \mapsto ???$$

- 1 Násobení (skládání) matic: **příští přednáška** (téma 4B).
- 2 Zbytek dnešní přednášky: **jak obecná matice  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  „zachází“ s obecným vektorem z prostoru  $\mathbb{F}^s$ ?**

## Tvrzení (výpočet hodnoty matice $\mathbf{A}$ v obecném vektoru $\mathbf{x}$ )

Pro matici  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  se sloupcovým zápisem  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$  a pro

vektor  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$  platí

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$$

### Důkaz.

Protože  $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j$ , tak  $\mathbf{A} : \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$ . ■

## Značení (násobení matice vektorem)

Vektor  $\sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$  značíme  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ .

Příklad (rotace vektoru v  $\mathbb{R}^2$ )

Rotace (o úhel  $\alpha$ ):  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ . Potom součin

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dává **výsledek otočení vektoru**  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  o úhel  $\alpha$ .

Například pro  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

## Poznámka (další význam zápisu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ )

Zápis  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  pro  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^s$ , kóduje **hodnotu** lineárního zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$  v bodě  $\mathbf{x}$ .

Zvolme **pevné**  $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^r$ . Hledejme **všetchna**  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^s$  taková, že  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Na tento problém se lze dívat dvěma způsoby:

- 1 Hledáme **vzor** bodu  $\mathbf{b}$  při lineárním zobrazení  $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ .
- 2 Řešíme **soustavu lineárních rovnic**.

Počet sloupců matice  $\mathbf{A}$  je počet neznámých, počet řádků matice  $\mathbf{A}$  je počet rovnic v soustavě.

## Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ je } \begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$