Odpovídejte celou větou (na každou otázku) a každé své tvrzení řádně zdůvodněte. Dodržujte a ve svém řešení vyznačte dělení jednotlivých úloh na podúlohy.

Část A (max. zisk 20 bodů) Odpovězte jen tabulkou s číslem otázky a písmenem označujícím Vaši odpověď. Každá otázka má pouze jednu správnou odpověď. Za správnou odpověď je +5 bodů, za nevyplněnou odpověď 0 bodů a za nesprávně vyplněnou odpověď -2 body. Pokud je celkový součet bodů v části A záporný, je tento součet přehodnocen na 0 bodů.

1. Pro reálné čtvercové regulární matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ typu $n \times n$ *nemusí nutně platit* následující rovnost:
   (A) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})))$.
   (B) $\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E}_n$.
   (C) $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.
   (D) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

2. Ať $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ je lineárně nezávislý seznam vektorů v lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, a uvažujme vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Obecně *neplatí* tvrzení:
   (A) Vektor $\mathbf{p}$ lze zaměnit za jeden z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, a vytvořit tak novou bázi $\mathbb{R}^3$.
   (B) $\mathbf{p} \in \mathsf{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.
   (C) Ať $\mathbf{A}$ je matice se sloupci $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Pak má soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{p}$ řešení.
   (D) Ať $\mathbf{A}$ je matice se sloupci $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Pak $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

3. Je dáno lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a v $\mathbb{R}^3$ tři různé vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ takové, že $\mathbf{f}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{o}$, $\mathbf{f}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{o}$ a $\mathbf{f}(\mathbf{v}_3) = \mathbf{o}$. Hodnost zobrazení $\mathbf{f}$ *nemůže být*
   (A) 3,
   (B) 2,
   (C) 1,
   (D) 0.

4. Ať má soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nad $\mathbb{R}$ právě jedno řešení. Potom *nutně* platí:
   (A) pokud je matice $\mathbf{A}$ čtvercová, pak má nulový determinant,
   (B) matice $\mathbf{A}$ nemůže mít více řádků než sloupců,
   (C) matice $\mathbf{A}$ nemá více sloupců než řádků,
   (D) vektor $\mathbf{b}$ nemůže být lineární kombinací sloupců matice $\mathbf{A}$.

Část B (max. zisk 20 bodů) V odpovědi je třeba uvést definice uvedených pojmů a dále podrobnou a smysluplnou argumentaci, která objasňuje pravdivost uvedeného tvrzení. Za správně formulované definice je 10 bodů, za správně vedený důkaz je dalších 10 bodů.

1. Definujte pojmy: *konečná lineárně nezávislá množina vektorů* a *dimense lineárního prostoru*. Žádné další pojmy definovat nemusíte.

2. Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim(L) = n$. Ať $M = \{\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_n\}$ je množina vektorů z L. Dokažte, že M je lineárně nezávislá množina právě tehdy, když $\mathsf{span}(M) = L$.

Část C (max. zisk 20 bodů) Kromě zřetelně označeného výsledku (tj., odpovědi celou větou) je nutné odevzdat všechny mezivýpočty a stručné zdůvodnění postupu. Postup musí být zapsán přehledně a srozumitelně. Za chybný postup není možné dostat body, ačkoli nějaké výpočty jsou odevzdány. Za numerickou chybu, ale jinak správný postup, se strhává 1 nebo 2 body. Za část výpočtu je udělen odpovídající poměrný počet bodů z dvaceti.

V prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ jsou zadány afinní podprostory

$$\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})}_{=W} \qquad \boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix})}_{=W'}$$

Určete vzájemnou polohu $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ a průnik $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$.