Lineární prostory nad $\mathbb{R}$

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.1–1.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Co je definice?

Co je hypotéza?

Co je (matematická) věta? Lemma? Tvrzení?

Co je důkaz?

Více např. v textech

1. J. Velebil, *Velmi jemný úvod do matematické logiky*
2. J. Velebil, *Sbírka problémů z lineární algebry*

Neformálně

Lineární prostor (nad $\mathbb{R}$) je kolekce jakýchkoli objektů (těm budeme říkat vektory), které mezi sebou můžeme sčítat a každý z nich můžeme vynásobit skalárem (v našem případě prvkem $\mathbb{R}$). Sčítání vektorů a násobení skalárem se musí řídit jistými zákonitostmi.

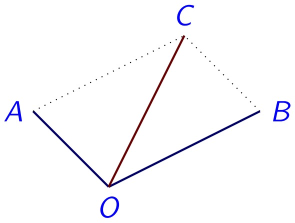
Příklady

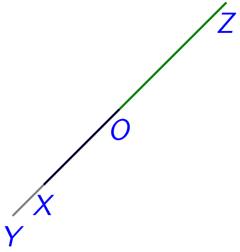
1. Vektory v rovině (fyzikální, případně geometrická intuice).
2. Reálné polynomy (značení: $\mathbb{R}[x]$).
3. n-tice reálných čísel (značení: $\mathbb{R}^n$, $n \geq 0$).[a]
4. Komplexní čísla (značení: $\mathbb{C}$).
5. Řada dalších příkladů...

[a] Důležité: Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme psát jako n-tice do sloupců.

Příklad (orientované úsečky v rovině)

Dvě operace:





sčítání: $OC = OA + OB$
násobení skalárem: $OY = \sqrt{2} \cdot OX$, $OZ = -\sqrt{2} \cdot OX$

Sčítání orientovaných úseček a násobení orientované úsečky reálným skalárem splňují jisté axiomy.

Definice (lineární prostor nad $\mathbb{R}$)

Lineární prostor (nad $\mathbb{R}$) je množina L spolu se dvěma funkcemi

$$+ : L \times L \to L, \quad \cdot : \mathbb{R} \times L \to L$$

pro které platí následující:

1. Vlastnosti sčítání:
   1. Existuje $\vec{o} \in L$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{x} = \vec{x}$ (existence nulového vektoru).
   2. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ platí: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (asociativita sčítání vektorů).
   3. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativita sčítání vektorů).
   4. Pro vš. $\vec{x} \in L$ existuje právě jeden $\vec{y} \in L$ tak, že $\vec{x} + \vec{y} = \vec{o}$ (existence opačného vektoru, značíme $\vec{y} = -\vec{x}$).

Definice (lineární prostor nad $\mathbb{R}$), pokrač.

2. Vlastnosti násobení skalárem:
   1. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ (násobení jednotkovým skalárem).
   2. Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$ (asociativita násobení skalárem).
3. Distributivní zákony:
   1. Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$ (distributivita součtu skalárů).
   2. Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$ (distributivita součtu vektorů).

Poznámka

Axiomy tří typů: chování operace $+$, chování operace $\cdot$ a vzájemný vztah obou operací.

Jednoduché důsledky definice

Ať L je lineární prostor. Potom:

1. Nulový vektor je jednoznačně určen.
2. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
3. Opačný vektor k $\vec{x} \in L$ je vektor $(-1) \cdot \vec{x}$.
4. Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

Důkaz.

1. Ať existují $\vec{o_1}, \vec{o_2}$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o_1} = \vec{o_1} + \vec{x} = \vec{x}$ a $\vec{x} + \vec{o_2} = \vec{o_2} + \vec{x} = \vec{x}$. Pak $\vec{o_1} = \vec{o_1} + \vec{o_2} = \vec{o_2}$.
2. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = (1 + 0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$. Tudíž $0 \cdot \vec{x}$ musí být nulový vektor.

Důkaz (pokrač.)

3. Platí: $\vec{x} + (-1)\cdot\vec{x} = 1\cdot\vec{x} + (-1)\cdot\vec{x} = (1-1)\cdot\vec{x} = 0\cdot\vec{x} = \vec{o}$.
4. Platí: $a\cdot\vec{o} = a\cdot(0\cdot\vec{o}) = (a\cdot 0)\cdot\vec{o} = 0\cdot\vec{o} = \vec{o}$.

■

Velmi důležitý důsledek definice

Ať L je lineární prostor, $a \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in L$. Pak $a\cdot\vec{x} = \vec{o}$ právě tehdy, když $a = 0$ nebo $\vec{x} = \vec{o}$.

Důkaz.

Díky předchozímu stačí dokázat pouze implikaci zleva doprava.
Ať $a\cdot\vec{x} = \vec{o}$ a $a \neq 0$. Potom existuje a^{-1}. Tudíž
$\vec{o} = a^{-1}\cdot\vec{o} = a^{-1}\cdot(a\cdot\vec{x}) = (a^{-1}\cdot a)\cdot\vec{x} = 1\cdot\vec{x} = \vec{x}$. ■

Povšimněme si, čeho využívá předchozí tvrzení:

Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: a^{-1} existuje, jakmile $a \neq 0$.

Další příklady a protipříklady

1. $L = (0, +\infty)$. Operace sčítání vektorů: $x \oplus y := x \cdot y$. Násobení skalárem: $\alpha \odot x := x^{\alpha}$. Pak L je lineární prostor.
2. L je jakákoli jednoprvková množina. Pak L (spolu s evidentními operacemi) je lineární prostor. Říkáme mu triviální lineární prostor. Nutně: $L = \{\vec{o}\}$.
3. $L = \mathbb{R}^2$. Operace: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+d \\ b+c \end{pmatrix}$, $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$. Nejde o lineární prostor.

Role reálných skalárů

Lze $\mathbb{R}$ nahradit jiným „číselným oborem“?

Se skaláry je třeba umět následující: rozumné sčítání, násobení.

Abstraktní pojem: skaláry musí tvořit strukturu $\mathbb{F}$, které se říká těleso.

To vede k pojmu lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Více v příští přednášce.

Poznámka

Abstrakce v lineární algebře má tedy dva stupně:

1. Lineární prostor nad $\mathbb{R}$ abstrahuje (například) prostor orientovaných úseček.
2. Lineární prostor nad $\mathbb{F}$ abstrahuje dále: roli skalárů převezmou prvky tělesa $\mathbb{F}$.

Jaký nejobecnější výpočet lze v lineárním prostoru vykonat?

1. Například můžeme sečíst čtyři vektory: $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} + \vec{w}$.
   Díky asociativitě sčítání nemusíme psát závorky.
2. Například můžeme násobek vektoru opět vynásobit: $b \cdot (a \cdot \vec{x})$.
   Díky axiomům jde opět o násobek $(b \cdot a) \cdot \vec{x}$.
3. Obecněji, můžeme sčítat konečně mnoho násobků vektorů.
   To znamená: je-li dán konečný seznam vektorů $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ a konečný seznam skalárů[a] $(a_1, \dots, a_n)$, lze utvořit lineární kombinaci

$$a_1 \cdot \vec{x}_1 + a_2 \cdot \vec{x}_2 + a_3 \cdot \vec{x}_3 + \dots + a_n \cdot \vec{x}_n$$

značenou i $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$ nebo $\sum_{i \in \{1,\dots,n\}} a_i \cdot \vec{x}_i$

[a] Těmto skalárům říkáme koeficienty lineární kombinace.

Definice

Seznam (také: skupina) vektorů je buď prázdná posloupnost () nebo konečná posloupnost $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

Pozor: je rozdíl mezi seznamem a množinou

$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \neq (\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1)$ *vs.* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = \{\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1\}$

$(\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2) \neq (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ *vs.* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2\} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

Definice (lineární kombinace konečného seznamu vektorů)

Pro seznam vektorů tvaru

1. () definujeme $\vec{o}$ jako jeho (jedinou možnou) lineární kombinaci (s prázdným seznamem koeficientů).
2. $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je vektor $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$ jeho lineární kombinace (se seznamem koeficientů $(a_1, \ldots, a_n)$).

Zobecnění předchozího (zatím jen slogan)

Lineární kombinace seznamu $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ v $\mathbb{R}^n$ vytvářejí „rovný kus“ prostoru $\mathbb{R}^n$.
Tento „rovný kus“ prostoru $\mathbb{R}^n$ prochází počátkem a má směr $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

Příští přednášky: těmto „rovným kusům“ v $\mathbb{R}^n$ budeme říkat lineární podprostory $\mathbb{R}^n$.

Pochopitelně, v příštích přednáškách budeme pracovat daleko abstraktněji než v $\mathbb{R}^n$.

Slogan je reklamní heslo!

Na přednášce budeme zmiňovat řadu sloganů. Slogany mají sloužit k intuitivnímu pochopení. Slogany v žádném případě nemohou nahradit přesná znění definic, vět, atd.