Lineární obal a lineární podprostor

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.5 a 1.6 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Definice lineárního prostoru (nad obecným tělesem).
2. Lineární kombinace.

Dnešní přednáška

1. Lineární obal množiny vektorů.
2. Lineární podprostor lineárního prostoru.

Připomenutí

V lineárním prostoru můžeme zjednodušovat zápisy:

1. Píšeme: $-\vec{x}$ místo $(-1) \cdot \vec{x}$. Jde o opačný vektor k vektoru $\vec{x}$ (dokázáno minule).
2. Píšeme: $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_{n-1} + \vec{x}_n$ místo $(\ldots(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \cdots + \vec{x}_{n-1}) + \vec{x}_n$. Důvod: asociativita sčítání vektorů.

Lineární kombinace seznamu $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ s koeficienty a_1, ..., a_n z tělesa $\mathbb{F}$ je vektor $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$.

Lineární kombinace prázdného seznamu $()$ je nulový vektor.

Konečné a nekonečné množiny

Připomenutí:[a] množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

1. Množina M je konečná, když má přesně n prvků, kde n je nějaké přirozené číslo.

   To znamená: M je konečná, když buď

   $M = \emptyset$ (množina M má 0 prvků),

   nebo

   $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, kde $n \geq 1$ je přirozené číslo (v tom případě má množina M n prvků).

2. Množina M je nekonečná, když není konečná.

   Například $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ jsou nekonečné množiny. Množina $\mathbb{R}[x]$ je nekonečná.

[a] Důležité: v této přednášce nula je přirozené číslo.

Definice (lineární obal množiny vektorů)

Ať M je jakákoli množina vektorů lineárního prostoru L. Lineární obal množiny vektorů M je množina $\mathrm{span}(M)$, definovaná takto:

$$\vec{x} \in \mathrm{span}(M) \quad \text{právě tehdy, když}^{a} \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$$

pro nějaké $n \geq 0$, nějaká $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ a nějaká $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in M$.

[a] Pozor: prázdná lineární kombinace je rovna vektoru $\vec{o}$.

Ujasnění si definice $\mathrm{span}(M)$

$\vec{x} \in \mathrm{span}(M)$ právě tehdy, když existuje nějaký seznam S vektorů z množiny M tak, že $\vec{x}$ je roven nějaké lineární kombinaci seznamu S.

To jest: $\mathrm{span}(M)$ je množina všech možných lineárních kombinací, které lze z M utvořit.

Příklady (viz minulé přednášky)

1. Pro

   v $\mathbb{R}^2$ je $\mathrm{span}(\{\mathbf{a}_1\})$ přímka procházející počátkem se směrem $(\mathbf{a}_1)$.

2. Pro

   v $\mathbb{R}^3$ je $\mathrm{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ rovina procházející počátkem se směrem $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

   Pozor: pro

   v $\mathbb{R}^3$, lineární obal $\mathrm{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ není rovina! Jde opět o přímku. Jak poznat o co jde? Uvidíme příště.[a]

[a] Toto téma se zove lineární závislost a lineární nezávislost.

Uzávěrové vlastnosti lineárního obalu

1. Je-li $M \subseteq N$, potom $\mathrm{span}(M) \subseteq \mathrm{span}(N)$.
2. Pro vš. M platí: $M \subseteq \mathrm{span}(M)$.
3. Pro vš. M platí: $\mathrm{span}(\mathrm{span}(M)) \subseteq \mathrm{span}(M)$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Vysvětlení uzávěrových vlastností (slogan)

Lineárními kombinacemi tvoříme „rovné kusy“ lineárního prostoru (viz minulou přednášku).

Množina $\mathrm{span}(M)$ je tedy „zabalení“ množiny M tak, aby výsledkem byl „co nejmenší rovný kus“, který obsahuje M.

Definice (lineární podprostor)

Ať W je podmnožina lineárního prostoru L. Řekneme, že W je lineární podprostor lineárního prostoru L, když platí $\mathrm{span}(W) \subseteq W$.

Slogan pro lineární podprostor

Podprostor je „dobrá" podmnožina prostoru. Žádnou lineární kombinací nelze z lineárního podprostoru „utéct".

Tvrzení

1. $\mathrm{span}(M)$ je vždy lineární podprostor. Jde o nejmenší podprostor, který obsahuje množinu M.
2. Množina M je lineární podprostor právě tehdy, když $\mathrm{span}(M) = M$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Tvrzení

Ať L je lineární prostor. Podmnožina $W \subseteq L$ je lineárním podprostorem prostoru L právě tehdy, když platí:

1. $\vec{o}$ je prvkem W (uzavřenost W na nulový vektor).
2. $\vec{x} + \vec{y}$ je prvkem W, pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in W$ (uzavřenost W na součet vektorů).
3. $a \cdot \vec{x}$ je prvkem W, pro každé $a \in \mathbb{F}$ a každé $\vec{x} \in W$ (uzavřenost W na skalární násobek).

Důkaz.

Přednáška. ∎

Další slogan pro lineární podprostor

Lineární podprostor vždy obsahuje nulový vektor a „vydrží" operace součtu a skalárního násobku.

Důležité

Ať W je lineární podprostor lineárního prostoru L. Potom množina W sama o sobě je lineárním prostorem, pokud sčítání vektorů ve W a násobení vektoru skalárem ve W definujeme stejně jako v prostoru L.

Obrácené tvrzení ale neplatí: například $W = \{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$ není lineárním podprostorem $\mathbb{R}^2$. Ale množina W spolu s operacemi

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a \odot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x \\ 1 \end{pmatrix}$$

tvoří lineární prostor nad $\mathbb{R}$.

Příklady

1. Každý lineární prostor je sám svým podprostorem.
2. Množina $\{\vec{o}\}$ je vždy lineárním podprostorem.[a]
3. $\mathbb{R}^3$ je lineární prostor (operace jsou definovány po složkách).
   1. $W_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ je lineárním podprostorem $\mathbb{R}^3$.
   2. $W_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ není lineárním podprostorem $\mathbb{R}^3$.

      Pozor! Na množině W_2 lze definovat strukturu lineárního prostoru (cvičení).

---

[a] Tomuto podprostoru říkáme triviální podprostor.

Příklady (pokrač.)

4. Označme jako $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ množinu všech reálných polynomů stupně maximálně 3 a jako $\mathbb{R}^{\leq 136}[x]$ množinu všech reálných polynomů stupně maximálně 136.
   Potom $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ je lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{R}^{\leq 136}[x]$.

   Obecněji: Ať $\mathbb{F}$ je těleso. Označme jako $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ množinu všech polynomů nad $\mathbb{F}$ stupně maximálně n, $n \geq 0$.
   Jakmile $n \leq m$, je $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{F}^{\leq m}[x]$.
5. Pro každé $n \geq 0$ je $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{F}[x]$.

Vlastnosti lineárních podprostorů

Ať L je lineární prostor.

1. Průnik libovolného systému $\{W_i \mid i \in I\}$ podprostorů prostoru L je lineárním podprostorem prostoru L.
2. Sjednocení systému $\{W_i \mid i \in I\}$ lineárních podprostorů prostoru L obecně lineárním podprostorem prostoru L není.

Důkaz.

Přednáška. ■

Definice (spojení lineárních podprostorů)

Ať $\{W_i \mid i \in I\}$ je systém lineárních podprostorů prostoru L. Lineárnímu podprostoru $\operatorname{span}(\bigcup_{i \in I} W_i)$ prostoru L říkáme spojení podprostorů W_i, $i \in I$, a značíme jej[a]

$$\bigvee_{i \in I} W_i$$

[a] V případě dvou podprostorů používáme i značení $W_1 \vee W_2$.

Klasifikace lineárních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^3$

Všechny podprostory $\mathbb{R}^3$ jsou buď

1. Jednoprvková množina obsahující pouze počátek.

nebo

2. Každá přímka procházející počátkem.

nebo

3. Každá rovina procházející počátkem.

nebo

4. Celá množina $\mathbb{R}^3$.

Důkaz.

V každém z uvedených bodů je lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$. To, že žádné jiné lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ neexistují, ukážeme později.[a] ■

[a] Budeme k tomu potřebovat pojem dimense.