Báze a dimense

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 3.1–3.3 a 3.6 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Lineární kombinace, lineární závislost/nezávislost.
2. Lineární obal seznamu/množiny vektorů.

Dnešní přednáška

1. Báze lineárního (pod)prostoru.

   Intuitivní význam: báze je výběr systému souřadnicových os.
2. Dimense lineárního (pod)prostroru.

   Intuitivní význam: dimense je počet souřadnicových os.

Připomenutí

Množina M je konečná, pokud buď $M = \emptyset$ nebo $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ pro nějaké přirozené číslo $n \geq 1$. Množina M je nekonečná, když není konečná.

Definice (množina generátorů)

Ať W je lineární podprostor prostoru L. Řekneme, že množina G generuje W, když platí $\operatorname{span}(G) = W$. (Říkáme také: G je množina generátorů podprostoru W.)

Definice (konečně generovaný podprostor)

Řekneme, že lineární podprostor W prostoru L je konečně generovaný, když existuje konečná množina jeho generátorů. (To jest, když platí $\operatorname{span}(G) = W$ pro nějakou konečnou množinu G.)

Příklady

1. Pro každý prostor L platí: L je množina generátorů prostoru L.

   Množina generátorů L prostoru L obecně není konečná a je vždy lineárně závislá (například: $\mathbb{R}^2$ je nekonečná lineárně závislá množina generátorů prostoru $\mathbb{R}^2$).

2. Jak $\emptyset$, tak $\{\vec{o}\}$ jsou konečné množiny generátorů triviálního prostoru $\{\vec{o}\}$. Důvody: $\mathrm{span}(\emptyset) = \{\vec{o}\}$ (minulé přednášky) a $\mathrm{span}(\{\vec{o}\}) = \{\vec{o}\}$.
   Všimněme si:
   1. $\emptyset$ je lineárně nezávislá množina generátorů prostoru $\{\vec{o}\}$.
   2. $\{\vec{o}\}$ je lineárně závislá množina generátorů prostoru $\{\vec{o}\}$.

3. Konečná množina $G = \{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ generuje „osu prvního a třetího kvadrantu“ prostoru $\mathbb{R}^2$. Množina G je lineárně závislá.

Definice (báze)

Lineárně nezávislé množině B, která generuje prostor L, říkáme báze prostoru L. Je-li B konečná, pak seznamu prvků B říkáme uspořádaná báze.

Slogan pro bázi

Báze prostoru je „nejúspornější“ množina generátorů.

Příklady

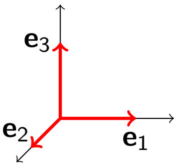
1. $\emptyset$ je báze triviálního prostoru $\{\vec{o}\}$.
2. Každá z množin $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.
3. Množina $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů.

Příklad (kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^n$, $n \geq 1$)

Ať $\mathbb{F}$ je jakékoli těleso. Označme jako $K_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ následující seznam vektorů v $\mathbb{F}^n$, $n \geq 1$:

$\mathbf{e}_i$ má jedničku na i-té posici, všude jinde nuly.

Potom K_n je uspořádaná báze prostoru $\mathbb{F}^n$.
Této uspořádané bázi K_n říkáme kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^n$.
(Také: standardní báze.)
Příklad: kanonická báze K_3 v $\mathbb{R}^3$.



$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad: Fourierova báze pro $n = 4$ (varianta této báze je používána v JPEG)

Pro $w = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$, je seznam $(\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, kde

$$\vec{f}_0 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^0 \\ w^0 \\ w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^2 \\ w^4 \\ w^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^3 \\ w^6 \\ w^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

uspořádaná báze lineárního prostoru $\mathbb{C}^4$ nad tělesem $\mathbb{C}$.

Tvrzení (Existence báze pro konečně generované prostory)

Každý konečně generovaný prostor L má konečnou bázi.
Navíc: všechny možné báze prostoru L mají stejný počet prvků.

Myšlenka důkazu

První tvrzení: víme, že $\mathrm{span}(G) = L$, kde G je konečná. Lze postupovat dvěma způsoby:

(I) „Přidávat“ do prázdné množiny „důležité“ vektory z G.

(II) „Ubírat“ z G „zbytečné“ vektory.

Detaily: přednáška.

Druhé tvrzení: Exchange Lemma (viz skripta, Lemma 3.2.10 a cvičení).

Definice (prostor konečné dimense)

Lineární prostor L má dimensi n (značíme: $\dim(L) = n$), když existuje báze B prostoru L, která má n prvků,[a] kde n je přirozené číslo.

[a] A tudíž, podle předchozího, všechny báze prostoru L mají n prvků.

Příklady

1. Platí: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $n \geq 0$.
2. Obecněji: pro jakékoli těleso $\mathbb{F}$ platí $\dim(\mathbb{F}^n) = n$, $n \geq 0$.
3. Platí: $\dim(\{\vec{o}\}) = 0$.
4. Prostor $\mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů nemá konečnou dimensi.
5. Podprostor $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ (polynomy stupně nejvýše 3) prostoru $\mathbb{R}[x]$ má dimensi 4. Uspořádaná báze je např. $(x^3, x^2, x, 1)$.

Poznámka

Ať $\dim(L) = n$ a ať M je podmnožina L, která má m prvků.

1. Je-li M lineárně nezávislá, pak $m \leq n$.
2. Ať $m = n$. M je lineárně nezávislá právě tehdy, když platí $\mathrm{span}(M) = L$.

Důsledek (klasifikace lineárních podprostorů $\mathbb{R}^3$)

Lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou přesně tvaru $\mathrm{span}(M)$, kde M (zaměření podprostoru) je lineárně nezávislá podmnožina $\mathbb{R}^3$:

1. Počátek $\{\vec{o}\}$ (když M má nula prvků).
2. Přímky procházející počátkem (když M má jeden prvek).
3. Roviny procházející počátkem (když M má dva prvky).
4. Celé $\mathbb{R}^3$ (když M má tři prvky).

Zobecnění: klasifikace[a] lineárních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$ (dokonce na lineární podprostory prostoru $\mathbb{F}^n$).

[a] To je náročnější na představu, ale geometrický význam je podobný jako pro lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$.

Připomenutí (Téma 2A)

Podprostoru $\operatorname{span}(W_1 \cup W_2)$ říkáme spojení podprostorů W_1 a W_2. Značení: $W_1 \vee W_2$.

Věta (rovnost dvou lineárních podprostorů)

Ať W_1, W_2 jsou lineární podprostory prostoru L konečné dimense. Potom $W_1 = W_2$ právě tehdy, když platí rovnost $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$.[a]

---

[a] Důkaz: domácí cvičení. Postupujte následovně:

1. Ať $W_1 = W_2$. Potom $W_1 \vee W_2 = W_1$. Tudíž platí rovnost $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$.
2. Ať $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$. Protože $W_1 \subseteq W_1 \vee W_2$ a oba podprostory mají stejnou dimensi, platí $W_1 = W_1 \vee W_2$.
   Rovnost $W_2 = W_1 \vee W_2$ se dokáže analogicky.
   Celkově: $W_1 = W_1 \vee W_2 = W_2$, hotovo.

Důsledek (důležitý pro Frobeniovu větu, téma 6A)

Ať W je lineární podprostor prostoru L konečné dimense. Pro vektor $\vec{v}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:[a]

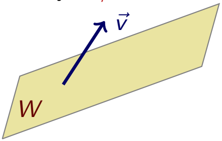
1. $\vec{v} \in W$
2. $\dim(W) = \dim(W \vee \mathrm{span}(\vec{v}))$

---

[a] Důkaz: domácí cvičení. Postupujte následovně:

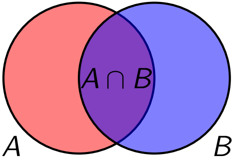
1. Dokažte: $\vec{v} \in W$ iff $\mathrm{span}(\vec{v}) \subseteq W$ iff $W = W \vee \mathrm{span}(\vec{v})$.
2. Použijte větu z předchozí stránky: $W = W \vee \mathrm{span}(\vec{v})$ iff $\dim(W) = \dim(W \vee \mathrm{span}(\vec{v})) = \dim(\underbrace{W \vee (W \vee \mathrm{span}(\vec{v}))}_{= W \vee \mathrm{span}(\vec{v})})$.

Měl by pomoci obrázek situace, kdy $\vec{v} \notin W$:



Připomenutí (princip inkluse a exkluse)

Ať A a B jsou konečné množiny.



Označíme-li počet prvků množin A, B, $A \cap B$ a $A \cup B$ jako $\mathrm{card}(A)$, $\mathrm{card}(B)$, $\mathrm{card}(A \cap B)$ a $\mathrm{card}(A \cup B)$, potom platí rovnost

$$\mathrm{card}(A \cup B) + \mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$$

Věta (o dimensi spojení a průniku)

Ať je L lineární prostor konečné dimense. Potom, pro libovolné lineární podprostory W_1, W_2, platí rovnost
$\dim(W_1 \vee W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Slogan pro větu o dimensi spojení a průniku

Jde o „princip inkluse a exkluse“ pro lineární prostory konečné dimense. Dimense hraje roli počtu prvků.[a]

[a] Znovu upozorňujeme: slogan je reklamní heslo, nikoli skutečnost.

Věta (za předpokladu (AC))

Každý lineární prostor L má bázi.

Důkaz.

Náročný: nebudeme dokazovat. ∎

Poznámka

Předpoklad (AC). Zkratka (AC) znamená Axiom of Choice, česky: axiom výběru.
Jedná se o tvrzení: kartézský součin libovolného systému neprázdných množin je neprázdná množina.[a]
Tvrzení (AC) je nezávislé na základních axiomech teorie množin.
Srovnejte s axiomem o rovnoběžkách z geometrie.

[a] Ve skriptech je použita ekvivalentní formulace (AC), tzv. Zornovo Lemma.

Pozor: stejný prostor nad různými tělesy má různé vlastnosti

1. Množina $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel je
   1. lineární prostor dimense 1 nad tělesem $\mathbb{C}$,
   2. lineární prostor dimense 2 nad tělesem $\mathbb{R}$.
2. Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je
   1. lineární prostor dimense 1 nad tělesem $\mathbb{R}$,
   2. lineární prostor nekonečné dimense nad tělesem $\mathbb{Q}$.[a]

[a] Nepovinné: takzvaná Hamelova báze reálných čísel, viz Příklad 3.6.5 skript.

Důsledek: měli bychom vždy psát, nad jakým tělesem o lineárním prostoru mluvíme!