

Souřadnice vzhledem k uspořádané bázi a komutativní diagramy

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 3.1–3.3 a 2.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

- 1 Báze lineárního (pod)prostoru.

Intuitivní význam: **báze je výběr systému souřadnicových os.**

- 2 Dimenze lineárního (pod)prostoru.

Intuitivní význam: **dimenze je počet souřadnicových os.**

Dnešní přednáška

- 1 Souřadnice vektoru vzhledem k **uspořádané** bázi.

Intuitivní význam: **souřadnice vektoru udávají „úseky“ vektoru na jednotlivých souřadnicových osách.**

- 2 Ukážeme **velmi užitečný** pohled na zobrazení (funkce):
kalkulus komutativních diagramů.

Věta (existence souřadnic vzhledem k uspořádané bázi)

Ať seznam $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ tvoří bázi lineárního prostoru L . Pro každý vektor \vec{x} v L existuje jediný seznam (a_1, \dots, a_n) prvků \mathbb{F} tak, že $\vec{x} = a_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{b}_n$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Definice (souřadnice vzhledem k uspořádané bázi)

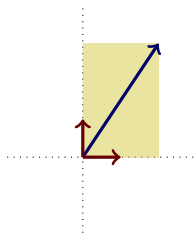
Seznamu (a_1, \dots, a_n) z předchozí věty říkáme **souřadnice vektoru \vec{x} vzhledem k uspořádané bázi $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$** . Značení:^a

$$\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

^aTj, souřadnice vektoru \vec{x} chápeme jako další vektor: vektor souřadnic v \mathbb{F}^n .

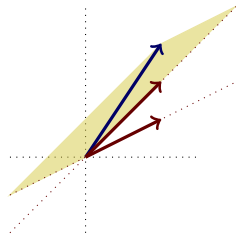
Příklad (souřadnice stejného vektoru k různým bázím)

Seznamy $K_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ jsou uspořádané báze prostoru \mathbb{R}^2 . (Seznam K_2 je **kanonická báze** prostoru \mathbb{R}^2 .)



$$\text{coord}_{K_2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\text{coord}_B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Důležitá vlastnost kanonické báze

Připomenutí: prostor \mathbb{F}^n nad \mathbb{F} má **kanonickou bázi**

$K_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, kde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

At $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je vektor v \mathbb{F}^n . Potom $\mathbf{coord}_{K_n}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Příklad (souřadnice stejného vektoru k různým bázím)

Seznamy

$$B_1 = (1, x, x^2) \quad B_2 = (x^2, x, 1)$$

jsou uspořádané báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše 2.

Platí:

$$\mathbf{coord}_{B_1}(3x^2 - 2x + 4) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{coord}_{B_2}(3x^2 - 2x + 4) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3x^2 - 2x + 4 = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot x + 3 \cdot x^2, \quad 3x^2 - 2x + 4 = 3 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 4 \cdot 1$$

Tvrzení (linearita výpočtu souřadnic)

Ať B je (jakákoli) konečná uspořádaná báze lineárního prostoru L .
Potom pro zobrazení $\vec{x} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{x})$ platí:^a

- 1 $\mathbf{coord}_B(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{coord}_B(\vec{x}) + \mathbf{coord}_B(\vec{y})$.
- 2 $\mathbf{coord}_B(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x})$.

^aTyto dvě vlastnosti jsou velmi důležité. Příště je budeme studovat abstraktně (vedou k pojmu **lineárního zobrazení**).

Důkaz.

Přednáška. ■

Důsledek: důležitá vlastnost každé uspořádané báze

At' $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je **jakákoli** uspořádaná báze prostoru L .
Potom platí:

$$\mathbf{coord}_B(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{coord}_B(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{coord}_B(\vec{b}_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obecně platí:

$$\mathbf{coord}_B\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{b}_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Několik připomenutí

- 1 Zadat **zobrazení** (také: **funkci**) $f : X \rightarrow Y$ znamená: **pro každé** $x \in X$ **zadat právě jedno** $y \in Y$. Toto y značíme $f(x)$ (**funkční hodnota** v x).
Píšeme^a i $x \mapsto f(x)$, $f : x \mapsto f(x)$.
- 2 Pro zobrazení $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ značíme $g \cdot f : X \rightarrow Z$ **složené zobrazení** $x \mapsto g(f(x))$.

^aDůležité je rozlišovat: šipka $f : X \rightarrow Y$ **versus** šipka s patkou $x \mapsto f(x)$.

Poznámky

- Slova *funkce* a *zobrazení* **znamenají totéž**.
- Skládání zobrazení značíme **stejně** jako násobení (tj. tečkou). Uvidíme později, že skládání zobrazení skutečně **je** jistý druh násobení.

Několik připomenutí (pokrač.)

- ③ Přesná definice zobrazení $f : A \rightarrow B$ zní:

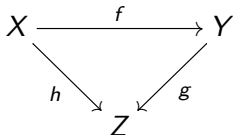
Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je podmnožina $A \times B$ taková, že pro všechna $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ tak, že $(a, b) \in f$.

Potom lze dokázat:

- ① Pro libovolnou množinu B existuje **právě jedno** zobrazení $f : \emptyset \rightarrow B$.
- ② Pro libovolnou množinu A existuje **právě jedno** zobrazení $f : A \rightarrow \{b\}$.
- ③ Je-li A neprázdná množina, pak **neexistuje** zobrazení $f : A \rightarrow \emptyset$.

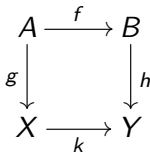
Několik připomenutí (pokrač.)

4 Komutativní trojúhelník:



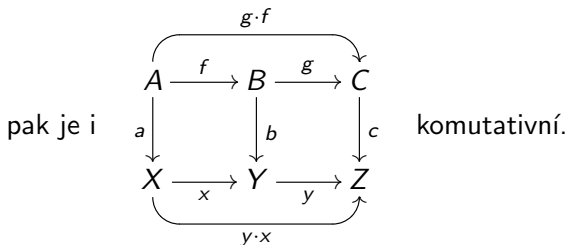
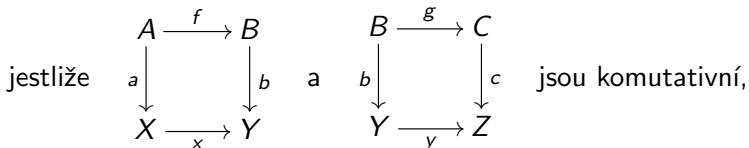
znamená $h = g \cdot f$, tj. $h(x) = g(f(x))$ pro **všechna** $x \in X$.

5 Komutativní čtverec:



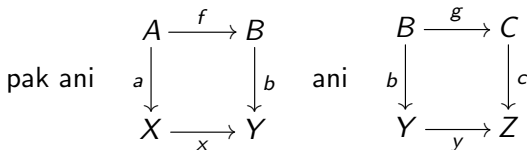
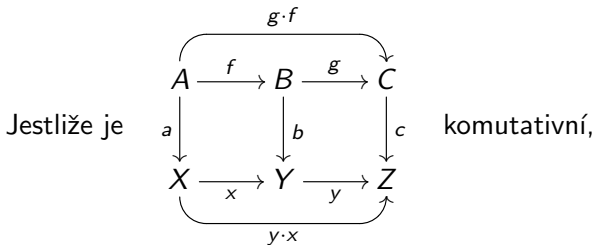
znamená $h \cdot f = k \cdot g$, tj. $h(f(x)) = k(g(x))$ pro **všechna** $x \in A$.

Několik připomenutí (pokrač.)

⑥ „Slepowání“ komutativních diagramů:^a^aDůležité: projděte si podrobně Příklady 2.2.1–2.2.3 skript.

Několik připomenutí (pokrač.)

7 „Trhání“ komutativních diagramů:^a



komutativní být nemusí.

^aDůležité: projděte si podrobně Příklady 2.2.1–2.2.3 **skript**.

Několik připomenutí (pokrač.)

- 8 Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je **prosté** (také: **injektivní** nebo **injekce**), když z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ plyne $x_1 = x_2$.
- 9 Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je **na** (také: **surjektivní** nebo **surjekce**), když pro každé $y \in Y$ existuje x tak, že $f(x) = y$.
- 10 Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je **bijekce** (také: **vzájemně jednoznačné**), když f je injekce a surjekce současně.

Známá fakta

- 1 **Identita na X** , tj. $\text{id}_X : X \rightarrow X$, kde $\text{id}_X : x \mapsto x$, je bijekce.
- 2 Platí $h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$ a $\text{id}_Y \cdot f = f = f \cdot \text{id}_X$, kdykoli je skládání definováno.
- 3 Složení injekcí je injekce, složení surjekcí je surjekce, složení bijekcí je bijekce.
- 4 $f : X \rightarrow Y$ je bijekce právě tehdy, když existuje jednoznačně určené^a $g : Y \rightarrow X$ tak, že $g \cdot f = \text{id}_X$ a $f \cdot g = \text{id}_Y$.

^aTomuto jednoznačně určenému zobrazení se říká **inverse** zobrazení f a značí se také f^{-1} .