Lineární zobrazení

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.1, 2.2 a 4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Báze lineárního prostoru a souřadnice vektoru vzhledem ke konečné uspořádané bázi.

Dnešní přednáška

1. Lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ zobecňuje zobrazení $\vec{x} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{x})$, dané konečnou uspořádanou bází B.
2. Zavedeme pojem matice lineárního zobrazení z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$ (vzhledem ke kanonickým bázím).

Velmi důležité připomenutí

Vektory z prostoru $\mathbb{F}^n$ píšeme jako sloupce.

Definice (lineární zobrazení)

Ať L_1, L_2 jsou lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$, pro které platí $\mathbf{f}(\vec{x} + \vec{x}') = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{x}')$ a $\mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$ pro vš. a z $\mathbb{F}$, pro vš. $\vec{x}$, $\vec{x}'$ z L_1, říkáme lineární zobrazení z L_1 do L_2.

Příklady

1. Ať L má uspořádanou bázi B o n prvcích. Zobrazení $\mathbf{coord}_B : L \longrightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární (minulá přednáška).
2. Řada dalších…

Poznámka (princip superposice)

$\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ je lineární právě tehdy, když platí rovnost

$$\mathbf{f}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{f}(\vec{x}_i)$$

pro vš. a_i z $\mathbb{F}$ a vš. $\vec{x}_i$ z L_1.

Tvrzení (základní algebraické vlastnosti lineárních zobrazení)

1. Složení lineárních zobrazení je lineární. Identita je lineární zobrazení.
2. Jsou-li $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ a $\mathbf{g} : L_1 \longrightarrow L_2$ lineární zobrazení, pak i zobrazení
   1. $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ je lineární, kde $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\vec{x}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{g}(\vec{x})$.
   2. $a \cdot \mathbf{f}$ je lineární (a je skalár z $\mathbb{F}$), kde $(a \cdot \mathbf{f})(\vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Důsledek (lineární prostor lineárních zobrazení)

Pro pevné lineární prostory L_1 a L_2 nad $\mathbb{F}$ je množina všech lineárních zobrazení z L_1 do L_2 lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Tento prostor značíme $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$.

Věta (lineární zobrazení je určeno hodnotami na bázi)

Ať B je báze[a] lineárního prostoru L_1, ať L_2 je libovolný lineární prostor. Pak zadat

1. libovolné zobrazení $h : B \longrightarrow L_2$,

je totéž jako zadat

2. lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$.

[a] Připomenutí (téma 3A): každý lineární prostor má bázi.

Důkaz.

Pro prostory konečné dimense: princip superposice.

Pro obecné prostory: mírně složitější. ∎

Příklad (popis libovolného lineárního zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$)

Připomenutí: $K_s = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s)$ je kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^s$.
Zadat lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ znamená zadat seznam s (ne nutně různých) hodnot

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{e}_s) = \mathbf{a}_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ a_{3s} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{pmatrix}$$

v lineárním prostoru $\mathbb{F}^r$.
Tomuto seznamu říkáme matice (o r řádcích a s sloupcích).

Definice (matice)

Matice $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{F}$ o r řádcích a s sloupcích je tabulka[a]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}$$

---

[a] Budeme také používat položkový zápis $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,s}$ nebo sloupcový zápis $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$.
Nebudeme používat: matice typu $r \times s$, rozměrů $r \times s$, atd., případně ještě horší značení $n \times m$. (Nebo $m \times n$?)

Poznámka

Matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ o r řádcích a s sloupcích budeme ztotožňovat s lineárním zobrazením

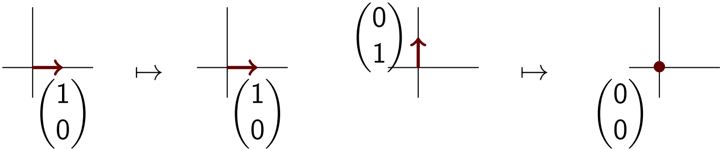
$$\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \dots, s$$

z prostoru $\mathbb{F}^s$ do prostoru $\mathbb{F}^r$, a budeme psát $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$.

Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$)

Kanonická báze $K_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ v $\mathbb{R}^2$. Matice některých lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (vzhledem ke K_2) jsou:

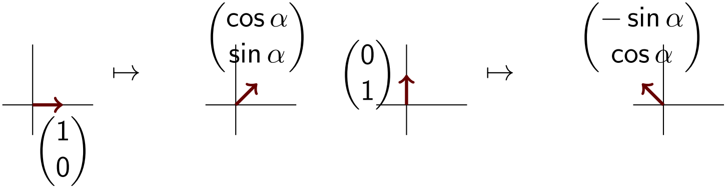
1. Projekce na osu x je ztotožněna s maticí $\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Analogicky: projekce na osu y je ztotožněna s maticí $\mathbf{P}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$, pokrač.)

2. Rotace (o úhel α) je ztotožněna s maticí
$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$



3. Změna měřítka ($a \neq 0$ a $b \neq 0$) je ztotožněna s maticí $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Pro $a = 1$, $b = -1$ dostaneme reflexi: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$, pokrač.)

4. Zkosení[a] (také: shear) je ztotožněno s maticí

$$\mathbf{S}_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

[a] Speciální typy zkosení (nad obecným tělesem) budou hrát důležitou roli při řešení soustav rovnic.

Co už nyní víme?

Například diagram

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{P}_x} \mathbb{R}^2$$

znamená následující: nejprve otočte o úhel α, potom proveďte projekci na osu x.

Značit se to musí $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{R}_\alpha$ (jde o skládání lineárních zobrazení). Co ale „násobení tabulek“ znamená? Odpověď: jde o novou matici.

Jak novou matici najít?

$$\mathbf{e}_j \mapsto j\text{-tý sloupec matice } \mathbf{R}_\alpha \mapsto ???$$

1. Násobení (skládání) matic: příští přednáška (téma 4B).
2. Zbytek dnešní přednášky: jak obecná matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ „zachází“ s obecným vektorem z prostoru $\mathbb{F}^s$?

Tvrzení (výpočet hodnoty matice A v obecném vektoru x)

Pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ se sloupcovým zápisem $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ a pro vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ platí

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{a}_j$$

Důkaz.

Protože $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j$, tak $\mathbf{A} : \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{a}_j$. ■

Značení (násobení matice vektorem)

Vektor $\sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{a}_j$ značíme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Příklad (rotace vektoru v $\mathbb{R}^2$)

Rotace (o úhel α): $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Potom součin

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dává výsledek otočení vektoru $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ o úhel α.

Například pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Poznámka (další význam zápisu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$)

Zápis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x}$ v $\mathbb{F}^s$, kóduje hodnotu lineárního zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ v bodě $\mathbf{x}$.

Zvolme pevné $\mathbf{b}$ v $\mathbb{F}^r$. Hledejme všechna $\mathbf{x}$ v $\mathbb{F}^s$ taková, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Na tento problém se lze dívat dvěma způsoby:

1. Hledáme vzor bodu $\mathbf{b}$ při lineárním zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$.
2. Řešíme soustavu lineárních rovnic.
   Počet sloupců matice $\mathbf{A}$ je počet neznámých, počet řádků matice $\mathbf{A}$ je počet rovnic v soustavě.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{je} \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 24 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & = & 8 \end{array}$$